Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 1-18

BRUNO FINZI (*)

Campi fisici e principi variazionali che li reggono. (**)

1. - Campi fisici.

EINSTEIN diceva che il concetto di campo costituisce il maggior successo dell'uomo nella scienza.

I concetti di corpuscolo, d'energia, di campo sono tre cardini della fisica. Il corpuscolo (ciò che non ha parte, per dirla con EUCLIDE) è una semplice, immediata astrazione dei corpi concreti, della quale la fisica si vale dai tempi più remoti. L'energia è un'astrazione meno immediata, che domina la fisica dal secolo scorso. Il campo è qualcosa di ancor più astratto, che costituisce l'essenza stessa della fisica moderna.

Il concetto di campo si presenta naturalmente nello studio dei fenomeni gravitazionali.

Se, in presenza di un corpo C, poniamo, in un generico punto P dello spazio, un corpuscolo di massa m, il corpuscolo risulta soggetto ad una forza $\boldsymbol{F}$ che dipende da C, dalla posizione P in cui è posto il corpuscolo e dalla sua massa m. Se spogliamo la forza $\boldsymbol{F}$ da ogni dipendenza dal corpuscolo, e a tal fine basta dividerla per m, otteniamo un vettore

$$\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}$$

che dipende soltanto dal corpo C e dalla posizione P. La funzione che dà $\boldsymbol{G}$ in funzione di P,

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}\,(P)$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica del Politecnico di Milano (Italia).

(**) Conferenza tenuta il 16 dicembre 1960 presso l'Istituto di Matematica dell'Università di Parma in occasione dell'inaugurazione del Seminario di Matematica dell'Università di Parma.

rappresenta l'influenza gravitazionale del corpo C in ogni punto P dello spazio: individua il *campo gravitazionale*.

Il concetto di campo diviene più intuitivo se riferito ad un corpo, invece che allo spazio. Ben intuitivo è ad esempio il campo cinetico di un fluido, che ne dà l'atto di moto dal punto di vista di Eulero. Fissato un istante, in ogni posizione P si può rilevare una velocità

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(P)$$

funzione di P. Essa non dipende dalla particolare particella fluida che si trova a transitare per P nell'istante considerato: la funzione $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(P)$ individua il *campo cinetico*. Pure molto intuitivo è il campo vettoriale che dà l'insieme degli spostamenti subiti da un corpo genericamente deformabile, il campo tensoriale che ne individua le deformazioni, quello, pure tensoriale, che ne individua gli sforzi.

Poco intuitiva è invece la nozione di campo elettrostatico, analoga a quella di campo gravitazionale.

In condizioni statiche e in presenza di un corpo elettrizzato C, poniamo in una posizione P dello spazio un corpuscolo, tanto debolmente elettrizzato da non alterare sensibilmente i fenomeni elettrici che avvengono in C. Sul corpuscolo si esercita una forza $\boldsymbol{F}$ prodotto di uno scalare e che dipende dal corpuscolo e di un vettore $\boldsymbol{E}$ che dipende da C e da P:

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} .$$

Lo scalare e rappresenta la carica elettrica del corpuscolo, che può essere positiva o negativa; il vettore $\boldsymbol{E}$, che rimane quando si spogli la forza $\boldsymbol{F}$ da ogni dipendenza dal corpuscolo, è una funzione di P,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(P)$$

la quale individua il *campo elettrico*, nelle condizioni statiche considerate.

Analogamente si definisce il campo magnetico.

2. - Equazioni di campo.

La leggi che reggono un campo possono ottenersi con procedimento corpuscolare: si considera entro il campo un generico elemento spaziale, avente tutte le dimensioni infinitesime, e si scrivono le leggi fisiche a cui deve ubbidire. Queste leggi, valide in ogni posizione entro il campo, sono, per costruzione, differenziali e costituiscono le *equazioni di campo*. Scrivendo anche le leggi fisiche a cui deve soddisfare un elemento spaziale che si affaccia al contorno, si ottengono le *condizioni al contorno*.

Per descrivere completamente il campo, il processo più spontaneo è quello di risalire dalle sue equazioni differenziali ad equazioni finite, tenendo conto delle condizioni al contorno e, nei casi non stazionari, delle *condizioni iniziali*. Arduo problema questo, perchè le equazioni di campo risultano di solito alle derivate parziali. La loro integrazione costituisce il problema fondamentale della fisica matematica; problema importantissimo certamente, ma che forse ci ha troppo ossessionato.

3. - Principi variazionali della meccanica classica.

Passiamo ora ad un altro ordine di idee.

La statica dei consueti sistemi meccanici, soggetti a vincoli lisci, è retta dal principio dei lavori virtuali. Questo principio, quando la sollecitazione attiva è conservativa, quando cioè esiste un'energia potenziale attiva W, può enunciarsi in modo espressivo così: in condizioni d'equilibrio *l'energia potenziale attiva è stazionaria*,

$$\delta W = 0,$$

minima anzi se l'equilibrio è stabile.

La stazionarietà dell'energia potenziale attiva non caratterizza soltanto l'equilibrio meccanico, ma anche l'equilibrio elettrico, l'equilibrio termochimico, e, pur d'interpretare opportunamente l'energia W, caratterizza altresì l'equilibrio economico (Pareto), l'equilibrio biologico (Volterra), e così via.

Non soltanto alle leggi della statica può darsi forma variazionale, ma tale forma può essere data anche alle leggi della dinamica.

Il primo principio variazionale dinamico fu quello di Maupertuis, messo a posto da Eulero, riguardante la dinamica di un corpuscolo: fra tutti i moti isoenergetici di un punto materiale, che rispettano le posizioni estreme $P_0 P_1$, il moto effettivo rende *minima l'azione*

$$A = \int_{P_0 P_1} mv \, dl,$$

dove m è la massa del corpuscolo, v la sua velocità e dl l'elemento d'arco di traiettoria.

Il principio precedente fu esteso ad un generico sistema meccanico da Hölder: fra tutti i moti variati isoenergetici di un sistema, che avvengono in un assegnato intervallo di tempo (t_0, t_1), rispettando le configurazioni estreme, il moto effettivo rende stazionario il valor medio dell'energia cinetica T in tale intervallo di tempo, e con esso l'azione

$$A = \int_{t_0}^{t_1} T \, dt .$$

Forse più noto è il *principio di* HAMILTON: fra tutti i moti variati sincroni di un sistema, che avvengono in un assegnato intervallo di tempo, rispettando le configurazioni estreme, il moto effettivo rende stazionaria (e anzi minima nei casi più comuni) l'azione

$$B = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L} \, dt,$$

dove $\mathfrak{L}$ è la funzione di LAGRANGE, differenza fra l'energia cinetica T e l'energia potenziale W

$$\mathfrak{L} = T - W .$$

In sostanza il principio di HAMILTON afferma che nel moto naturale l'energia totale si ripartisce, in *media*, più che può fra le due forme di cui dispone in meccanica: la cinetica e la potenziale.

Da MAUPERTUIS in poi le discussioni sui principi variazionali non conobbero limiti. Alcuni vollero riconoscervi un aspetto finalistico delle leggi naturali. Altri un semplice aspetto formale delle equazioni che reggono l'equilibrio o il movimento. Non ad ogni sistema di equazioni si può però dare forma variazionale, facendo intervenire una sola funzione, come avviene nei casi ricordati. Non solo, ma ciò che risulta stazionario (minimo) è una grandezza fisica molto espressiva: l'energia potenziale in statica, il valor medio dell'energia cinetica nel principio della minima azione, il divario fra il valor medio dell'energia cinetica e quello dell'energia potenziale nel principio di HAMILTON.

I principi variazionali non si presentano poi in forma differenziale, bensì in forma integrale, e si prestano perciò alla ricerca di soluzioni globalmente (e non localmente) approssimate di problemi fisici e tecnici. Basta una modesta intuizione geometrica o fisica per valersi nel modo più acconcio del metodo di RITZ (o analoghi): al posto delle funzioni incognite si pongono delle combinazioni lineari di poche funzioni prefissate a buon senso, che soddisfino le condizioni al contorno o iniziali; il funzionale che deve essere stazionario risulta allora (eseguendo l'integrazione) funzione nota di pochi coefficienti soltanto, e per determinarli basta scrivere che sono nulle le derivate parziali rispetto ad essi.

Anche nello studio dei campi fisici la formulazione variazionale offre indiscutibili vantaggi concettuali e pratici, ed è questa la ragione che mi induce a parlarvi dei principi variazionali che reggono alcuni importanti campi.

Intanto, nella meccanica dei corpi continui, quale aspetto assumono i principi variazionali poc'anzi considerati, che reggono la statica e la dinamica?

4. - Principio della minima energia potenziale nei campi della statica.

I campi della statica dei corpi continui, genericamente deformabili, sono individuati dal principio dell'energia potenziale attiva stazionaria (minima).

Se w è la densità d'energia nello spazio S, le equazioni di campo si ottengono scrivendo che, per ogni variazione nulla al contorno, è stazionario l'integrale triplo di $w\,\mathrm{d}S$:

$$\delta \iiint_S w\,\mathrm{d}S = 0 .$$

Aggiungendo all'energia distribuita nello spazio S quella distribuita sulla superficie σ di contorno, e lasciando libera la variazione su questa, dal principio dell'energia potenziale stazionaria si traggono anche le condizioni al contorno.

Mostriamo, ad esempio, come dal principio dell'energia potenziale stazionaria si traggono le equazioni indefinite dei corpi elastici omogenei, soggetti a piccole deformazioni.

In questo caso la densità d'energia potenziale interna è funzione quadratica omogenea del tensore di deformazione ξ_{ik}, attraverso coefficienti che sono le componenti del tensore elastico C^{ikrs}, e, se u è l'energia potenziale esterna per unità di volume, è:

$$w = \frac{1}{2}\, C^{ikrs}\, \xi_{ik}\, \xi_{rs} + u,$$

dove gli indici assumono i valore 1, 2, 3, e viene sottointesa la sommatoria rispetto agli indici che si saturano. Il tensore di deformazione ξ_{ik} è poi la parte simmetrica del tensore derivato dello spostamento s_i, spostamento che funge quindi da potenziale:

$$\xi_{ik} = \frac{1}{2}\,(s_{i/k} + s_{k/i}) .$$

In quanto a u, se F^i è la forza esterna per unità di volume, è:

$$\delta u = F^i\, \delta s_i .$$

Lasciate ora che illustri il processo di calcolo, analogo all'integrazione per parti, di cui ci varremo anche in altri casi:

$$\delta \int_S w \, \mathrm{d}S = \int_S \delta w \, \mathrm{d}S = \int_S (C^{ikrs} \, \xi_{rs} \, \delta \xi_{ik} + \delta u) \, \mathrm{d}S =$$

$$= \int_S (C^{ikrs} \, \xi_{rs} \, \delta s_{i/k} + F^i \, \delta s_i) \, \mathrm{d}S = \int_S (C^{ikrs} \, \xi_{rs} \, \delta s_i)_{/k} \, \mathrm{d}S - \int_S (C^{ikrs} \, \xi_{rs/k} - F^i) \, \delta s_i \, \mathrm{d}S = 0 \, .$$

Trasformando il primo integrale triplo all'ultimo membro in uno doppio esteso al contorno, questo risulta nullo, perchè ivi $\delta s_i = 0$. Scrivendo allora che $\delta \int_S w \, \mathrm{d}S = 0$, qualunque sia δs_i entro S, si trova l'equazione di campo:

$$C^{ikrs} \, \xi_{rs/k} = F^i ,$$

o, se si vuole, in termini di spostamento:

$$C^{ikrs} \, s_{r/sk} = F^i \, .$$

5. - Principio di Hamilton nei campi della dinamica.

I campi della dinamica dei continui genericamente deformabili sono individuati dal principio di HAMILTON.

Sia ℓ l'invariante spaziale che rappresenta la densità lagrangiana, differenza fra la densità d'energia cinetica e la densità d'energia potenziale w, cioè se k è la densità materiale e $\boldsymbol{v}$ la velocità, sia

$$\ell = \frac{1}{2} k v_i \, v^i - w \, .$$

Il principio di HAMILTON si esprime così:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \iiint_S \ell \, \mathrm{d}S = 0 \, .$$

Da questo principio, ponendo per w l'espressione trovata nella statica dei corpi elastici, si traggono le equazioni indefinite della dinamica elastica; ponendo invece

$$w = p s^i{}_{/i} + u$$

(essendo p la pressione e $s^i{}_{/i}$, cioè div $\boldsymbol{s}$, il coefficiente di dilatazione cubica) si ricavano le equazioni indefinite della dinamica dei liquidi perfetti; e così via.

6. - Campo gravitazionale e campo elettrostatico.

Si consideri un puro campo gravitazionale nello spazio S esterno alle masse che lo provocano. Esso è induviduato dal solo vettore $\boldsymbol{G}$, col quale si costruisce il semplicissimo invariante quadratico $\frac{1}{2} G_i G^i$: metà della norma.

Le equazioni di campo si ottengono scrivendo che è stazionario l'integrale esteso ad S del precedente invariante quadratico:

$$\delta \int_S \frac{1}{2} G_i G^i \, \mathrm{d}S = 0 .$$

Infatti, ricordiamo il lemma di Clebsch, per il quale un generico campo vettoriale $\boldsymbol{v}(P)$ può riguardarsi somma di un campo irrotazionale, proveniente da un potenziale scalare φ, e di un campo solenoidale, proveniente da un potenziale vettore (solenoidale) $\boldsymbol{\psi}$, cioè

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} \qquad (\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0),$$

o anche, ricorrendo alle componenti:

$$v_i = \varphi_{/i} + \varepsilon_{ihk} \, \psi^{k/h} \qquad (\psi^k{}_{/k} = 0),$$

dove ε_{ihk} è il tensore completamente emisimmetrico di Ricci nello spazio tridimensionale S. Scriviamo ora il principio variazionale, applichiamo al vettore $\delta\boldsymbol{G}$ il lemma di Clebsch e trasformiamo gli integrali col processo già illustrato d'integrazione per parti. Avremo:

$$\delta \int_S \frac{1}{2} G_i G^i \, \mathrm{d}S = \int_S G^i \, \delta G_i \, \mathrm{d}S = - \int_S (G^i{}_{/i} \, \delta\varphi + \varepsilon_{ihk} \, G^{i/h} \, \delta\psi^k) \, \mathrm{d}S = 0 .$$

Affinchè questa eguaglianza sia verificata, qualunque sia la variazione dei potenziali (nulla al contorno), deve essere:

$$G^i{}_{/i} = 0 \qquad \varepsilon_{ihk} \, G^{i/h} = 0,$$

cioè nulla la divergenza di $\boldsymbol{G}$ e nullo il suo rotore.

Il campo deve dunque essere irrotazionale e solenoidale, cioè armonico:

$$\boldsymbol{G} = \operatorname{grad} \varphi, \qquad \Delta\varphi = 0 .$$

Si noti come, ponendo $\boldsymbol{G} = \operatorname{grad} \varphi$ nel principio variazionale, esso diventi quello di DIRICHLET:

$$\delta \int_S \varphi_{/i}\, \varphi^{/i}\, \mathrm{d}S = 0,$$

da cui si trae appunto l'equazione di LAPLACE $\Delta\varphi = 0$, che afferma l'armonicità del potenziale.

Se si vuole spingersi entro le masse gravitanti, basta aggiungere nel principio variazionale al precedente invariante di puro campo $\frac{1}{2}\, G_i\, G^i$ l'invariante di distribuzione $hk\varphi$, dove k è la densità di massa e $-h$ la costante gravitazionale (moltiplicata per 4π). Le equazioni di campo che se ne traggono affermano ancora che $\boldsymbol{G}$ è irrotazionale, ma che la sua divergenza non è nulla, perchè eguale ad hk. Conseguentemente il potenziale, invece che soddisfare all'equazione di LAPLACE, soddisfa all'equazione di POISSON:

$$\Delta\varphi = hk.$$

Quanto abbiamo detto relativamente al campo gravitazionale può ripetersi per il campo elettrostatico nel vuoto: basta sostituire al vettore $\boldsymbol{G}$ che individua il campo gravitazionale il vettore $\boldsymbol{E}$ che individua il campo elettrico, al potenziale gravitazionale il potenziale elettrico, alla densità di massa k, la densità elettrica ϱ, la cui unità può anzi scegliersi in modo che la costante che sostituisce h sia eguale ad 1. Anche il campo elettrostatico risulta così irrotazionale e la sua divergenza eguaglia la distribuzione elettrica data dalla densità ϱ (1). Proprio così ha operato PRATELLI.

7. - Campi meccanici nello spazio-tempo.

Riprendiamo la formula che esprime, per un corpo continuo, il principio di HAMILTON in dinamica, formula che, in statica, si riduce a quella che esprime il principio di stazionarietà dell'energia potenziale (2). Due cose in essa ci colpiscono: in primo luogo le 4 integrazioni che essa presuppone, rispetto a tre coordinate spaziali e rispetto al tempo; in secondo luogo il segno « meno » che compare

(1) Vi è così stretta analogia fra le equazioni indefinite del campo gravitazionale e quelle del campo elettrostatico nel vuoto; non però nelle condizioni al contorno.

(2) Dalla stazionarietà dell'azione hamiltoniana B si deduce, nel caso statico, la stazionarietà dell'energia potenziale W, ma dall'essere B minima nel moto naturale, non si deduce affatto che W è minima quando l'equilibrio è stabile.

nell'espressione della densità lagrangiana ℓ, che ci obbliga a fare la differenza, e non la somma, fra due densità d'energia.

Ciò suggerisce, nel modo più spontaneo, di formulare il principio di HAMILTON in uno spazio-tempo pseudoeuclideo a 4 dimensioni, in cui le coordinate di un punto (evento) sono tre coordinate spaziali $x^1\ x^2\ x^3$ e una temporale che indichiamo con x^0 (per pudore!). La densità lagrangiana dovrà allora sostituirsi con l'invariante lineare di un tensore doppio simmetrico $T^{\alpha\beta}$ rappresentante le varie forme di densità d'energia, cioè, se $a_{\alpha\beta}$ è il tensore fondamentale che dà la metrica dello spazio-tempo, deve essere

$$\ell = T^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta},$$

dove gli indici (che contrassegnamo con lettere greche) debbono assumere i quattro valori 0, 1, 2, 3. Non solo, ma per via del segno « meno » che compare nell'espressione di ℓ, la metrica spazio-temporale deve avere segnatura $+ - - -$, (oppure $- + + +$) cosicchè, in coordinate pseudocartesiane ortogonali, risulti:

$$(\mathrm{d}s)^2 = a_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2$$

e quindi

$$a_{\alpha\beta} = -1 \quad \text{per} \quad \alpha = \beta = 1,\ 2,\ 3, \quad a_{\alpha\beta} = 1 \quad \text{per} \quad \alpha = \beta = 0, \quad a_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{per} \quad \alpha \neq \beta.$$

Con pochi passi ancora su questa via si arriva dritti dritti alla teoria della relatività: peccato che EINSTEIN ci abbia preceduto!

Mostriamo infatti come tutte le leggi della meccanica relativistica discendano dal principio variazionale di HAMILTON, scritte nella forma:

$$\delta \int_\tau T^{\alpha\beta}\, a_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}\tau = 0,$$

dove τ è una regione prefissata dello spazio-tempo pseudoeuclideo, al contorno della quale la variazione s'annulla.

La più generale variazione che lascia pseudoeuclideo lo spazio-tempo è quella per cui, se δS_α è un vettore infinitesimo arbitrario (S_α funge da potenziale) è:

$$\delta a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(\delta S_{\alpha/\beta} + \delta S_{\beta/\alpha}).$$

Se allora $\delta\,(T^{\alpha\beta}\,\mathrm{d}\tau) = 0$, risulta: $\delta \int\limits_\tau T^{\alpha\beta}\, a_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}\tau = \int\limits_\tau \delta a_{\alpha\beta}\, T^{\alpha\beta}\, \mathrm{d}\tau = \int\limits_\tau T^{\alpha\beta}\, \delta S_{\alpha/\beta}\, \mathrm{d}\tau$,
e quindi dal principio variazionale (col solito procedimento d'integrazione per parti, e scrivendo che esso è verificato per ogni δS_α) si trae:

$$T^{\alpha\beta}{}_{/\beta} = 0 \,.$$

Quest'equazione di campo, vettoriale nello spazio-tempo, soddisfa, per costruzione, al principio di relatività, e afferma che *è nulla la divergenza del tensore energetico*. Essa riassume 4 equazioni: le 3 dinamiche della quantità di moto e quella dell'energia, affermante la famosa equivalenza fra massa ed energia nelle sue varie forme.

8. - Campo elettromagnetico nello spazio-tempo.

Il campo elettromagnetico trova nello spazio-tempo rappresentazione concettualmente semplice, e semplici ed espressive risultano le leggi che lo governano.

Il campo spaziale elettrico e quello pure spaziale magnetico si riassumono, nel vuoto, in un unico campo spazio-temporale: quello di un tensore emisimmetrico $F_{\alpha\beta} = - F_{\beta\alpha}$, avente 6 componenti caratteristiche: le tre spaziali dànno il campo magnetico spaziale, mentre le tre miste (con un indice spaziale e uno temporale) dànno il campo elettrico spaziale. La distribuzione elettrica si riassume in un unico vettore spazio-temporale j^α, che con la sua componente temporale dà la densità elettrica, con le sue tre componenti spaziali le tre componenti del vettore spaziale che dà la densità di corrente elettrica.

Tutte le leggi elettromagnetiche si ottengono da quelle elettrostatiche con questa semplicissima regola: sostituire allo spazio geometrico tridimensionale S, sede del campo elettrostatico, lo spazio-tempo quadrimensionale τ, sede del campo elettromagnetico; sostituire al vettore spaziale $\boldsymbol{E}$ del campo elettrostatico il tensore elettromagnetico spazio-temporale $F_{\alpha\beta}$; sostituire alla densità elettrica ϱ il vettore spazio-temporale j^α che dà la distribuzione elettrica.

Il principio variazionale che regge il puro campo elettromagnetico è perciò il seguente:

$$\delta \int\limits_\tau \frac{1}{2}\, F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta}\, \mathrm{d}\tau = 0,$$

ottenuto con la regola precedente da quello che regge il puro campo elettrostatico.

Per trarre da questo principio variazionale le equazioni di campo, basta valersi di un lemma analogo a quello di CLEBSCH, non però relativo ai vettori dello spazio, ma ai tensori doppi emisimmetrici dello spazio-tempo. Grazie ad esso $F_{\alpha\beta}$, a priori, può riguardarsi somma di un tensore irrotazionale, proveniente da un vettore potenziale (solenoidale) φ_α e uno solenoidale, proveniente da un secondo vettore potenziale (solenoidale) ψ^ν:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\varphi_{\alpha/\beta} - \varphi_{\beta/\alpha}) + \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\,\psi^{\nu/\mu} \qquad (\varphi^\alpha{}_{/\alpha} = 0,\ \psi^\nu{}_{/\nu} = 0),$$

dove $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ è il tensore di RICCI nello spazio-tempo quadridimensionale. Dal principio variazionale (col solito procedimento d'integrazione per parti e riguardando $\delta\varphi^\alpha$ e $\delta\psi^\nu$ arbitrari in τ, ma nulli al contorno) si ottengono le seguenti equazioni di campo:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta/\mu} = 0 \qquad F^{\alpha\beta}{}_{/\beta} = 0\,.$$

Esse affermano che il tensore elettromagnetico è irrotazionale e solenoidale nello spazio-tempo. L'unico potenziale φ_α da cui dipende a posteriori (per la condizione d'irrotazionalità) il tensore elettromagnetico, il cosiddetto « potenziale elettromagnetico » soddisfa allora non all'equazione di LAPLACE, ma all'equazione di d'ALEMBERT

$$\Box\, \varphi^\alpha = 0,$$

che, in virtù della segnatura $+---$ della metrica, esprime l'armonicità del tensore elettromagnetico nello spazio-tempo.

Per considerare ora il campo elettromagnetico sì nel vuoto, ma con distribuzione elettrica j^α, basta aggiungere all'invariante di puro campo $\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ l'invariante di distribuzione $\varphi_\alpha j^\alpha$. Si ottengono così le seguenti equazioni di campo, equivalenti a quelle di MAXWELL:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta/\mu} = 0 \qquad F^{\alpha\beta}{}_{/\beta} = j^\alpha\,.$$

Esse dicono che, nello spazio-tempo, *il tensore elettromagnetico è irrotazionale* e che *la sua divergenza eguaglia la distribuzione elettrica.*

9. - Campo gravitazionale Einsteiniano.

Nella teoria einsteiniana della relatività generale il campo gravitazionale si identifica con quello che dà la geometria dello spazio-tempo. Questo non è pseudoeuclideo, ma *riemanniano*, incurvato dalle masse presenti. La sua metrica è data da una generica forma differenziale quadratica,

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{\lambda\beta}\, \mathrm{d}x^\lambda\, \mathrm{d}x^\beta,$$

a cui non può darsi ovunque forma pseudopitagorica con un semplice cambiamento di coordinate. Il tensore fondamentale $g_{\lambda\beta}$, le cui componenti costituiscono i coefficienti della metrica, rappresenta i potenziali gravitazionali, e il tensore di RIEMANN contratto $R^{\lambda\beta}$, funzione lineare omogenea delle curvature, dà tutte le forme d'energia gravitazionale.

Con $R^{\lambda\beta}$ e $g_{\lambda\beta}$ si costruisce l'invariante

$$R = R^{\lambda\beta} g_{\lambda\beta}$$

che dà localmente la curvatura media. Il principio variazionale, che regge il campo gravitazionale esternamente alle masse, è nella teoria einsteiniana semplicemente il seguente:

$$\delta \int_\tau R\, \mathrm{d}\tau = 0 .$$

Esso afferma, in sostanza, che, in presenza di masse, lo spazio-tempo è sì curvo, ma in *media* lo è meno che può: è stazionario il valor medio spazio-temporale della curvatura media locale.

Dando al tensore fondamentale la variazione $\delta g_{\lambda\beta}$, varia $R^{\alpha\beta}$, varia $\mathrm{d}\tau$, ma l'integrale esteso a τ non deve variare, qualunque sia $\delta g_{\lambda\beta}$, purchè nullo al contorno di τ. Ne seguono le seguenti equazioni per il campo gravitazionale esterno alle masse:

$$A^{\lambda\beta} \equiv R^{\lambda\beta} - \frac{1}{2} R g^{\lambda\beta} = 0 .$$

In prima approssimazione i potenziali gravitazionali sono individuati da un sol potenziale φ e le precedenti equazioni di campo si riducono all'equazione di LAPLACE $\Delta\varphi = 0$, tipica della teoria classica, ma non così a pieno rigore, allorchè l'equazione tensoriale di campo $A^{\lambda\beta} = 0$ sintetizza 10 equazioni differenziali del secondo ordine nei 10 potenziali $g_{\lambda\beta}$, fra le quali intercorrono però le 4 identità di BIANCHI:

$$A^{\lambda\beta}{}_{/\beta} \equiv 0,$$

che lasciano libera la scelta delle 4 coordinate spazio-temporali.

Le equazioni di campo $A^{\alpha\beta}=0$ non sono del tutto lineari, come invece lo è l'equazione di LAPLACE, e grazie a questa circostanza, e al sussistere delle identità di BIANCHI, si verifica un fatto che non ha riscontro in tutti gli altri campi della fisica classica: se, come di solito, si rappresentano con singolarità le masse puntiformi che costituiscono le « sorgenti » del campo gravitazionale, il loro moto non può essere qualsivoglia, ma risulta determinato unicamente dalle equazioni di campo, e non da equazioni estranee ad esso, come quella che traduce la legge fondamentale della dinamica classica (forza eguale a massa per accelerazione). È veramente singolare e degno di meditazione che le equazioni del campo gravitazionale einsteiniano racchiudano in sè il moto delle proprie sorgenti!

10. - Generalizzazioni di campi fisici.

Quanto abbiamo constatato per i campi meccanici, per il campo elettromagnetico, per il campo gravitazionale einsteiniano, ha carattere generale: il modo più acconcio per individuare un campo fisico è quello di affermare la stazionarietà dell'integrale esteso ad una prefissata regione dello spazio-tempo di un invariante costruito con quegli scalari, vettori, tensori spazio-temporali nei quali la fisica ravvisa gli enti tipici del campo. E la stazionarietà dell'integrale deve aver luogo per una generica variazione dei *potenziali* di tali enti, variazione però nulla al contorno.

Le equazioni di campo che così si traggono sono certamente compatibili, se l'integrale può essere stazionario, e hanno carattere tensoriale nello spazio-tempo, soddisfacendo quindi al principio di relatività generale.

Della « ricetta » che vi ho dato ci si vale modernamente per stabilire un'assiomatica dei campi fisici concettualmente semplice e sicura, consona all'intuizione, praticamente efficace. Dall'esperienza non si può però prescinde e, perchè essa deve suggerire quali sono gli enti caratteristici dei vari campi, e deve giu icare se e a quali condizioni i fenomeni verificano le leggi desunte dai princ pi variazionali ra ionevolmente costruiti con ta i enti.

Il modo migliore per generalizzare i campi è quello di generalizzare gli invarianti che costituiscono le densità lagrangiane poste sotto segno integrale nei principi che reggono i campi stessi. E ciò basta, perchè leggi, proprietà, caratteristiche dei campi sono tutte contenute in germe nei principi variazionali da cui scaturiscono.

Questa appunto è la strada che seguì EINSTEIN nell'ultima sua teoria relativistica unitaria. Per fondere nell'unico campo geometrico di uno spazio-tempo *non* riemanniano il campo gravitazionale e quello elettromagnetico, partì ancora dal principio variazionale $\delta \int_\tau R^{\alpha\beta}\, g_{\alpha\beta}\, d\tau = 0$, ma ritenne che, a differenza di quanto avviene in uno spazio-tempo riemanniano, sia il tensore fondamentale $g_{\alpha\beta}$ che quello di curvatura $R^{\alpha\beta}$ non fossero simmetrici.

Mostrerò ora come per questa via si possa generalizzare il campo elettromagnetico maxwelliano, pervenendo al *campo mesonico* e a sue estensioni, nonchè a un campo oggi di gran moda: quello della *magnetofluidodinamica*.

11. - Campo mesonico e sue estensioni.

Si perviene al campo mesonico partendo dal principio variazionale che regge il campo elettromagnetico maxwelliano ed aggiungendo alla somma dell'invariante di puro campo $\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ e dell'invariante di distribuzione $\varphi_\alpha j^\alpha$ l'invariante quadratico $\frac{1}{2\lambda^2} \varphi_\alpha \varphi^\alpha$, dove λ denota una costante universale (con le dimensioni di una lunghezza).

Le equazioni di campo che se ne traggono (di PROCA-YUKAWA) affermano ancora l'irrotazionalità del tensore $F_{\alpha\beta}$ e affermano che la sua divergenza è eguale a $j^\alpha + \frac{1}{\lambda^2} \varphi^\alpha$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta/\mu} = 0 \qquad F^{\alpha\beta}{}_{/\beta} = j^\alpha + \frac{1}{\lambda^2} \varphi^\alpha .$$

L'unico potenziale elettromagnetico φ^α da cui dipende a posteriori (per la condizione d'irrotazionalità) $F^{\alpha\beta}$ ubbidisce pertanto all'equazione:

$$\Box \varphi^\alpha = \frac{2}{\lambda^2} \varphi^\alpha + 2 j^\alpha .$$

Aggiungendo ai tre invarianti quadratici che intervengono nel principio variazionale che regge il campo mesonico una combinazione lineare degli altri invarianti quadratici contenenti il secondo potenziale ψ^α, si perviene in modo spontaneo a generalizzare anche il campo mesonico.

12 - Magnetofluidodinamica.

Consideriamo infine un fluido perfetto, elettricamente conduttore. La sua velocità è rappresentata nello spazio-tempo pseudoeuclideo dal vettore $w^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$, e manifestamente $w^\alpha w_\alpha = 1$; lo stato di sforzo dalla pressione p; e la densità d'energia, dovuta alla distribuzione di massa e di pressione, dallo scalare K, legato a p dall'equazione complementare $\Phi(p, K) = 0$.

Il fluido è sede di un campo elettromagnetico individuato dai campi di *due* tensori doppi emisimmetrici dello spazio-tempo, $F_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$: il primo riassume il campo spaziale elettrico e quello dell'induzione magnetica, il secondo il campo spaziale magnetico e quello dell'induzione elettrica. I due tensori coincidono nel vuoto, ma non nel fluido, dove sono legati dalla relazione:

$$F_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\varrho\sigma} f^{\varrho\sigma};$$

il tensore $C_{\alpha\beta\varrho\sigma}$ dipende con legge quadratica nota da w^α, nonchè dal coefficiente dielettrico e da quello di permeabilità magnetica. $F_{\alpha\beta}$ è poi legato alla distribuzione elettrica j_α e a w^α dall'equazione:

$$j_\alpha - j_\beta w^\beta w_\alpha = \zeta F_{\alpha\beta} w^\beta,$$

dove ζ è la conducibilità.

Le leggi elettromagnetiche, quando non c'è distribuzione elettrica, si ottengono dal seguente principio variazionale che generalizza quello stabilito nel vuoto:

$$\delta \int_\tau \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \, d\tau = 0 .$$

Per ricavarle basta esprimere $F_{\alpha\beta}$ mediante i due potenziali vettori solenoidali φ_α e ψ^ν, secondo il seguente lemma che generalizza l'analogo di quello di CLEBSCH:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha/\beta} - \varphi_{\beta/\alpha}) + C_{\varrho\sigma\alpha\beta} \, \varepsilon^{\varrho\sigma}_{\mu\nu} \, \psi^{\nu/\mu}.$$

Col solito procedimento si trova che il tensore $F_{\alpha\beta}$ è irrotazionale e il tensore $f_{\alpha\beta}$ solenoidale.

Per tener conto della distribuzione elettrica, basta aggiungere nel principio variazionale all'invariante di puro campo $\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta}$ quello di distribuzione $\varphi_\alpha j^\alpha$. Si trova così ancora che $F_{\alpha\beta}$ è irrotazionale, e che la divergenza di $f_{\alpha\beta}$ è eguale a j_α:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta/\mu} = 0 \qquad f^{\alpha\beta}{}_{/\beta} = j^\alpha .$$

Ai due precedenti invarianti aggiungiamo l'invariante $K w_\alpha w_\beta a^{\alpha\beta}$, dipendente dalla distribuzione d'energia dovuta alla massa e alla pressione, nonchè l'invariante costituito dalla pressione p. Facciamo variare nel principio variazionale non soltato i potenziali φ_α e ψ^ν, ma anche il vettore infinitesimo δS^ν da cui dipende la variazione del tensore fondamentale $a^{\alpha\beta}$, se vogliamo che lo spazio-tempo resti pseudoeuclideo. Queste variazioni siano però nulle al contorno di τ. Scrivendo che il principio variazionale è soddisfatto qualunque siano le precedenti variazioni si ottengono, oltre alle due precedenti equazioni elettromagnetiche, anche quella che afferma la solenoidalità nello spazio-tempo di un tensore doppio simmetrico $T^{\alpha\beta}$. Quest'ultimo ha per componentti i coefficienti delle variazioni $\delta a^{\alpha\beta}$, e rappresenta quindi (secondo il criterio di HILBERT) il tensore energetico totale.

Tutte le equazioni differenziali rigorose che reggono i campi meccanici ed elettromagnetici presenti nel fluido si compendiano dunque nelle seguenti tre: *il primo tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ è irrotazionale; il secondo $f_{\alpha\beta}$ ha per divergenza la distribuzione elettrica; il tensore energetico totale $T^{\alpha\beta}$ è solenoidale.* Ad esse, naturalmente, s'aggiungono le equazioni finite di condizione (1).

La magnetofluidodinamica che così si istituisce interessa l'astronomia, perchè nel Sole e nelle stelle vi sono intensi campi magnetici agenti su fluidi percorsi da correnti elettriche. ALFVÉN richiamò recentemente l'attenzione su questa circostanza. Ma più recentemente ancora l'interesse s'accrebbe, perchè l'aerodinamica ipersonica (convenzionalmente a numeri di MACH maggiori di 5) deve tener conto del fatto che il forte attrito elettrizza l'aria e i corpi che si muovono in seno ad essa, creando correnti elettriche e campi elettromagnetici. Accanto alla cosiddetta barriera del calore, si ha allora a che fare con le onde provocate dalle mutue azioni, esaltantisi a vicenda, del campo cinetico fluido sul campo elettromagnetico e di questo su quello.

Chi si occupa del rientro nell'atmosfera di missili e satelliti artificiali deve fare i conti con la magnetofluidodinamica; bene la dovrà conoscere chi, in un non lontano avvenire, l'utilizzerà per la propulsione di astronavi; e chi poi, a tal fine, non potrà trascurare gli effetti relativistici, dovrà proprio valersi delle equazioni rigorose che abbiamo ottenuto, e che sono poi, concettualmente parlando, le più semplici e le più coerenti.

---

(1) Le equazioni finite di condizione sono le quattro che esprimono: il legame fra i due tensori elettromagnetici, $F_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\varrho\sigma} f^{\varrho\sigma}$, la legge di Ohm generalizzata, $j_\alpha - j_\beta w^\beta w_\alpha = \zeta F_{\alpha\beta} w^\beta$, la $w_\alpha w^\alpha = 1$ e l'equazione complementare $\Phi(p, K) = 0$.

BIBLIOGRAFIA (1)

M. Born: *Die träge Masserund des Relativitätsprinzip*, Ann. Physik, **28** (1909), 571-584.

A. Einstein: *Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie*, Preuss. Akad. Wiss. Abh. Math.-Nat. Kl., (1916) 1111-1116 (traduzione italiana in « *Cianquanta anni di relatività* », Ed. Un., Firenze (1955), 561-566).

— —, *Il significato della relatività*, (traduzione italiana di L. A. Radicati di Brozolo), Boringhieri, Torino (1959).

B. Finzi: *Principio variazionale nella meccanica dei continui*, Acc. d'Italia, (7) **1** (1939-1940), 412-417.

— —, *Un teorema di minimo nella meccanica dei liquidi viscosi*, Atti del secondo Congresso dell'U.M.I., Bologna (1940).

— —, *Principi variazionali*, Tamburini, Milano (1949).

— —, *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che ne derivano*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., (8) **12** (1952), 373-382 e 477-480.

— — *Principio di azione stazionaria nell'elettrodinamica dei fluidi*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **50** (1960), 319-340.

D. Hilbert: *Die grundlagen der Physik*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Kl. IIa, (1915) 395-407 e (1917) 53-76; Math. Ann., **92** (1924), 1-32.

T. Levi-Civita: *Come potrebbe un conservatore giungere alla soglia della nuova meccanica*, Rend. Seminario Mat. Roma, V (1918-1919), 10-28.

— —, *Fondamenti di meccanica relativistica*, Zanichelli, Bologna, (1928).

P. Locatelli: *Sul principio di Menabrea*, Boll. Un. Mat. Ital., **2** (1940), 342.

L. Menabrea: *Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systems elastiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, **48** (1858).

A. Palatini: *Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **43** (1919), 203-212.

M. Pastori: *Il principio variazionale di Volterra e gli invarianti del campo elettromagnetico*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A., **72** (1938-39).

— —, *Principi variazionali nel campo elettromagnetico*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., (6) **29** (1939), 48-53 e 145-149.

A. M. Pratelli: *Principi variazionali del campo elettromagnetico*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **7** (1953), 161-203.

— —, *Sulla stazionarietà di significativi integrali nella meccanica dei continui*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A., **86** (1953), 714-724.

— —, *Deduzione da un'unica azione delle equazioni indefinite e di contorno dei campi gravitazionale ed elettromagnetico*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) **12** (1958), 203-221.

W. Thomson: *Collected Papers on Electricity and Magnetism*, Art. 13, London, (1872), 139-143.

— —, *On the vis-viva of a liquid in motion*, Papers, Cambridge, (1882), vol.**1**, 107.

---

(1) Mi limito a dare qualche cenno bibliografico riguardante principi variazionali che reggono campi fisici.

C. VENINI: *Deduzione variazionale delle equazioni dell'elettrodinamica dei fluidi nello spazio-tempo riemanniano*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A., **94** (1960), 632-641.

T. VOGEL: *Physique mathématique classique*, Paris, Colin (1956).

V. VOLTERRA: *Le calcul des variations, son evolution e son progrés, son rôle dans la physique mathématique*, Praha-Brno, (1932).

H. WEYL: *Raum, Zeit, Materie*, 5 Aufl., Springer, Berlin, (1923).