

GIOVANNI BASILE (*)

**Valori critici del moto vibratorio del binario
percorso da un carico inerte
a cui è collegata una massa eccentrica rotante. (**)**

1. - Introduzione.

Il binario deve quasi esclusivamente alla quotidiana, diretta esperienza quelle modifiche e quei perfezionamenti che l'hanno portato all'attuale stato di stabilità e di sicurezza.

È evidente che la velocità influisce sulla stabilità della rotaia se questa, stabile sotto un determinato carico in quiete, diventa instabile non appena lo stesso carico, messo in movimento, la percorre con una certa velocità, definita perciò *critica*. Sorge così la teoria della Dinamica del Binario, alla quale hanno dato contributi fondamentali S. TIMOSHENKO [1] e G. KRALL [2].

I valori della *velocità critica*, con coerenza determinati dal TIMOSHENKO e dal KRALL, risultano però di gran lunga superiori (oltre i 1.000 Km h^{-1}) a quelli effettivamente raggiungibili (200-250 Km h^{-1}). È logico pensare che altre influenze si destino durante il moto e vengano esaltate dalla velocità, quali quella dell'inerzia, del molleggio, dell'armonicità del carico.

Il KRALL [3] ha dimostrato, per una soluzione stazionaria, che *l'effetto del carico solitario sulla velocità critica risulta nullo*.

Il caso di un carico molleggiato è stato considerato da A. RUELLE [4] e quello d'un carico semimolleggiato da T. MANACORDA [5]. Infine, R. BALDACCINI [6] ha risolto il problema del moto del binario di lunghezza finita percorso da un carico armonico ed ha esteso poi, mediante un passaggio al limite, i risultati al binario di lunghezza infinita.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico - Università - Modena.

(**) Ricevuto il 27 Ottobre 1960.

Le *velocità critiche* determinate nei vari casi, pur risultando inferiori a quella data dal KRALL, sono ancora molto elevate.

Nell'intento di proseguire le ricerche esistenti, in particolare quelle citate del KRALL, nella presente Nota si studia il moto vibratorio del binario di lunghezza infinita percorso da una massa inerte a cui è collegata una massa eccentrica rotante e si ottiene una soluzione

per la quale è manifesta l'eccezionale influenza dell'inerzia della massa, per effetto della pulsazione, sul valore critico della velocità.

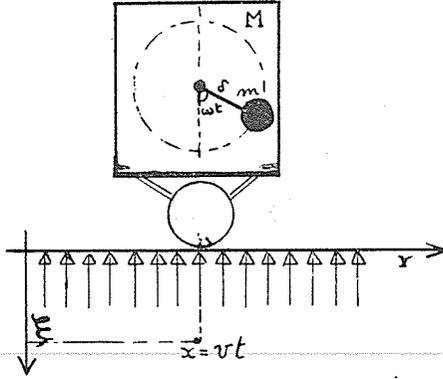


Fig. 1.

2. - Si consideri un'armatura di massa M , mantenuta, mediante qualche dispositivo, di orientamento invariabile, poggiata in un punto Q di una rotaia di lunghezza infinita corrente su suolo elastico continuo (Ballast) e mobile su di essa con velocità costante v . Intorno

ad un asse orizzontale, sull'armatura, ruota una massa eccentrica m con velocità angolare ω costante. Al fine di determinare l'azione Φ del carico concentrato in Q sulla rotaia, si scrive l'equazione del moto del baricentro

$$(1) \quad (M + m) a_G = (M + m) g + \Phi$$

Per qualsiasi tipo d'armamento, si schematizza la rotaia in un'asta infinitamente lunga coincidente ad un asse x e si considerano i soli spostamenti ξ nel piano normale a quello d'appoggio, contati a partire dalla posizione di riposo dell'asta (fig. 1).

L'elasticità sia così definita che allo spostamento ξ dell'area d'appoggio corrispondente a $\Delta x = 1$ si oppone una reazione elastica $-\beta\xi$ indipendente da ogni spostamento di x .

L'equazione del moto si scrive, sotto ben note ipotesi:

$$(2) \quad R \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \beta \xi = 0$$

essendo $R = EJ$ la flesso-rigidezza, con E modulo costante d'elasticità della rotaia e J il suo momento d'inerzia costante; μ la massa media per unità di lunghezza, ottenuta dividendo per g il peso medio; $\beta = \gamma s$, con γ costante d'elasticità del suolo d'appoggio ed s l'area d'appoggio per unità di lunghezza.

Si vuole determinare una soluzione del tipo:

$$(3) \quad \xi(x, t) = \varphi(x - vt) \sin \omega t + \psi(x - vt) \cos \omega t + w(x - vt)$$

che si presenti cioè come la somma di una soluzione stazionaria rispetto ad un osservatore viaggiante col carico e di una soluzione periodica di periodo uguale a quello della componente armonica del carico.

La $w(x - vt)$ è da aggiungersi linearmente nella (3) ed è la soluzione già determinata dal KRALL [7]. Considero quindi la funzione

$$(3') \quad W(x, t) = \varphi(z) \sin \omega t + \psi(z) \cos \omega t \quad \text{con} \quad z = x - vt.$$

Sostituendo quest'ultima nella (2) si ha

$$\begin{aligned} [R\varphi^{IV} + \mu v^2 \varphi'' + 2\mu v \omega \varphi' + (\beta - \mu \omega^2) \varphi] \sin \omega t + \\ + [R\psi^{IV} + \mu v^2 \psi'' - 2\mu v \omega \psi' + (\beta - \mu \omega^2) \psi] \cos \omega t = 0 \end{aligned}$$

che, dovendo essere verificata per qualunque valore di t , porge

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi^{IV} + \frac{\mu v^2}{R} \varphi'' + 2 \frac{\mu \omega v}{R} \varphi' + \frac{\beta - \mu \omega^2}{R} \varphi = 0 \\ \psi^{IV} + \frac{\mu v^2}{R} \psi'' - 2 \frac{\mu \omega v}{R} \psi' + \frac{\beta - \mu \omega^2}{R} \psi = 0. \end{cases}$$

Le $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ devono soddisfare al sistema differenziale (4) che risolvo ponendo: $\varphi(z) = Ae^{\alpha z}$; $\psi(z) = Be^{\alpha z}$.

Si ottiene il sistema omogeneo nelle incognite A e B

$$(5) \quad \begin{cases} \left(\alpha^4 + \frac{\mu v^2 \alpha^2}{R} + \frac{\beta - \mu \omega^2}{R} \right) A + \frac{2\mu \omega v \alpha}{R} B = 0 \\ -\frac{2\mu \omega v \alpha}{R} A + \left(\alpha^4 + \frac{\mu v^2 \alpha^2}{R} + \frac{\beta - \mu \omega^2}{R} \right) B = 0 \end{cases}$$

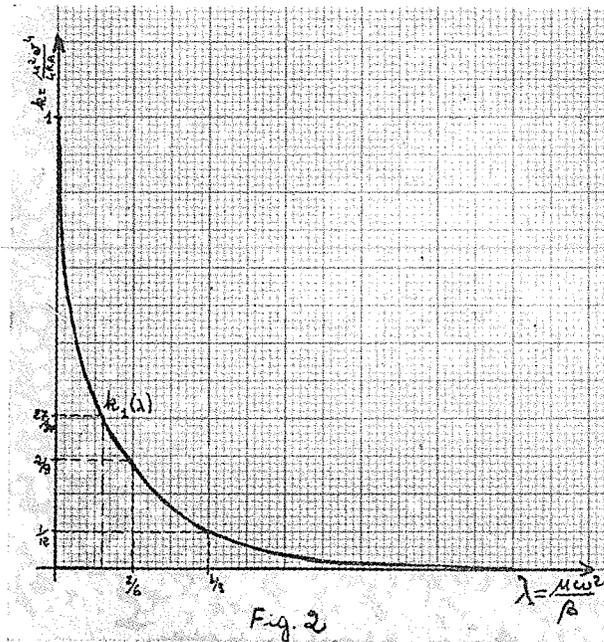
che ammette soluzioni per valori non tutti nulli delle incognite se

$$(6) \quad \left(\alpha^4 + \frac{\mu v^2 \alpha^2}{R} + \frac{\beta - \mu \omega^2}{R} \right)^2 + \frac{4\mu^2 \omega^2 v^2 \alpha^2}{R^2} = 0$$

equivalente a

$$(6') \quad \alpha^4 + \frac{\mu v^2 \alpha^2}{R} + \frac{\beta - \mu \omega^2}{R} = \pm \frac{2i\mu\omega v \alpha}{R}$$

dalle quali si deduce che $A = \pm iB$, ossia che per ogni α soddisfacente alle (6') e quindi alla (6), le funzioni corrispondenti $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ sono legate dalla relazione $\varphi(z) = \pm i\psi(z)$, prendendo i segni nello stesso ordine delle (6').



Si osservi, inoltre, che mediante la sostituzione $\alpha = i\eta$ le (6') forniscono le due equazioni a coefficienti reali nella variabile η

$$(7) \quad \eta^4 - \frac{\mu v^2}{R} \eta^2 \pm \frac{2\mu\omega v}{R} \eta + \frac{\beta - \mu\omega^2}{R} = 0.$$

le (7) differiscono tra loro per il segno del coefficiente del termine lineare, quindi le soluzioni dell'una sono le opposte di quelle dell'altra. È sufficiente perciò discutere e risolvere una delle equazioni, per esempio la prima, che può scriversi:

$$(8) \quad \eta^4 - 2\sqrt{bk} \eta^2 + 2\sqrt{2} \sqrt{b^3 k \lambda^2} \eta + b(1 - \lambda) = 0$$

avendo posto

$$(9) \quad \lambda = \frac{\mu\omega^2}{\beta}, \quad k = \frac{\mu^2 v^4}{4R\beta}, \quad b = \frac{\beta}{R}.$$

3. - Ricavando dalla seconda delle (9) v in funzione di k si ha $v = \sqrt[4]{\frac{4kR\beta}{\mu^2}}$; considerato che per un treno rigido di carichi mobili, secondo i risultati dati dal KRALL, si ha instabilità per $v = \sqrt[4]{\frac{4R\beta}{\mu^2}}$ possiamo limitarci a considerare il caso $0 \leq k \leq 1$.

Il discriminante della (8) è:

$$\Delta = 256 b^3 \left[k^2 + \frac{1}{4} (\lambda^2 - 20 \lambda - 8) + (1 - \lambda)^3 \right]$$

e quindi $\Delta \geq 0$ secondochè

$$(10) \quad k^2 + \frac{1}{4} (\lambda^2 - 20 \lambda - 8) + (1 - \lambda)^3 \geq 0.$$

Il primo membro della (10), per valori di k dell'intervallo (0,1), ammette lo zero

$$(10') \quad k_1 = \frac{1}{8} [(8 + 20 \lambda - \lambda^2) - \sqrt{\lambda(\lambda + 8)^3}]$$

di cui si dà, in fig. 2, la rappresentazione grafica in funzione di λ .

Facili calcoli e semplici considerazioni portano a concludere che $\Delta \geq 0$ per $0 \leq k \leq k_1$, quando è $0 \leq \lambda \leq 1$, ed allora la (8) porge quattro soluzioni complesse e coniugate. Questo è il caso più interessante dal punto di vista applicativo; infatti la limitazione $\lambda \leq 1$, per la prima delle (9), equivale a $\omega \leq \sqrt{\frac{\beta}{\mu}}$, ossia si prendono in considerazione valori di ω non maggiori di quello che comporta il caso della risonanza.

Mancando la (8) del termine di terzo grado, la somma delle sue soluzioni è nulla e quindi la parte reale di una coppia di soluzioni complesse e coniugate è l'opposta di quella dell'altra. Indicata con σ_1 la parte reale positiva e con ρ_1

e ρ_2 i coefficienti positivi dell'unità immaginaria, $i = \sqrt{-1}$, le soluzioni delle (7) sono:

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= \sigma_1 + i\rho_1; & \bar{\eta}_{11} &= \sigma_1 - i\rho_1; & \eta_{12} &= -\sigma_1 + i\rho_2; & \bar{\eta}_{12} &= -\sigma_1 - i\rho_2 \\ \eta_{21} &= -\sigma_1 + i\rho_1; & \bar{\eta}_{21} &= -\sigma_1 - i\rho_1; & \eta_{22} &= \sigma_1 + i\rho_2; & \bar{\eta}_{22} &= \sigma_1 - i\rho_2 \end{aligned}$$

Infine, le soluzioni delle (6'), ossia quelle della (6) sono:

$$(11) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \rho_1 + i\sigma_1; & \bar{\alpha}_2 &= \rho_2 - i\sigma_1; & \bar{\alpha}_3 &= -\bar{\alpha}_1; & \alpha_4 &= -\alpha_2 \text{ per le quali } \varphi = i\psi \\ \bar{\alpha}_1 &= \rho_1 - i\sigma_1; & \alpha_2 &= \rho_2 + i\sigma_1; & \alpha_3 &= -\alpha_1; & \bar{\alpha}_4 &= -\bar{\alpha}_2 \text{ per le quali } \varphi = -i\psi. \end{aligned}$$

4. - Il sistema (4) va integrato con la condizione che sia $\xi(x, t) = 0$ per $x - vt = \pm \infty$ e che sotto al carico, cioè in $x = vt$, vi sia raccordo della linea elastica. Quest'ultima condizione, data la simmetria della $w(z)$, dove $z = x - vt$, è espressa da

$$\begin{aligned} 1) \quad W_+(vt, t) &= W_-(vt); & 2) \quad W'_+(vt, t) &= W'_-(vt, t); \\ 3) \quad W''_+(vt, t) &= W''_-(vt, t); \end{aligned}$$

Inoltre, la discontinuità dello sforzo di taglio attraverso il punto $x - vt = z = 0$, per la (1), comporta la condizione

$$4) \quad R\xi''' \Big|_{vt_-}^{vt_+} = P - (M + m) \left[\frac{d^2 \xi}{dt^2} \right]_{x=vt} + m\delta\omega^2 \cos \omega t$$

dove P è il carico concentrato avente la massa $P/g = (M + m)$ e δ l'eccentricità della massa rotante m .

Se $a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, a_3, \bar{a}_3, a_4, \bar{a}_4$ sono otto costanti a due a due complesse e coniugate, l'integrale generale della (2), del tipo (3') è

$$\begin{aligned} W(x, t) &= (a_1 e^{\lambda_1 z} + \bar{a}_1 e^{\bar{\lambda}_1 z} + a_2 e^{\lambda_2 z} + \bar{a}_2 e^{\bar{\lambda}_2 z} + a_3 e^{-\lambda_1 z} + \\ &+ \bar{a}_3 e^{-\bar{\lambda}_1 z} + a_4 e^{-\lambda_2 z} + \bar{a}_4 e^{-\bar{\lambda}_2 z}) \cos \omega t + i (a_1 e^{\lambda_1 z} - \bar{a}_1 e^{\bar{\lambda}_1 z} - a_2 e^{\lambda_2 z} + \\ &+ \bar{a}_2 e^{\bar{\lambda}_2 z} - a_3 e^{-\lambda_1 z} + \bar{a}_3 e^{-\bar{\lambda}_1 z} + a_4 e^{-\lambda_2 z} - \bar{a}_4 e^{-\bar{\lambda}_2 z}) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Le costanti devono essere valutate in conformità alle prescritte condizioni.

La condizione $W(-\infty) = 0$ porge $a_3 = \bar{a}_3 = a_4 = \bar{a}_4 = 0$ e quindi

$$W_-(x, t) = (a_1 e^{\alpha_1 z} + \bar{a}_1 e^{\bar{\alpha}_1 z} + a_2 e^{\alpha_2 z} + \bar{a}_2 e^{\bar{\alpha}_2 z}) \cos \omega t + \\ + i (a_1 e^{\alpha_1 z} - \bar{a}_1 e^{\bar{\alpha}_1 z} - a_2 e^{\alpha_2 z} + \bar{a}_2 e^{\bar{\alpha}_2 z}) \sin \omega t$$

mentre per $W(+\infty) = 0$ deve essere $a_1 = \bar{a}_1 = a_2 = \bar{a}_2 = 0$ e perciò

$$W_+(x, t) = (a_3 e^{-\alpha_3 z} + \bar{a}_3 e^{-\bar{\alpha}_3 z} + a_4 e^{-\alpha_4 z} + \bar{a}_4 e^{-\bar{\alpha}_4 z}) \cos \omega t - \\ - i (a_3 e^{-\alpha_3 z} - \bar{a}_3 e^{-\bar{\alpha}_3 z} - a_4 e^{-\alpha_4 z} + \bar{a}_4 e^{-\bar{\alpha}_4 z}) \sin \omega t$$

Le condizioni 1), 2), 3), 4) conducono ad un sistema lineare di otto equazioni nelle otto incognite a_r, \bar{a}_r ($r = 1, 2, 3, 4$) del tipo di Kramer che, con ovvie semplificazioni, può ridursi al seguente:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3 - a_4 = 0 \\ \alpha_1 a_1 + \bar{\alpha}_2 \bar{a}_2 + \bar{\alpha}_1 \bar{a}_3 + \alpha_2 a_4 = 0 \\ \alpha_1^2 a_1 + \bar{\alpha}_2^2 \bar{a}_2 - \bar{\alpha}_1^2 \bar{a}_3 - \alpha_2^2 a_4 = 0 \\ R\alpha_1^3 a_1 + R\bar{\alpha}_2^3 \bar{a}_2 + (\mathcal{D})\mathcal{C}\omega^2 + R\bar{\alpha}_1^3 \bar{a}_3 + (\mathcal{D})\mathcal{C}\omega^2 + R\alpha_2^3 a_4 = -\frac{m\delta\omega^2}{2} \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{D}\mathcal{C} = (M + m)$.

La risoluzione del sistema (12) fornisce i valori:

$$a_1 = a_3 = -\frac{2m\delta\omega^2}{D} \varrho_2 \sigma_1 (\varepsilon_1 + i\varrho_1); \quad \bar{a}_1 = \bar{a}_3 = -\frac{2m\delta\omega^2}{D} \varrho_2 \sigma_1 (\varepsilon_1 - i\varrho_1)$$

$$a_2 = a_4 = -\frac{2m\delta\omega^2}{D} \varrho_2 \sigma_1 (\varepsilon_2 + i\varrho_2); \quad \bar{a}_2 = \bar{a}_4 = -\frac{2m\delta\omega^2}{D} \varrho_2 \sigma_1 (\varepsilon_2 - i\varrho_2)$$

dove $D, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, rappresentano

$$D = [(\varrho_1 - \varrho_2)^2 + 4\sigma_1^2] \{ (\varrho_1 + \varrho_2) \mathcal{D}\mathcal{C}\omega^2 - 2R \varrho_1 \varrho_2 [(\varrho_1 + \varrho_2)^2 + 4\sigma_1^2] \}$$

$$\varepsilon_1 = \sigma_1 - \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{4\sigma_1}; \quad \varepsilon_2 = \sigma_1 + \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{4\sigma_1}$$

La soluzione cercata, $W(x, t)$, è quindi, limitandoci a scriverla per il solo intervallo $0 \leq z \leq \infty$:

$$(13) \quad W_+(x, t) = -\frac{4m\delta\omega^2}{D} \varrho_1 \varrho_2 \sigma_1 \left\{ e^{-\varrho_1 z} \left[\frac{\varepsilon_1}{\varrho_1} \cos(\sigma_1 z + \omega t) + \sin(\sigma_1 z + \omega t) \right] + e^{-\varrho_2 z} \left[\frac{\varepsilon_2}{\varrho_2} \cos(\sigma_1 z - \omega t) + \sin(\sigma_1 z - \omega t) \right] \right\}$$

Si osservi che, per $D \neq 0$, $W(x, t)$ si annulla identicamente per $\omega = 0$, e in generale quando $m\delta\omega^2$ tende a zero, ed in tal caso $\xi(x, t) = W(x, t) + v(z)$ si riduce alla ben nota soluzione data in [3]. Inoltre, se si trascura l'inerzia del carico, quando $\omega \neq 0$, si ottiene, per altra via, l'espressione data in [6].

5. - Passiamo ora all'analisi dei valori critici, trascurando ormai il caso, già esaminato, $\omega = 0$.

La rotaia diventa instabile al tendere all'infinito dell'inflessione $\xi(x, t)$ sotto al carico. Nel nostro caso, posto nella (13) $z = 0$, i valori critici, per $\omega \neq 0$, sono dati da:

$$(14) \quad (\varrho_1 + \varrho_2) \mathfrak{D}\mathfrak{C}\omega^2 - 2R \varrho_1 \varrho_2 [(\varrho_1 + \varrho_2)^2 + 4\sigma_1^2] = 0.$$

La (14), essendo funzione di $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$, v , ω , fissate due di queste grandezze, ci permette di ricavare il valore critico della rimanente.

Si rilevi, inoltre, che nella (14) non figura il rapporto m/M , fra la massa eccentrica rotante e quella inerte a cui la prima è collegata, ma solo la massa totale $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$. I valori critici, pertanto, non dipendono dal rapporto fra m ed M , ma solo dalla loro somma $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$; ciò anche se m è relativamente molto piccolo (purchè non trascurabile) nei confronti di M . È evidente la particolare importanza di questa osservazione che permette di stabilire la preponderante influenza del carico non pulsante sul valore critico della velocità.

Risolta la (8), per via trigonometrica, si ottengono per ϱ_1 , ϱ_2 e σ_1 i valori:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho_1 = \sqrt{\frac{b}{9}} \left[\sqrt{c_2 \sqrt{H} - \sqrt{k}} + \sqrt{c_3 \sqrt{H} - \sqrt{k}} \right] \\ \varrho_2 = \sqrt{\frac{b}{9}} \left[\sqrt{c_2 \sqrt{H} - \sqrt{k}} - \sqrt{c_3 \sqrt{H} - \sqrt{k}} \right] \\ \sigma_1 = \sqrt{\frac{b}{9}} \sqrt{c_1 \sqrt{H} + \sqrt{k}} \end{array} \right.$$

avendo posto $H = k + 3(1 - \lambda)$; $G = 9(\lambda + 2) - 2k$; $\cos \theta = \frac{\sqrt{k} \cdot G}{2H\sqrt{H}}$

$$c_1 = \cos \frac{\theta}{3}; \quad c_2 = -\cos \frac{\theta + 2\pi}{3}; \quad c_3 = -\cos \frac{\theta + 4\pi}{3}$$

Sostituendo le (15) nella (14) si ottiene l'espressione

$$(16) \quad \omega^2 \sqrt{c_2 \sqrt{H} - \sqrt{k}} \cdot \mathfrak{D}\zeta - 4R \sqrt{(b/9)^3} \cdot (c_1 + c_2) \cdot (c_2 - c_3) \cdot H = 0$$

che permette di determinare, in termini espliciti, i valori critici.

6. - Esaminiamo alcuni casi particolari:

a) Se si trascura l'inerzia della massa, ossia per $\mathfrak{D}\zeta = 0$, e si considera nullo il moto di trascinamento, cioè per $v = 0$, la (16) si riduce ad un'equazione nella sola incognita ω che ammette la soluzione $\omega_{cr} = \sqrt{\frac{\beta}{\mu}}$; questo è il caso d'instabilità per effetto della risonanza.

b) Ancora per $\mathfrak{D}\zeta = 0$, ma con $v \neq 0$, la (16), essendo H , nel caso in esame, una quantità mai nulla, è verificata per $c_2 = c_3$, ossia, come si può constatare con semplici calcoli, dove si annulla la (10). Lo zero k_1 di quest'ultima, espresso dalla (10') in funzione di λ , ci permette di ricavare, tenendo presenti le (9), che esprimono la proporzionalità, rispettivamente, tra k , λ e v^4 , ω^2 , l'espressione della velocità critica in funzione della pulsazione, quando è $\omega < \sqrt{\frac{\beta}{\mu}}$ ossia

$$v_{cr} = \sqrt[4]{\frac{R}{2\beta\mu^2} [8\beta^2 + 20\mu\beta\omega^2 - \mu^2\omega^4 - \sqrt{\mu\omega^2(\mu\omega^2 + 8\beta)^3}]}$$

Dalla fig. 2, inoltre, risulta evidente l'influenza della pulsazione sulla velocità critica, tale che questa decresce sensibilmente al crescere della prima.

7. - I casi particolari finora esaminati, nei quali s'è trascurato l'inerzia del carico, hanno interesse puramente speculativo, risultando quei valori critici di gran lunga superiori a quelli effettivamente realizzabili; non appena, però, si prende in considerazione l'inerzia della massa cioè per $\mathfrak{D}\zeta \neq 0$, essi si riducono ad ordini di grandezza aderenti alla realtà.

Consideriamo, infatti, il caso generale in cui $\mathfrak{D}\zeta$, v , ω sono tutti non nulli. Volendo determinare, qualitativamente e quantitativamente, l'influenza dell'inerzia della massa e della pulsazione sul valore della velocità critica, la via

più naturale sarebbe quella di risolvere la (16) esprimendo v in funzione di $\mathfrak{D}\mathfrak{L}$ e ω . In ciò si è però ostacolati dalla complessità e difficoltà di calcolo, mentre già dalla espressione formale (14) appare evidente quanto sia agevole determinare il valore critico $\mathfrak{D}\mathfrak{L}_{cr}$. Ricaviamo, pertanto, questo valore dalla (16) ed otteniamo

$$(17) \quad \mathfrak{D}\mathfrak{L}_{cr} = \frac{4R \sqrt[4]{\left(\frac{b}{9}\right)^3} \cdot H \cdot (c_1 + c_2) (c_2 - c_3)}{\omega^2 \sqrt{c_2} \sqrt{H} - \sqrt{k}}$$

Soffermandosi brevemente a discutere la (17), si osserva che $\mathfrak{D}\mathfrak{L}_{cr}$ è sempre finita ed è nulla solo nei casi *a*) e *b*) in precedenza esaminati; risulta, inoltre, funzione decrescente al crescere e di v e di ω .

Al fine di rendere apprezzabili gli ordini di grandezza cui si riducono i valori critici nel caso studiato, si è considerata, in particolare, una rotaia F.S. 50, le cui grandezze geometriche ed elastiche risultano [8]:

$$J = 1894 \text{ cm}^4; \quad E = 2,1 \times 10^6 \text{ Kg} \cdot \text{cm}^{-2}; \quad \mu = 519 \times 10^{-6} \text{ Kg} \cdot \text{cm}^{-2} \text{ sec}^2;$$

e si è assunto per β il valore $\beta = 150 \text{ Kg} \cdot \text{cm}^{-2}$, accettabile, in media, per un armamento in condizioni normali di posa. Attribuiti ad ω e a v alcuni valori particolari, mediante la (17) si sono calcolati i corrispondenti valori critici del carico $P = \mathfrak{D}\mathfrak{L}_{cr} \cdot g$, espressi in Kg; qui di seguito sono riportati alcuni valori:

Con $v = 150 \text{ Km} \cdot \text{h}^{-1}$,	$\omega = 33 \text{ sec}^{-1}$	si ricava	$P \cong 15.750 \text{ Kg}$
» $v = 200 \text{ Km} \cdot \text{h}^{-1}$,	$\omega = 41 \text{ sec}^{-1}$	»	$P \cong 10.180 \text{ Kg}$
» $v = 250 \text{ Km} \cdot \text{h}^{-1}$,	$\omega = 50 \text{ sec}^{-1}$	»	$P \cong 6.815 \text{ Kg}$
» $v = 300 \text{ Km} \cdot \text{h}^{-1}$,	$\omega = 60 \text{ sec}^{-1}$	»	$P \cong 4.710 \text{ Kg}$

Da questi, oltre all'aderenza alla realtà degli ordini di grandezza, si rileva l'importanza della pulsazione, che *esalta l'influenza della massa non pulsante sulla velocità critica*; influenza che è palesemente eccezionale.

Il molleggio del carico dovrebbe, però, attenuare l'effetto ora segnalato, come già osservato dal KRALL [9].

Riferimenti bibliografici.

- [1] S. TIMOSHENKO, *Method of Analysis of Statistical and Dynamical Stresses in Rails*, « Proc. of the 2nd Int. Congr. for A ppl. Mech », Zürich, (1926), 407.
- [2] G. KRALL, *Velocità critiche di masse pesanti su di un binario*, Atti Accad. Naz. dei Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., (6), 12, (1930), pp. 510-514.
- [3] G. KRALL, *Sul problema centrale della dinamica dei ponti*, « Rend. Acc. dei Lincei », (8) 19, 373-381 (1955).
- [4] A. RUELLE, *Condizioni critiche del binario percorso da un carico molleggiato*, Atti dell'Ist. di Sc. delle Costr., n. 6, Pisa, 1948.
- [5] T. MANACORDA, *Sulla determinazione della velocità critica per un binario percorso con moto uniforme da un carico semimolleggiato*, Ricerca Sci. (1950) 667.
- [6] R. BALDACCI, *Sul moto vibratorio del binario percorso da un carico armonico*, Atti dell'Ist. di Sc. delle Costr., n. 17, Pisa (1950).
- [7] G. KRALL, Loc. citata in [3].
- [8] R. BALDACCI, *Influenza dello sforzo di taglio nello stato di sollecitazione dinamica di una rotaia*, « Ingegneria Ferroviaria » n. 5, (1947), 205.
- [9] G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, v. II, p. 358, Zanichelli, Bologna, (1940).

