Riv. Mat. Univ. Parma (2) 1 (1960), 107-122

MARIO CURZIO (*)

Sugli automorfismi uniformi nei gruppi a condizione minimale. (**)

Un automorfismo φ d'un gruppo G dicesi *senza coincidenze* se l'essere:

$$x^{\varphi} = x \qquad (x \in G)$$

implica: $x = 1$ ove, 1 è l'unità di G.

Un notevole teorema del THOMPSON assicura che:

Un gruppo finito dotato d'un automorfismo d'ordine primo e senza coincidenze, è un gruppo speciale.

Nel 1958 G. ZAPPA [1] (1) ha dato un significativo esempio di gruppo infinito risolubile e non speciale, possedente un automorfismo d'ordine primo e senza coincidenze. Lo stesso ZAPPA ha notato che se G è un gruppo finito, un automorfismo φ è senza coincidenze se, e solo se, è *uniforme*, vale a dire se, e solo se, l'applicazione:

$$\vartheta(x) = x^{-1}\, x^{\varphi} \qquad (x \in G)$$

porta G su tutto G. Invece, nel caso di gruppi infiniti, esistono automorfismi senza coincidenze che non sono uniformi (ad esempio si considerino un gruppo

(*) Indirizzo: Itituto di Matematica, Università, Napoli (Italia).

(**) Ricevuto il 21-5-1960.

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta alla fine del lavoro.

ciclico infinito ed il suo automorfismo non identico). Ancora ZAPPA ha riconosciuto che:

Un gruppo risolubile a condizione massimale è certamente speciale quando possiede un automorfismo uniforme d'ordine primo.

Quanto sopra detto mostra che, cercando di estendere il teorema di THOMPSON ai gruppi infiniti, sembra conveniente considerare automorfismi uniformi in luogo di automorfismi senza coincidenze. In questo ordine di idee ho riconosciuto valido il teorema di THOMPSON per i gruppi a *condizione minimale* godenti d'una qualunque delle proprietà seguenti:

(a) *Gruppi aventi un aggiunto a derivato finito.*

(b) *Gruppi di cui ogni classe completa di elementi coniugati ha ordine finito.*

(c) *Gruppi risolubili ed a sottogruppo di* FRATTINI *finito.*

(d) *Gruppi risolubili generati dalle loro serie di* LEVI.

Indi, dopo aver costruito un esempio di gruppo infinito possedente un automorfismo uniforme ma non privo di coincidenze, provo che:

Un gruppo risolubile di torsione dotato d'un automorfismo d'ordine primo p e senza coincidenze, è un gruppo speciale di classe $\leqslant k(p)$, essendo $k(p)$ un intero che è funzione di p.

Quest'ultimo risultato poggia essenzialmente su considerazioni dovute a G. HIGMAN [2].

Infine, dimostro come per i gruppi risolubili di torsione riesca valido un teorema di B. H. NEUMANN [3].

1. – Ricordiamo che:

DEFINIZIONE I. Un automorfismo φ d'un gruppo G dicesi *uniforme* se G è portato su tutto se stesso dall'applicazione:

$$\vartheta(x) = x^{-1}\, x^{\varphi} \qquad (x \in G)\,.$$

DEFINIZIONE II. Sia Σ un insieme di sottogruppi d'un gruppo G. Dicesi che G è a *condizione minimale per i Σ-sottogruppi* (sottogruppi appartenenti a Σ) se ogni catena discendente:

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_n \supseteq \ldots \qquad (G_i \in \Sigma)$$

possiede solo un numero finito di termini distinti.

LEMMA I. *Sia φ un automorfismo uniforme d'un gruppo G e si dica N un sottogruppo normale di G. Se φ applica N su tutto N, φ induce su G/N un automorfismo uniforme.*

LEMMA II. *Sia G un gruppo dotato d'un automorfismo uniforme φ di periodo finito r. Si ha:*

$$x\, x^{\varphi}\, x^{\varphi^2} \dots x^{\varphi^{r-1}} = 1 \qquad (x \in G)\,.$$

Il *Lemma* I è dovuto a ZAPPA [1]; il *Lemma* II, provato da ZAPPA [4] nel caso finito, si estende facilmente ai gruppi infiniti.

Ricordiamo ancora che:

TEOREMA DI THOMPSON. *Un gruppo finito dotato di un automorfismo uniforme d'ordine primo, è un gruppo speciale.*

2. – In questo numero vengono dimostrati alcuni teoremi di cui si è detto nell'introduzione e, a questo scopo, si riterrà valido ogni volta che occorra, il principio di Zermelo.

Ciò premesso si ha:

LEMMA III. *Sia Σ la famiglia di sottogruppi di G aventi indice finito ed ammissibili per tutti gli operatori appartenenti ad un dato insieme Ω. Se G è a condizione minimale per i Σ-sottogruppi, appartiene a Σ l'intersezione I di tutti i Σ-sottogruppi.*

Dimostrazione. Nelle ipotesi poste, esiste una sottogruppo $V \in \Sigma$ e tale che l'essere:

$$N \subseteq V \qquad (N \in \Sigma)$$

implichi: $N = V$. Infatti, negando la tesi, supponiamo che nessun $M \in \Sigma$ goda della proprietà occorsa per definire V. Allora, esisterà un sottogruppo $R \in \Sigma$ e contenuto propriamente in M, esisterà un Σ-sottogruppo S contenuto propriamente in R, etc. ... La catena discendente:

$$M \supset R \supset S \supset \dots$$

ammette per ipotesi un elemento minimo T. Sicchè T, contro l'ipotesi, gode della proprietà occorsa per definire V. Questo assurdo prova l'esistenza d'un sottogruppo V.

Sia ora $X \in \Sigma$. È ben noto che $X \cap V$ ha indice finito in G ed è evidente che $X \cap V$ è ammissibile per ogni operatore appartenente ad Ω. Perciò: $X \cap V \in \Sigma$.

Avendosi $X \cap V \subseteq V$, è, per la definizione di V, $X \cap V = V$; onde $V \subseteq X$. Per l'arbitrarietà di X è allora: $V \subseteq I$. Ma, giacchè: $I \subseteq V$, si ha $V = I$ e l'asserto è provato.

LEMMA IV. *Se G è a condizione minimale per i sottogruppi, l'intersezione di tutti i sottogruppi di G, aventi indice finito, ha indice finito.*

Dimostrazione. Nelle ipotesi del *Lemma* precedente siano: Ω l'insieme costituito dal solo automorfismo identico di G, Σ la fmiglia di tutti i sottogruppi di G aventi indice finito. Con ciò, il *Lemma* IV è dimostrato.

LEMMA V. *Sia G un gruppo a condizione minimale per i sottogruppi normali. Se G è dotato d'un automorfismo uniforme φ d'ordine primo, ogni immagine omomorfa finita G' di G, è un gruppo speciale.*

Dimostrazione. Sia N il sottogruppo normale di G per cui G/N risulta isomorfo a G'. Nel *Lemma* III si identifichi Ω con l'insieme degli automorfismi interni di G; allora, ha indice finito in G l'intersezione I dei sottogruppi normali di G aventi indice finito. Poichè: $N \supseteq I$, si ha:

$$\frac{G}{N} \simeq \frac{\frac{G}{I}}{\frac{N}{I}}. \tag{1}$$

Il sottogruppo I è caratteristico e perciò φ applica I su tutto I; perciò a norma del *Lemma* I, G/I, è dotato d'un automorfismo uniforme che ha lo stesso periodo di φ. Essendo G/I finito, G/I è speciale sussistendo il *Teorema di* THOMPSON. Per la (1) G', isomorfo a G/N, è una immagine omomorfa di G/I; dunque G' è speciale al pari di G/I.

Siamo ora in grado di provare i seguenti:

TEOREMA I. *Sia G un gruppo a condizione minimale dotato di un automorfismo uniforme φ di periodo primo r. Se ogni elemento non identico di G ha ordine primo con r, è speciale il sottogruppo* (2) *Γ di G costituito dagli elementi aventi ciascuno solo un numero finito di coniugati.*

(2) Siano A e B gli insiemi costituiti dagli elementi coniugati rispettivamente ad $a \in A$ e $b \in B$. Un coniugato di ab è del tipo $x^{-1}(ab)\,x = (x^{-1}\,ax)\,(x^{-1}\,bx)$ onde i coniugati di ab riempiono un sotto insieme del sistema $A \cdot B$. Ne segue che se A e B sono finiti, ab possiede solo un numero finito di coniugati. Da ciò discende facilmente che Γ è un sottogruppo di G.

Dimostrazione. Proviamo che:

(α) *Γ è dotato di un automorfismo uniforme ψ avente ordine r.*

Detto g un elemento di Γ, esisterà, in G un elemento x tale che:

$$g = x^{-1} x^{\varphi}.$$

Poichè Γ è normale in G e poichè:

$$x^{\varphi} x^{-1} = x (x^{-1} x^{\varphi}) x^{-1},$$

si ha:

$$x^{\varphi} x^{-1} \in \Gamma. \tag{2}$$

Risulta:

$$[x^{\varphi} x^{-1}]^{\varphi^{r-1}} = x^{\varphi^r} (x^{-1})^{\varphi^{r-1}} = x (x^{\varphi^{r-1}})^{-1}$$

onde, valendo la (2) ed essendo Γ φ^{r-1}-ammissibile:

$$x^{\varphi} (x^{\varphi^{r-1}})^{-} \in \Gamma. \tag{3}$$

Per le (2) e le (3):

$$x^{\varphi} (x^{-1})^{\varphi^{r-1}} = [x^{\varphi} x^{-1}] [x(x^{\varphi^{r-1}})^{-1}] \in \Gamma.$$

Ma, essendo Γ φ^{-1}-ammissibile ed avendosi:

$$x (x^{\varphi^{r-2}})^{-1} = [x^{\varphi} (x^{-1})^{\varphi^{r-1}}]^{\varphi-1}$$

si ha:

$$x (x^{\varphi^{r-2}})^{-1} \in \Gamma. \tag{4}$$

Similmente valendoci i di (2) e (4) si può provare che $x(x^{\varphi^{r-3}})^{-1}$ è in Γ; così continuando si riconosce che sono in Γ gli elementi:

$$x (x^{\varphi})^{-1}, \quad x (x^{\varphi^2})^{-1}, \dots, \; x (x^{\varphi^{r-1}})^{-1}$$

e perciò anche i loro trasformati mediante x:

(5) $$(x^{\varphi})^{-1}\,x, \quad (x^{\varphi^2})^{-1}\,x, \;\ldots,\; (x^{\varphi^{r-1}})^{-1}\,x$$

Si ha (*Lemma* II):

(6) $$x\,x^{\varphi}\,x^{\varphi^2}\,\ldots\,x^{\varphi^{r-1}}=1$$

donde, tenendo presenti le (5), si deduce che l'elemento:

$$x\,x^{\varphi}\ldots x^{\varphi^{r-2}}\,x=\left[x\,x^{\varphi}\ldots x^{\varphi^{r-1}}\right]\left[(x^{\varphi^{r-1}})^{-1}\,x\right]$$

è in Γ.

Per quanto sopra visto ed essendo Γ normale, è anche in Γ l'elemento:

$$x^2\,x^{\varphi}\ldots x^{\varphi^{r-2}}=x\left[x\,x^{\varphi}\ldots x^{\varphi^{r-2}}\right]x^{-1}\,.$$

Ricordando le (5) è anche in Γ l'elemento:

$$x^2\,x^{\varphi}\ldots x^{\varphi^{r-3}}\,x=\left[x^2\,x^{\varphi}\ldots x^{\varphi^{r-2}}\right]\left[(x^{\varphi^{r-2}})^{-1}\right]$$

onde a Γ appartiene anche $x^3\,x^{\varphi}\ldots x^{\varphi^{r-3}}$ quale trasformato di $x^2\,x^{\varphi}\ldots x^{\varphi^{r-3}}$ mediante x^{-1}. Così continuando si riconosce che è in Γ l'elemento $x^{r-1}\,x^{\varphi}$, perciò avendosi:

$$\left[x^{r-1}\,x^{\varphi}\right]\left[(x^{\varphi})^{-1}\,x\right]=x^r$$

si ha:

(7) $$x^r\in\Gamma$$

La corrispondenza ψ indotta da φ su Γ è un automorfismo di Γ per il fatto che Γ è caratteristico in G.

L'applicazione:

$$\sigma(h)=h^{-1}\,h^{\psi} \qquad (h\in\Gamma)$$

porta Γ su tutto Γ. Infatti, se g è un elemento di Γ, detto x l'elemento di G per cui $x^{-1}\,x^{\varphi}=g$, x^r appartiene a Γ per la (7); ma, essendo per ipotesi x d'ordine primo con r, x è una potenza di x^r i e perciò x appartiene a Γ. Pertanto:

$$g = x^{-1}\, x^{\varphi} = x^{-1}\, x^{\psi}$$

e ψ, è un automorfismo uniforme di Γ; ψ ha ordine r al pari di φ in quanto r è un numero primo.

(β) *Γ è un gruppo speciale.*

Se g è un elemento di Γ, g possiede in Γ, come in G, solo un numero finito di coniugati; ne segue che il normalizzatore $N(g)$ di g in Γ, ha indice finito in Γ. Per il *Lemma* IV, essendo Γ a condizione minimale al pari di G, l'intersezione I dei sottogruppi di Γ aventi indice finito in Γ, ha indice finito in Γ. Pertanto la intersezione $C\,(\Gamma)$ di tutti gli $N(g)$ ha indice finito in Γ giacchè I è sottogruppo di $C(\Gamma)$.

Γ è caratteristico in G e, come mostrato in (α), φ induce su Γ un automorfismo uniforme ψ avente periodo r. Il sottogruppo $C(\Gamma)$ è applicato su tutto se stesso da ψ poichè è il centro di Γ, conseguentemente (*Lemma I*) ψ induce su $\Gamma/C(\Gamma)$ un autmorfismo uniforme di periodo r. Ma $\Gamma/C(\Gamma)$ ha ordine finito; quindi il *Teorema di Thompson* garantisce che $\Gamma/C(\Gamma)$ è un gruppo speciale (ciò che può anche riconoscersi applicando il *Lemma* V). Allora, tenuto presente che $C(\Gamma)$ è il centro di Γ, si dimostra subito che la serie centrale ascendente di Γ termina proprio con Γ. Quindi, Γ è un gruppo speciale.

Osservazione I. Usando le notazioni del *Teorema* I, si osservi che esistono gruppi G a condizione minimale tali che $C \neq \Gamma$. Si pensi infatti al gruppo G (evidentemente a condizione minimale) così generato:

$$a_1^p = 1,\ a_2^p = a_1,\ a_3^p = a_2,\ \ldots,\ a_n^p = a_{n-1},\ \ldots \ (p \text{ numero primo } \neq 2)$$

$$b^2 = 1,\ b^{-1}\, a_i\, b = a_i^{-1} \qquad (i = 1,2,\ \ldots,\ n,\ \ldots)\,.$$

Osservazione II. Siano: G un gruppo di torsione a condizione minimale, φ un automorfismo uniforme di G avente periodo finito t, H un sottogruppo di G normale e φ-ammissibile. In generale l'automorfismo (3) ψ indotto da φ su H,

(3) La corrispondenza ψ indotta da φ su H è un automorfismo e non soltanto un meromorfismo. Infatti se H^{φ} fosse contenuto propriamente in H, anche $H^{\varphi^2}, \ldots, H^{\varphi^t}$ sarebbero contenuti propriamente in H. Ma ciò è assurdo, giacchè avendo φ periodo finito t, risulta $H^{\varphi^t} = H$.

non è un automorfismo uniforme di H, infatti, si può ad esempio considerare il gruppo G delle radici dell'unità positiva aventi indici potenza di 2, in tal caso l'automorfismo φ per cui $x^{\varphi} = x^{-1}$ determina la corrispondenza identica nel sottogruppo H di G costituito dalla radici quadrate dell'unità.

Il Lettore dedurrà facilmente dalla dimostrazione del *Teorema* I che:

Sia G un gruppo di torsione ad elementi d'ordini primi con r. Se G ammette un automorfismo uniforme φ di periodo r, φ induce un automorfismo uniforme in ogni sottogruppo di G normale e φ-ammissibile.

TEOREMA II. *Sia G un gruppo a condizione minimale dotato d'un automorfismo uniforme di periodo primo. G è certamente speciale quando soddisfa ad una delle condizioni:*

a) *Ogni elemento di G ha solo un numero finito di coniugati,*

b) *Ogni elemento di G appartiene ad un sottogruppo normale finito,*

c) *Gli elementi di G d'ordine dato sono in numero finito.*

Dimostrazione. È ben noto [5] che a), b), e c) sono equivalenti. Sicchè se G soddisfa alla a) è $G \equiv \Gamma$ ove, sono state usate le notazioni adoperate nel *Teorema* I.

TEOREMA III. *Sia G un gruppo a condizione minimale dotato di un automorfismo uniforme d'ordine primo. G è speciale se esiste un aggiunto $G/C_n(G)$ col derivato finito.*

Dimostrazione. Siano: $A = G/C_n(G)$, $D(A)$ il derivato di A, α e $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ due elementi di A tra loro coniugati. Si ha: $\gamma^{-1}\alpha\gamma = \sigma\alpha$ ove σ è il commutatore $[\alpha^{-1}, \gamma]$. Allora, $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ fa parte del laterale di $D(A)$ a cui appartiene α. Essendo tale laterale d'ordine finito, l'arbitrarietà di α e γ comporta che α, e quindi ogni elemento di A, abbia solo un numero finito di coniugati. Ne segue che A è speciale (*Teorema* II); onde, anche G è speciale terminando la serie centrale ascendente:

$$C_n(G) \subseteq C_{n+1}(G) \subseteq \ldots$$

proprio col gruppo G.

COROLLARIO. *Sia G un gruppo a condizione minimale dotato di un automorfismo uniforme d'ordine primo. Se il derivato $D(G)$ di G ha ordine finito, G è un gruppo speciale.*

Dimostrazione. Il derivato K di $G/C(G)$, essendo $C(G)$ il centro di G, è il gruppo:

$$K = \frac{D(G) \cup C(G)}{C(G)}.$$

Avendosi:

$$\frac{D(G)}{D(G) \cap C(G)} \simeq \frac{D(G) \cup C(G)}{C(G)}$$

ed essendo $D(G)$ finito, K ha ordine finito. L'asserto segue poi dal *Teorema* precedente.

3. – In questo numero saranno presi in considerazione gruppi risolubili a condizione minimale.

Si ha:

LEMMA VI. *Sia G un gruppo risolubile a condizione minimale. G possiede un sottogruppo normale A che è divisibile, abeliano e d'indice finito in G.* (CHERNIKOV e SCHMIDT [5]).

LEMMA VII. *Sia G un gruppo risolubile a condizione minimale. Se il sottogruppo di* FRATTINI *$\Phi(G)$ di G è identico, G ha ordine finito.*

Dimostrazione. Negando la tesi, si supponga G d'ordine infinito. Distinguiamo i casi seguenti:

(α) *G è privo di sottogruppi propri d'indice finito.*

In tal caso (*Lemma* VI) deve aversi $G \equiv A$ e perciò [4]:

$$G = Z(p_1^\infty) \times Z(p_2^\infty) \times \ldots \times Z(p_k^\infty)$$

con k finito e $p_1, p_2, \ldots, p_k$ numeri primi (distinti o non). Allora, G è privo di sottogruppi massimali propri e perciò $\Phi(G) \equiv G$ contro l'ipotesi che $\Phi(G)$ sia identico.

---

(4) $Z(p^\infty)$ (p numero primo) è il gruppo di tutte le radici complesse della unità positiva aventi indici potenze di p.

(β) *G è dotato di sottogruppi propri d'indice finito.*

Essendo G infinito, l'intersezione I dei sottogruppi di G aventi indice finito è non identica.

Poichè I è caratteristico e G è a condizione minimale anche per le catene principali, esisterà in G un sottogruppo proprio N normale minimo in G e tale che: $N \subseteq I$. Per la risolubilità di G, N è abeliano elementare d'esponente primo; allora, N, essendo anche a condizione minimale, ha ordine finito.

Dalla ipotesi $\Phi(G) \equiv 1$, si deduce l'esistenza d'un sottogruppo massimale proprio M non contenente N, tale cioè da aversi:

$$M \cup N = G.$$

Da ciò segue che l'indice di M in G è finito uguagliando l'ordine del gruppo finito $N/M \cap N$. Allora, M contiene I e perciò anche N; dunque, siamo giunti ad un assurdo.

Corollario. *Sia G un gruppo risolubile a condizione minimale. Se $\Phi(G)$ ha ordine finito, G è un gruppo finito.*

Dimostrazione. Il reticolo R_1 dei sottogruppi di G contenenti $\Phi(G)$ è isomorfo al reticolo R_2 dei sottogruppi di $G/\Phi(G)$. Gli elementi massimi di R_1 sono i sottogruppi massimali di G, e, il minimo di R_1 è $\Phi(G)$; invece, il minimo di R_2 è il sottogruppo identico di $G/\Phi(G)$, gli elementi massimi di R_2 sono i sottogruppi massimali di $G/\Phi(G)$.

Da quanto precede si deduce subito che $G/\Phi(G)$ è a sottogruppo di Frattini identico; allora, essendo a condizione minimale, $G/\Phi(G)$ ha ordine finito (*Lemma* VII). L'asserto è provato, giacchè $\Phi(G)$ è per ipotesi d'ordine finito.

Dopo di ciò:

Teorema IV. *Sia G un gruppo risolubile a condizione minimale e $G/\Phi(G)$ possegga un automorfismo uniforme d'ordine primo. Si ha:*

(1) *G è a sottogruppi massimali normali.*

(2) *Se $\Phi(G)$ è finito, G è speciale d'ordine finito.*

Dimostrazione. Il fattoriale $G/\Phi(G)$ ha il sottogruppo di Frattini identico ed è a condizione minimale al pari di G; allora (*Lemma* VII) $G/\Phi(G)$ ha ordine finito. Per il *Teorema di Thompson* $G/\Phi(G)$ è speciale. Ne segue che $G/\Phi(G)$, e quindi G, è a sottogruppi massimali normali.

La (1) è così provata.

Sia ora $\Phi(G)$ finito. Per il *Corollario* al *Lemma* VII, G ha ordine finito. Avendo provato la (1), G è a sottogruppi massimali normali. Dall'essere G finito segue subito che G è speciale.

COROLLARIO. *Sia G un gruppo risolubile a condizione minimale dotato d'un automorfismo uniforme φ d'ordine primo. Si ha:*

(1) *G è a sottogruppi massimali normali.*

(2) *Se $\Phi(G)$ è finito, G è speciale d'ordine finito.*

Dimostrazione. Essendo $\Phi(G)$ caratteristico, φ applica $\Phi(G)$ su tutto $\Phi(G)$; pertanto (*Lemma* I), $G/\Phi(G)$ è dotato d'un automorfismo uniforme d'ordine primo. Siamo così nelle ipotesi del *Teorema* IV.

TEOREMA V. *Sia G un gruppo risolubile a condizione minimale dotato di un automorfismo uniforme d'ordine primo. Se G è unione dei sottogruppi della sua serie di Levi, G è speciale.*

Dimostrazione. Ricordiamo che la *serie di Levi* di G è la catena di sottogruppi:

$$1 \equiv \Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \dots \tag{8}$$

tali che ogni Σ_{i+1}/Σ_i $(i = 0, 1, 2, \dots)$ risulti unione dei sottogruppi normali minimi di G/Σ_i.

Essendo G risolubile tale è anche G/Σ_i; pertanto Σ_{i+1}/Σ_i è un gruppo abeliano privo d'elementi d'ordine quadrato; ma, essendo Σ_{i+1}/Σ_i a condizione minimale al pari di G/Σ_i, l'ordine di Σ_{i+1}/Σ_i è, in conseguenza di quanto detto, un numero finito. Dopo di ciò procedendo per induzione rispetto ad i, si riconosce facilmente che ogni Σ_{i+1} è finito.

Avendosi per ipotesi:

$$G = \langle \Sigma_0, \ \Sigma_1, \ \dots \rangle$$

ed essendo la (8) una «sequenza ascendente» G è somma (nel senso della teoria degli insiemi) dei sottogruppi Σ_i. Perciò, ogni elemento $x \in G$ appartiene ad un qualche Σ_i. Ne segue che x sta in un sottogruppo normale d'ordine finito. A norma del *Teorema* II, G è un gruppo speciale.

Definizione III. Un gruppo G dicesi *speciale in senso lato* se esiste un numero ordinale ν finito o non, per cui G coincida col ν-simo (5) centro di G.

(5) Cfr. ad es [6].

LEMMA VIII. *Un p-gruppo risolubile è speciale in senso lato* (BAER [6]).

TEOREMA VI. *Sia G un gruppo risolubile a condizione minimale con $G/\Phi(G)$ dotato d'un automorfismo uniforme d'ordine primo. G è speciale in senso lato se per ogni numero primo p (ordine d'un qualche elemento di G) esiste in G solo un insieme finito di p-sottogruppi di Sylow.*

Dimostrazione. Detto S_p un p-sottogruppo di Sylow di G, per l'ipotesi fatta il normalizzante $N(S_p)$ di S_p in G ha indice finito. Pertanto, esisterà in G un sottogruppo massimale M tale che:

$$G \supseteq M \supseteq N(S_p)\,.$$

Per il *Teorema* IV, M è normale in G, allora, poichè gli S_p essendo in numero finito costituiscono una classe completa di sottogruppi coniugati, è adattabile al nostro caso un ragionamento classico e risulterà necessariamente $N(S_p) = G$. Per l'arbitrarietà di p, G è a sottogruppi di Sylow normali; conseguentemente G è prodotto diretto di tali sottogruppi che, essendo G a condizione minimale, sono in numero finito. G è speciale in senso lato sussistendo il *Lemma* VIII ed essendo G prodotto diretto d'un numero finito di p-gruppi.

4. – Sia G un gruppo finito. È noto che un automorfismo uniforme di G è anche un automorfismo senza coincidenze ([6]). Invece, per gruppi infiniti esistono talvolta automorfismi uniformi che non sono privi di coincidenze. Ad illustrare la cosa può servire l'esempio seguente: siano G il gruppo $Z(2^\infty)$ e φ l'automorfismo di G per cui $x^\varphi = x^{-1}$. Poichè $G \equiv G^2$, l'applicazione:

$$\vartheta(x) = x^{-1}\, x^\varphi = x^{-2}$$

porta G su tutto G. Onde, φ è un automorfismo uniforme di G; ma, φ non è privo di coincidenze, giacchè φ fissa l'unico elemento bilatero di G.

Le considerazioni precedenti mostrano che a priori non è lecito ritenere validi i risultati dei num. **3-4** per gruppi possedenti automorfismi d'ordine primo e senza coincidenze. Mostreremo ora come possano essere precisati dei risultati di HIGMAN [2] e NEUMANN [3] quando, a differenza di ciò che è stato fatto dai predetti Autori, vengano presi in considerazione gruppi risolubili di torsione. Precisamente:

([6]) Cfr. ZAPPA [1].

TEOREMA VII. *Sia G un gruppo risolubile di torsione. Se G è dotato d'un automorfismo φ senza coincidenze avente ordine primo, G è un gruppo speciale.*

Dimostrazione. Mostriamo che:

(α) *G è localmente speciale* (7).

Siano a e b due distinti elementi di G generanti rispettivamente i gruppi ciclici A e B.

L'automorfismo φ (di periodo primo r) permuta e i sottogruppi:

$$A^{\varphi},\ A^{\varphi^2},\ \dots,\ A^{\varphi^r} \equiv A,$$

e i sottogruppi:

$$B^{\varphi}, B^{\varphi^2},\ \dots,\ B^{\varphi^r} \equiv B\,.$$

Ne segue che il gruppo:

$$N = A^{\varphi} \cup \dots \cup A^{\varphi^r} \cup B^{\varphi} \cup \dots \cup B^{\varphi^r}$$

è φ-ammissibile; anzi, φ subordina in N un automorfismo $\bar{\varphi}$. È ben noto che un gruppo risolubile di torsione è localmente finito (8) [7]; onde, N, essendo generabile con un numero finito di elementi, ha ordine finito.

L'automorfismo $\bar{\varphi}$ al pari di φ è senza coincidenze ed ha ordine r; onde, φ, operando su di un gruppo finito, è anche uniforme. Allora, per il *Teorema di* THOMPSON, N è speciale.

Avendosi:

$$a,\ b \in N$$

il sottogruppo generato da a e b è speciale d'ordine finito.

Dopo di ciò è facile comprendere come ogni sottoinsieme finito di elementi di G, generi un gruppo speciale finito.

---

(7) Nel senso che ogni sistema finito d'elementi di G genera un gruppo speciale finito.

(8) Cioè, ogni sistema finito d'elementi di G genera un sottogruppo finito.

(β) *G è speciale.*

Higman [2] ha dimostrato che un gruppo localmente speciale possedente un automorfismo senza coincidenze e d'ordine primo r, è speciale di classe al più $k(p)$ essendo k un intero dipendente da r. Dunque, per la (α) e per il suddetto teorema di Higman, G è un gruppo speciale.

Teorema VIII. *Sia G un gruppo risolubile di torsione possedente un automorfismo φ d'ordine 3 e privo di coincidenze. Allora, ogni elemento $x \in G$ è permutabile con x^{φ} e G è speciale di classe al più 2.*

Dimostrazione. Siano x, y, z tre elementi di G distinti a due a due. Il sottogruppo di G:

$$N = \langle x \rangle^{\varphi} \cup \langle x \rangle^{\varphi^2} \cup \langle x \rangle \cup \langle y \rangle^{\varphi} \cup \langle y \rangle^{\varphi^2} \cup \langle y \rangle \cup \langle z \rangle^{\varphi} \cup \langle z \rangle^{\varphi^2} \cup \langle z \rangle$$

è φ-ammissibile. Per il *Teorema* precedente, N, avendo un numero finito di generatori, è speciale d'ordine finito. L'automorfismo φ subordina su N un automorfismo d'ordine 3, privo di concidenze; allora, per un risultato di B. H. Neumann [3], N è speciale di classe al più 2. Pertanto, x è permutabile col commutatore $[y, z]$. Al variare di y, z in G il gruppo generato dai commutatori $[y, z]$ è il derivato G' di G; onde x è permutabile con ogni elemento di G'. Per l'arbitrarietà di x, l'interderivato $[G, G']$ è il sottogruppo identico di G, vale a dire che G o è abeliano o è speciale di classe 2.

Per provare che ogni $x \in G$ è permutabile con x^{φ} è sufficiente notare che x e x^{φ} sono in N e poi tener presente il già ricordato teorema di Neumann.

Osservazione. B.H. Neumann [3] ha dato un esempio di gruppo finito non abeliano possedente un automorfismo d'ordine 3 senza coincidenze. Noi, daremo un sempio di *gruppo infinito non abeliano e possedente un automorfismo d'ordine* 3 *senza coincidenze.*

Sia G il gruppo non abeliano:

$$G = G_1 \times G_2$$

dove: G_1 è abeliano elementare infinito d'esponente 7; G_2 è non abeliano, di ordine 7^3 ed esponente 7.

La corrispondenza φ_1 per cui:

$$x_1^{\varphi_1} = x_1^2 \qquad (x_1 \in G_1)$$

è un automorfismo di G_1, inoltre G_2 è dotato [3] di un automorfismo φ_2 d'ordine 3 e senza coincidenze.

Detto $g = x_1 x_2$ $(x_i \in G_i)$ l'elemento variabile in G, l'applicazione φ per cui:

$$g^{\varphi} = x_1^{\varphi_1} x_2^{\varphi_2}$$

è un automorfismo di G che risulta d'ordine 3 e senza coincidenze.

5. – Terminiamo con una proposizione di carattere elementare e di cui non abbiamo trovato traccia nella letteratura a noi accessibile.

Si ha:

Sia G un gruppo finito tale che ogni automorfismo esterno di $G/\Phi(G)$, risulti senza coincidenze quando è d'ordine primo.

Allora, G è un p-gruppo ciclico ($p \neq 2$).

DIMOSTRAZIONE. Per il *Teorema di* THOMPSON $G/\Phi(G)$ è speciale, onde $G/\Phi(G)$, essendo a sottogruppo di FRATTINI identico, è abeliano di ordine non divisibile per alcun quadrato. Per le ipotesi fatte ne segue che è senza coincidenze ogni automorfismo d'ordine primo del gruppo $G/\Phi(G)$; pertanto è facile constatare che $G/\Phi(G)$ è di necessità un gruppo avente ordine primo p dispari. Da ciò discende in modo immediato che G è un p-gruppo ciclico.

Osservazione. Sia G un gruppo risolubile a condizione minimale e risulti senza coincidenze ogni automorfismo esterno d'ordine primo del gruppo $G/\Phi(G)$. Orbene, non sempre G si riduce ad un gruppo ciclico avente per ordine la potenza d'un numero primo. Ad esempio si consideri un gruppo G prodotto diretto d'un sottogruppo $Z(p^\infty)$ per un gruppo d'ordine primo dispari $q \neq p$. In tal caso è infatti $\Phi(G) = Z(p^\infty)$ e $G/\Phi(G)$ (d'ordine q) ad automorfismi tutti senza coincidenze.

Bibliografia.

[1] G. ZAPPA, *Sugli automorfismi uniformi nei gruppi di Hirsch*, Ric. di Mat. **7** (1958), 3-13.

[2] G. HIGMAN, *Groups and rings having automorphisms whitout non-trivial fixed elements*. Journal of London Math. Soc. **32** (1957), 321-334.

[3] B. H. NEUMANN, *Groups whit automorphisms that leave only the neutral element fixed*, Archiv der Math. **7** (1956), 1-5.

[4] G. Zappa, *Sugli automorfismi privi di coincidenze nei gruppi finiti*. Boll. U.M.I. **12** (1957), 154-163.

[5] O. J. Schmidt, *Gruppi risolubili infiniti* (in russo). Mat. Sbornik **17** (1945), 145-162.

[6] R. Baer, *Nilpotent groups and their generalizations*. Trans. of the Am. Math. Soc. **42** (1940), 393-494.

[7] A. G. Kurosch, *The theory of groups, vol. I e II*, Chelsea Publ. Comp. N.Y. (1955).

[8] W. Feit, *On the structure of Frobenius groups*, Can. Journal of Math. **9** (1957), 587-596.