Riv. Mat. Univ. Parma (2) 1 (1960), 99-106

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Una estensione alla pluriderivazione della formula di Taylor. (**)

In un precedente lavoro (1) ho mostrato che, come la formula del valor medio viene generalizzata dalla formula di TAYLOR, così la formula di CAUCHY sulle derivate ha una generalizzazione parallela (che ho chiamato formula di TAYLOR-CAUCHY (2)).

Nel presente lavoro riprendo la formula di CAUCHY per la pluriderivazione (3) (della quale mi sono occupato recentemente (4)) e mostro che tale formula ha una generalizzazione, che chiamo *formula di Taylor-Cauchy per la pluriderivazione*, comprendente come caso particolare la sopra citata formula di TAYLOR-CAUCHY per le funzioni di una variabile.

Per ragioni di brevità tratto il caso della biderivazione, ma risulterà chiaramente che le considerazioni svolte valgono nel caso generale della pluriderivazione.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 10 maggio 1960.

(1) L. TANZI CATTABIANCHI, *La formula di Taylor-Cauchy*, Riv. Mat. Univ. Parma 7 (1956), 359-362.

(2) Cfr. loc. cit. in (1), formula (2).

(3) Sulla pluriderivazione vedasi:

A. MAMBRIANI, *La pluriderivazione e una classificazione delle equazioni differenziali*, Riv. Mat. Univ. Parma 6 (1955), 321-348.

(4) L. TANZI CATTABIANCHI, *Una estensione alla pluriderivazione dei teoremi di Rolle, del valor medio, di Cauchy*, Riv. Mat. Univ. Parma 9 (1958).

§ 1. - Risultati e osservazioni.

1.1. – Il biderivatore ausiliario $\overline{\mathfrak{D}} \equiv \overline{\mathfrak{D}}_{x,y}$.

Riprendo la formula di CAUCHY per la biderivazione (5)

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \over \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) \quad \text{(1)}$$

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)} = \left[\frac{\mathfrak{D} f(x, y)}{\mathfrak{D} \varphi(x, y)}\right]_{(\xi,\eta)}, \tag{1}$$

dove

$$\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{D}_{x,y} \equiv X(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \tag{2}$$

è un dato biderivatore regolare (6) in un campo chiuso R (ad interno non vuoto) del piano (x, y), $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e $P \equiv (x, y)$ sono due punti di una stessa linea Γ_0 caratteristica di $\mathfrak{D}$ (7) e (ξ, η) è un conveniente punto interno all'arco $\widehat{P_0P}$ di Γ_0. Osservo che il secondo membro di (1) può scriversi

$$[\{\mathfrak{D} \varphi(x, y)\}^{-1} \cdot \mathfrak{D} f(x, y)]_{(\xi,\eta)},$$

dove viene messo in evidenza il nuovo biderivatore

$$\overline{\mathfrak{D}} \equiv \overline{\mathfrak{D}}_{x,y} \equiv \{\mathfrak{D} \varphi(x, y)\}^{-1} \mathfrak{D} = \overline{X}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \overline{Y}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \tag{3}$$

avendo posto

$$\overline{X}(x, y) = \{\mathfrak{D} \varphi(x, y)\}^{-1} X(x, y), \quad \overline{Y}(x, y) = \{\mathfrak{D} \varphi(x, y)\}^{-1} Y(x, y). \tag{4}$$

Naturalmente, per la definizione di $\overline{\mathfrak{D}}$ occorre l'ipotesi

$$\mathfrak{D} \varphi(x, y) \neq 0. \tag{5}$$

---

(5) Cfr. loc. cit. in (4), formula (3).

(6) L. TANZI CATTABIANCHI, *Su le costanti pluriderivazionali e su le variabili pluriderivazionali indipendenti*, Riv. Mat. Univ. Parma **8** (1957), 215-221. Cfr., in particolare, il n. **2**.

(7) Cfr. loc. cit. in (6), n. **2**.

La (1) può essere quindi scritta nella forma

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + [\overline{\mathfrak{D}}\, f(x, y)]_{(\xi,\eta)} \cdot \{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}. \tag{6}$$

Per il biderivatore ausiliario $\overline{\mathfrak{D}}$ che figura in (6) si deve tener presente che:

1°) *le linee caratteristiche di* $\overline{\mathfrak{D}}$ *coincidono con quelle di* $\mathfrak{D}$, in quanto è, per le (4),

$$\overline{Y}(x, y)/\overline{X}(x, y) = Y(x, y)/X(x, y);$$

2°) *la funzione* $\varphi(x, y)$ *è una variabile biderivazionale indipendente* (8) *per* $\overline{\mathfrak{D}}$, è cioè

$$\overline{\mathfrak{D}}\, \varphi(x, y) = 1, \tag{7}$$

come segue subito da (3).

Dovendo nel seguito considerare

$$\overline{\mathfrak{D}}^2 f,\ \overline{\mathfrak{D}}^3 f,\ \ldots,\ \overline{\mathfrak{D}}^m f,$$

conviene notare che per l'esistenza di $\overline{\mathfrak{D}}^m f$ basta che, oltre all'ipotesi (5),

1°) i coefficienti X e Y di $\mathfrak{D}$ siano derivabili fino all'ordine $m-1$;

2°) le funzioni f e φ siano derivabili fino all'ordine m.

1.2. – La formula di Taylor-Cauchy per la biderivazione.

Nel seguito chiamaremo *ipotesi* $(\mathcal{H})$ la seguente:

in R *esistono* $\overline{\mathfrak{D}}f,\ \overline{\mathfrak{D}}^2 f,\ \ldots,\ \overline{\mathfrak{D}}^{n-1} f$.

Alla fine del n. precedente sono chiaramente indicate delle condizioni sufficienti su X, Y, f, φ affinchè valga tale ipotesi $(\mathcal{H})$.

Teorema I. *Dato un biderivatore* $\mathfrak{D} \equiv X(x, y) \cdot \partial/\partial x + Y(x, y) \cdot \partial/\partial y$ *regolare in un campo chiuso* R *(ad interno non vuoto) del piano* (x, y) *e date due funzioni* $f(x, y)$ *e* $\varphi(x, y)$ *reali ed univoche in* R, *se vale l'ipotesi* $(\mathcal{H})$ *e se*

---

(8) Cfr. loc. cit. in (6), n. **1**.

esistono continue nell'interno di R le derivate d'ordine $n-1$ di X e Y e d'ordine n di f e φ,

allora, nell'interno di ogni arco di estremi $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e $P \equiv (x, y)$ di una linea Γ_0 caratteristica di $\mathfrak{D}$, esiste sempre almeno un punto (ξ, η) per il quale è

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + [\overline{\mathfrak{D}} f(x, y)]_{(x_0, y_0)} \cdot \{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\} + \\ &+ \frac{1}{2!}[\overline{\mathfrak{D}}^2 f(x, y)]_{(x_0, y_0)} \cdot \{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}^2 + \dots + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}[\overline{\mathfrak{D}}^{n-1} f(x, y)]_{(x_0, y_0)} \cdot \{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}^{n-1} + T_n(x, y), \end{aligned}\right.$$

dove $\overline{\mathfrak{D}}$ è il biderivatore (3) *e dove $T_n(x, y)$ ha l'espressione*

$$(9)\qquad T_n(x, y) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!\, s}[\overline{\mathfrak{D}}^n f(x, y)]_{(\xi, \eta)} \cdot \{\varphi(x, y) - \varphi(\xi, \eta)\}^{n-s} \cdot \{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}^s,$$

con s (reale) non nullo e tale che abbiano senso reale le potenze $\{\varphi(x, y) - \varphi(\xi, \eta)\}^{n-s}$ e $\{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}^s$.

Si dirà che « $T_n(x, y)$ è *il termine complementare* della (8) ».

Osservazioni. I) Nei casi particolari $s = n$ e $s = 1$ la (9) diventa rispettivamente

$$(10)\qquad T_n(x, y) = \frac{1}{n!}[\overline{\mathfrak{D}}^n f(x, y)]_{(\xi, \eta)} \cdot \{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}^n,$$

$$(11)\qquad T_n(x, y) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}[\overline{\mathfrak{D}}^n f(x, y)]_{(\xi, \eta)} \cdot \{(\varphi(x, y) - \varphi(\xi, \eta)\}^{n-1} \cdot \{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}.$$

Le espressioni (9), (10), (11) di $T_n(x, y)$ corrispondono, rispettivamente, ai noti termini complementari della formula di TAYLOR, per le funzioni di una variabile, nelle forme di SCHLÖMILCH, di LAGRANGE, di CAUCHY.

II) La formula (8) nel caso particolare $n = 1$ e qualora si assuma il termine complementare nella forma (10) diventa la (6), ossia la formula di CAUCHY per la biderivazione. Resta così giustificata la denominazione di *formula di Taylor-Cauchy per la biderivazione* data alla (8).

III) La formula (8) nel caso particolare $\varphi(x, y) = (x, y)_{\mathfrak{D}}$ [9] generalizza il teorema del valor medio per la biderivazione [10] e in tale forma è l'analoga della formula di TAYLOR per le funzioni di una variabile.

1.3 – Un'altra forma per il termine complementare.

Teorema II. *Se vale l'ipotesi* ($\mathcal{H}$) (vedasi n. **1.2**) *e se inoltre nel punto* $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ *della linea* Γ_0, *caratteristica di* $\mathfrak{D}$, *esistono continue le derivate d'ordine* $n-1$ *di* X e Y *e d'ordine* n *di* f *e* φ,

allora vale la formula di Taylor-Cauchy (8) *per la biderivazione, col termine complementare* $T_n(x, y)$ *nella forma*

$$T_n(x, y) = \frac{1}{n!}\left\{ [\overline{\mathfrak{D}}^n f(x, y)]_{(x_0, y_0)} + \varepsilon(x, y) \right\} \cdot \left\{ \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) \right\}^n, \tag{12}$$

dove $\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (x_0,y_0) \\ \Gamma_0}} \varepsilon(x, y) = 0$ [11].

Osservazioni. I) L'espressione (12) di $T_n(x, y)$ corrisponde al termine complementare della formula di TAYLOR, per le funzioni di una variabile, nella forma di PEANO.

II) La formula (8) nel caso particolare in cui le funzioni f e φ siano funzioni della sola x e $\mathfrak{D}$ si riduca a $D_x = d/d\,x$ (allora è $\overline{\mathfrak{D}} = \{\varphi'(x)\}^{-1} D_x$) diventa la formula di TAYLOR-CAUCHY ricordata nelle prime righe della presente Nota [vedasi loc. cit. in (2), dove $\overline{\mathfrak{D}} = D_\varphi$].

---

(9) Con $(x, y)_{\mathfrak{D}}$ intendiamo una qualsiasi variabile $\mathfrak{D}$-biderivazionale. Cfr. loc. cit. in (6), n. **1**.

(10) Cfr. loc. cit. in (4), n. **1**.

(11) Con $(x, y) \underset{\Gamma_0}{\to} (x_0, y_0)$ si intende che il punto (x, y) tende, muovendosi su Γ_0, al punto (x_0, y_0).

§ 2. - Dimostrazioni.

2.1. – Dimostrazione del Teorema I.

Consideriamo la funzione ausiliaria $g(u, v)$, con $(u, v) \in R$,

$$g(u, v) = f(x, y) - f(u, v) - \overline{\mathfrak{D}} f(u, v) \cdot \{ \varphi(x, y) - \varphi(u, v) \} -$$
$$- \frac{1}{2!} \overline{\mathfrak{D}}^2 f(u, v) \cdot \{ \varphi(x, y) - \varphi(u, v) \}^2 - \dots -$$
$$- \frac{1}{(n-1)!} \overline{\mathfrak{D}}^{n-1} f(u, v) \cdot \{ \varphi(x, y) - \varphi(u, v) \}^{n-1} -$$
$$- q_n(x, y) \cdot \{ \varphi(x, y) - \varphi(u, v) \}^s$$

(dove qui è $\overline{\mathfrak{D}} \equiv \overline{\mathfrak{D}}_{u,v}$), ottenuta facendo la differenza dei due membri di (8), dando poi al termine complementare la forma

$$T_n(x, y) = q_n(x, y) \cdot \{ \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) \}^s, \tag{13}$$

e infine sostituendo (x_0, y_0) con (u, v).

Questa funzione $g(u, v)$ è, per le ipotesi, continua in tutto R, differenziabile nell'interno di R, ed inoltre si ha

$$g(x_0, y_0) = 0, \qquad g(x, y) = 0;$$

valgono cioè per la $g(u, v)$ le ipotesi del teorema di ROLLE per la biderivazione (12) (con biderivatore $\overline{\mathfrak{D}} \equiv \overline{\mathfrak{D}}_{u,v}$) e pertanto esisterà nell'interno dell'arco $\widehat{P_0 P}$ di Γ_0 almeno un punto (ξ, η) in cui è

$$[\overline{\mathfrak{D}}\, g(u, v)]_{(\xi, \eta)} = 0. \tag{14}$$

Tenendo presente (7), risulta facilmente

$$\overline{\mathfrak{D}}\, g(u, v) = - \frac{1}{(n-1)!} \overline{\mathfrak{D}}^n f(u, v) \cdot \{ \varphi(x, y) - \varphi(u, v) \}^{n-1} +$$
$$+ s q_n(x, y) \cdot \{ \varphi(x, y) - \varphi(u, v) \}^{s-1},$$

(12) Cfr. loc. cit. in (4), n. 1.

e quindi la (14) diventa

$$-\frac{1}{(n-1)!}[\mathfrak{D}^n f(u, v)]_{(\xi,\eta)}\cdot\{\varphi(x, y)-\varphi(\xi, \eta)\}^{n-1}+$$

$$+ s q_n(x, y)\cdot\{\varphi(x, y)-\varphi(\xi, \eta)\}^{s-1}=0,$$

da cui

$$q_n(x, y) = \frac{1}{(n-1)!s}[\mathfrak{D}^n f(x, y)]_{(\xi,\eta)}\cdot\{\varphi(x, y)-\varphi(\xi, \eta)\}^{n-s}.$$

Sostituendo questa espressione di $q_n(x, y)$ in (13) si ha proprio l'espressione (9) di $T_n(x, y)$.

2.2. – Dimostrazione del Teorema II.

Consideriamo il rapporto

$$T_n(x, y)/\{\varphi(x, y)-\varphi(x_0, y_0)\}^n, \tag{15}$$

dove per $T_n(x, y)$ va intesa esattamente l'espressione che si ricava da (8). Per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ tale rapporto dà luogo alla forma indeterminata 0/0. Applicando qui una facile estensione alla biderivazione del teorema di DE L'HOSPITAL [13],

[13] Cfr. loc. cit. in [4], n. **3**, dove accenavo a tale estensione, ovvia conseguenza di quanto precedeva. Il teorema di DE L'HOSPITAL per la biderivazione è il seguente: *Date due funzioni $f(x, y)$ e $\varphi(x, y)$ continue in R e differenziabili nell'interno di R e fissato un biderivatore $\mathfrak{D}$ regolare in R, se in un punto (x_0, y_0) di R è $f(x_0, y_0)=\varphi(x_0, y_0)=0$, detta Γ_0 la linea, di R, caratteristica per il biderivatore $\mathfrak{D}$ e passante per (x_0, y_0), se è $\mathfrak{D}\varphi(x, y)\neq 0$ per i punti (x, y) di Γ_0 e di un intorno di (x_0, y_0) e se inoltre il rapporto $\mathfrak{D}f(x, y)/\mathfrak{D}\varphi(x, y)$ ha limite quando $(x, y)\underset{\Gamma_0}{\to}(x_0, y_0)$, allora anche il rapporto $f(x, y)/\varphi(x, y)$ ha limite per $(x, y)\underset{\Gamma_0}{\to}(x_0, y_0)$ ed è*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \Gamma_0}}\{f(x, y)/\varphi(x, y)\} = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \Gamma_0}}\{\mathfrak{D}f(x, y)/\mathfrak{D}\varphi(x, y)\}.$$

consideriamo il rapporto delle $\overline{\mathfrak{D}}$-biderivate del numeratore e del denominatore di (15) [essendo ora $\overline{\mathfrak{D}} \equiv \overline{\mathfrak{D}}_{x,y}$ e tenendo presente (7)]

$$(16) \qquad \frac{\overline{\mathfrak{D}}\, T_n(x, y)}{n\{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{n}\Big[\overline{\mathfrak{D}} f(x, y) - [\overline{\mathfrak{D}} f(x, y)]_{(x_0,y_0)} - [\overline{\mathfrak{D}}^2 f(x, y)]_{(x_0,y_0)} \cdot \{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\} -$$

$$- \frac{1}{2!}[\overline{\mathfrak{D}}^3 f(x, y)]_{(x_0,y_0)} \cdot \{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}^2 - \dots -$$

$$- \frac{1}{(n-2)!}[\overline{\mathfrak{D}}^{n-1} f(x, y)]_{(x_0,y_0)} \cdot \{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}^{n-2}\Big] :$$

$$: \{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}^{n-1}.$$

Per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ anche questo rapporto (16) dà luogo alla forma indeterminata $0/0$. E così danno luogo alla stessa forma indeterminata i rapporti

$$\frac{\overline{\mathfrak{D}}^2\, T_n(x, y)}{n(n-1)\{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}^{n-2}}, \quad \dots$$

fino a

$$\frac{\overline{\mathfrak{D}}^{n-1}\, T_n(x, y)}{n!\{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}} = \frac{1}{n!}\, \frac{\overline{\mathfrak{D}}^{n-1} f(x, y) - [\overline{\mathfrak{D}}^{n-1} f(x, y)]_{(x_0,y_0)}}{\varphi(x, y) - \varphi(x_0\, y_0)}.$$

Ma, per le ipotesi fatte, l'ultimo rapporto, per $(x, y) \underset{\Gamma_0}{\to} (x_0, y_0)$ ha limite [14] dato da

$$\frac{1}{n!}[\overline{\mathfrak{D}}^n f(x, y)]_{(x_0,y_0)}.$$

Per il sopra citato teorema di DE L'HOSPITAL per la biderivazione è quindi

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (x_0,y_0) \\ \Gamma_0}} \frac{T_n(x, y)}{\{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\}^n} = \frac{1}{n!}[\overline{\mathfrak{D}}^n f(x, y)]_{(x_0,y_0)}$$

da cui segue l'espressione (12) di $T_n(x, y)$.

---

[14] Cfr. loc. cit. in [6], n. 4.4, p. 220.