Riv. Mat. Univ. Parma (2) 1 (1960), 29-44

BRUNO FORTE (*)

Sulla convergenza delle medie temporali nella teoria ergodica dei fenomeni non stazionarî. (**)

1. - Si consideri un sistema olonomo ad n gradi di libertà. Il suo generico stato microscopico sia pertanto individuato, dal punto di vista della meccanica classica, dai valori di una $2n$-pla di variabili reali $(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ e quindi da un punto P in uno spazio euclideo a $2n$ dimensioni R_{2n} (1).

Detta $H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$ la hamiltoniana di una tale sistema, al trascorrere del tempo t, lo stato microscopico varia secondo una legge soddisfacente alle classiche equazioni di HAMILTON (2):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q_h}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \frac{\mathrm{d}p_h}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{aligned} \right. \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Sotto opportune ipotesi di regolarità formulate nei riguardi della funzione $H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$, l'insieme Ω (spazio delle fasi) di tutti i punti ω di R_{2n} in corrispondenza ai quali, interpretati come dati di CAUCHY relativi ad un qualsiasi istante t^*, esiste ed è unica la soluzione del sistema differenziale 1.1, è un continuo misurabile secondo LEBESGUE. In tali ipotesi, quindi, le soluzioni del sistema differenziale 1.1, relative al generico istante t^* ed al generico punto

---

(*) Indirizzo: Istituto Matematica, Università, Pisa.
(**) Ricevuto il 14 marzo 1960.
(1) Si veda per questo in bibliografia [1] pag. 292.
(2) Si veda in bibl. [1] pag. 291.

ω in Ω, individuano una famiglia di trasformazioni ad un parametro t, ciascuna delle quali, denotata con $T_{t^*}^{(t)}$, fa corrispondere ad ogni elemento ω di Ω il punto $\omega_{t^*}(t)$ che caratterizza lo stato assunto dal sistema meccanico all'istante $t^* + t$ quando il suo stato iniziale sia rappresentato dal punto ω.

In virtù del teorema di LIOUVILLE (3) la generica trasformazione $T_{t^*}^{(t)}$ conserva la misura di LEBESGUE (4) di ogni sottoinsieme misurabile di punti di Ω.

Sia ora $f(\omega, t)$ una qualunque funzione reale di fase e dipente anche dal tempo esplicito. La $f(\omega, t)$ sia sommabile in Ω, per ogni valore della variabile temporale t nell'insieme dei reali $\mathfrak{T}$ e sia tale che la funzione del tempo $f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega, t)$, ottenuta sostituendo ad ω nella $f(\omega, t)$ la sua legge di dipendenza dal tempo quale soluzione del sistema 1.1, risulti integrabile su ogni intervallo finito di $\mathfrak{T}$.

Per ogni valore dell'istante iniziale t^*, si consideri la media temporale $\widehat{f}(\omega, t^*, \Theta)$ della data funzione $f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega, t)$ relativa all'intervallo di tempo $(t^*, t^* + \Theta)$:

$$\widehat{f}(\omega, t^*, \Theta) = \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta} f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega, t^* + t)\,dt\,. \tag{1.2}$$

Sotto ipotesi assai generali P. R. HALMOS (5), prendendo lo spunto da un lavoro di S. KAKUTANI [6] e da una breve nota di M. ULAM e J. VON NEUMANN [7], ha stabilito un teorema di convergenza per le medie di una funzione relative ad una successione di trasformazioni che operano sullo spazio nel quale essa è definita. Tale teorema è di immediata applicazione nella teoria dei problemi di localizzazione a molti stadi e, in senso più lato, nella teoria dei giochi. Nella presente nota si dimostra che esso può essere adattato, mercè opportune modifiche ed estensioni, alla meccanica statistica e precisamente al problema della convergenza delle medie 1.2. Si perverrà infatti a stabilire l'esistenza del limite finito delle medie temporali 1.2 per quasi tutti i punti ω in Ω per *ogni* valore dell'istante iniziale t^*, sulla base di un accurato esame delle trasformazioni $T_{t^*}^{(t)}$ di Ω in Ω subordinate alle soluzioni del sistema 1.1 ed usufruendo in maniera essenziale di una opportuna versione del teorema anzidetto.

---

(3) Come è noto (cfr. [2] pag. 283) il teorema di LIOUVILLE sussiste anche nel caso in cui il moto dei punti rappresentativi nel corrispondente spazio delle fasi non è stazionario; per la sua validità si richiede infatti soltanto che i secondi membri delle equazioni del moto si possano riguardare come le componenti di un vettore in R_{2n} a divergenza nulla.

(4) Una trasformazione T si dice, con HALMOS, misurabile se la estensione reciproca $T^{-1}A$ di ogni insieme misurabile è misurabile. Una trasformazione T si dice che conserva la misura se è misurabile e se è mis. $T^{-1}A$ = mis. A (cfr. [3] pagg. 5 e 6).

(5) Cfr. [3], pagg. 91, 92.

Nel successivo § 2 verrà quindi riportato il teorema di HALMOS nella sua formulazione originale. Nel § 3 saranno poste in luce le proprietà essenziali delle particolari trasformazioni $T_{t^*}^{(t)}$, relative al caso dinamico. Dalla applicazione diretta del teorema di HALMOS si riconoscerà nel § 4 l'esistenza del limite delle medie di una qualunque funzione sommabile $f(\omega, t)$ sul discreto, cioè delle medie aritmetiche dei valori che tale funzione assume in corrispondenza ad n stati successivi del sistema olonomo preso in esame. Sempre dalla banale applicazione del teorema di HALMOS risulterà provata la esistenza di detto limite in corrispondenza a quasi tutti gli istanti prescelti come iniziali per il moto del sistema, potendo tale limite non essere finito per quegli istanti iniziali per i quali esiste. Sarà invece dimostrata nel § 5, mercè opportuni accorgimenti, la esistenza del limite *finito* delle medie 1.2, medie valutate sul continuo, in corrispondenza a quasi tutti gli stati iniziali in $\mathfrak{S}$; si completerà tale dimostrazione con il riconoscere che il valore di tale limite è atto a rappresentare una proprietà di soluzione del sistema 1-1, § 6.

2. – Teorema di convergenza causale di HALMOS. (6).

Siano X e Y due spazi mensurali (7) di misure (8) m e p, rispettivamente. Sia S una trasformazione di Y in Y che conserva la misura p (9); ad ogni y in Y corrisponda una trasformazione di X in X, che conserva la misura m. Si supponga poi che la famiglia di trasformazione T_y sia misurabile (10). Si può considerare, una volta che si sia posto:

$$T_y^{(0)} = T_{S^0 y} = T_y,$$

(6) HALMOS riporta tale teorema con la denominazione di teorema ergodico casuale, si preferisce qui tuttavia riservare l'aggettivo di ergodico a quei teoremi che assicurano la costanza quasi ovunque dei limiti delle medie 1-2 e questo in accordo con la bibliografia classica al riguardo.

(7) Per spazio mensurale si intende (cfr. [4] cap. IV, pag. 73) un insieme di punti per il quale sia fissata una famiglia di sottoinsiemi, che noi supporremo chiusa rispetto alla unione numerabile e alla operazione di complemento, quando su tale famiglia di sottoinsiemi sia definita una funzione d'insieme non negativa (misura).

(8) Tali misure possono non essere finite. Si noti esplicitamente che nella formulazione di HALMOS viene inclusa l'ipotesi che dette misure siano entrambe finite. Tuttavia si può facilmente riconoscere che in assenza di tale ipotesi il teorema ergodico nell'enunciato qui riportato sussiste ancora (si veda per questo [3], pagg. 18-20).

(9) Cfr. nota (4).

(10) Per la nozione di famiglia misurabile di trasformazioni si veda [3], pag. 92.

il prodotto di trasformazioni:

$$T_y^{(k)} = T_{S^k y} \cdot T_{S^{k-1} y} \dots T_{Sy} \cdot T_y, \qquad \text{per } k \leqslant 1, \tag{2.1}$$

come pseudopotenza della trasformazione T_y di ordine k.

Si indichi ora con Q la trasformazione in sè dello spazio $X \times Y$, prodotto cartesiano di X e Y, definita dalla relazione:

$$Q(x, y) = (T_y x, Sy) \tag{2.2}$$

per la quale è quindi anche:

$$Q^j(x, y) = (T_y^{(i-1)} x, S^j y). \tag{2.3}$$

Tale trasformazione Q conserva la misura $m \cdot p$ definita su $X \times Y$ e sussiste per essa la seguente proposizione:

Teorema di convergenza casuale. – Per ogni funzione $g(x, y)$ definita in $X \times Y$ e su di esso integrabile ([11]) esiste il limite della media:

$$\frac{1}{n} \sum_0^{n-1}{}_j \, g(Q^j(x, y)) \tag{2.4}$$

al tendere di n all'infinito, quasi ovunque in $X \times Y$.

3. – Proprietà inerenti alla famiglia di trasformazioni $\left\{ T_{t^*}^{(t)} \right\}$.

Per le ipotesi formulate sulla esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy relativo al sistema 1.1, ipotesi che del resto traduce una proprietà essenziale dello spazio delle fasi Ω, se ω è il punto rappresentativo dello stato del sistema olonomo in esame all'istante t^* e ω', ω'' rappresentano a loro volta gli stati in cui, rispettivamente, esso si trova agli istanti $t^* + t'$ e $t^* + t''$, con le notazioni adottate, si avrà:

$$\omega' = T_{t^*}^{(t)} \omega \tag{3.1}$$

$$\omega'' = T_{t^*+t'}^{(t''-t')} \omega'$$

([11]) È sufficiente per la validità del teorema la ipotesi di misurabilità della $g(x, y)$ su $X \times Y$.

e da queste, di conseguenza:

$$\omega'' = T^{(t''-t')}_{t^*+t'} \cdot T^{(t')}_{t^*}\, \omega, \tag{3.2}$$

d'altra parte si sa che è anche:

$$\omega'' = T^{(t'')}_{t^*}\, \omega; \tag{3.3}$$

si può quindi concludere che le trasformazioni della famiglia $\{ T^{(t)}_{t^*} \}$ soddisfano identicamente alla relazione:

$$T^{(t'')}_{t^*} = T^{(t''-t')}_{t^*+t'} \cdot T^{(t')}_{t^*}, \tag{3.4}$$

qualunque siano cioè i valori attribuiti a t^*, t' e t''.

Se ci si limita a considerare, come avremo occasione di fare nel seguito, una successione di istanti in progressione aritmetica, quale:

$$\ldots,\ t^* - n\tau, \ldots,\ t^* - \tau,\ t^*,\ t^* + \tau,\ \ldots,\ t^* + n\tau, \ldots \tag{3.5}$$

ove n è un intero positivo qualunque, τ un intervallo di tempo prefissato. Posto:

$$T^{(t)}_{t^*+r\tau} = T^{(t)}_{r,\,t^*}, \tag{3.6}$$

con r intero relativo, dalla 3.4, quando sia:

$$t' = \tau, \qquad t'' = (k-1)\tau$$

e quando si sostituisca a t^* il valore $t^* + r\tau$, si ha in particolare:

$$T^{(k)}_{r,\,t^*} = T^{(k-1)}_{r+1,\,t^*} \cdot T_{r,\,t^*}, \tag{3.7}$$

avendo posto, per semplificare le notazioni:

$$T^{(k\tau)}_{r,\,t^*} = T^{(k)}_{r,t^*} \qquad \text{e} \qquad T^{(\tau)}_{r,t^*} = T_{r,t^*}. \tag{3.8}$$

Dalla 3.7, per induzione, segue poi:

$$T^{(k)}_{r,t^*} = T_{r+k,t^*} \cdot T_{r+k-1,t^*} \ldots,\ T_{r,t^*}. \tag{3.9}$$

Per ulteriormente lumeggiare tale relazione e soprattutto per giustificare il nome di pseudopotenza attribuito alla trasformazione $T^{(k)}_{r,t^*}$, si può prendere in esame il caso particolare in cui il moto dei punti rappresentativi del dato sistema olonomo è stazionario, il che accadrà quando i secondi membri delle 1.1 non dipendono esplicitamente dal tempo. In tale caso le modalità del moto del sistema non sono legate al particolare valore attribuito all'istante iniziale t^*, ma esclusivamente allo stato da esso assunto in detto istante. Di conseguenza la generica trasformazione T_{r,t^*}, qualunque siano i valori attribuiti a r ed a t^*, si identifica con quella trasformazione T di Ω in sè che allo stato ω posseduto dal sistema all'istante iniziale, qualunque esso sia, fa corrispondere lo stato ω' da esso, corrispondentemente, assunto dopo l'intervallo di tempo τ. Si riconosce così anche che la trasformazione $T^{(k)}_{r,t^*}$ va ad identificarsi con la potenza k-ma della trasformazione T anzidetta; ciò è in completo accordo con la 3.9.

4. – Prime conseguenze del teorema di convergenza casuale.

Si possono dare ora delle significative interpretazioni agli spazi mensurali X e Y, dei quali si parla nel teorema di HALMOS. Si può infatti procedere alle seguenti identificazioni: come spazio X si può assumere lo spazio delle fasi Ω, come spazio Y l'insieme $\mathfrak{T}$ dei reali, nel quale varia l'istante iniziale t^*, riguardando poi come loro sottoinsiemi misurabili i borelliani e come misura ad essi associata quella di LEBESGUE. Si può poi identificare la trasformazione S di Y in Y con la traslazione di ampiezza τ, che, operando su $\mathfrak{T}$, fa corrispondere al generico istante t^* l'istante $t^* + \tau$.

Dal confronto della 2.1 con la 3.9 si riconoscono quindi nelle trasformazioni $T^{(k)}_y$ le trasformazioni $T^{(k)}_{r,t^*}$ relative alla successione di istanti 3.5 e caratterizzate dalle soluzioni del sistema differenziale 1.1. Tali trasformazioni di Ω in se stesso, quando si ricordi la ammessa (vedi § 1) dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali, sono misurabili e conservano la misura di LEBESGUE, in virtù del teorema di LIOUVILLE, già ricordato (cfr. nota (3)).

Si riconosce inoltre nello spazio prodotto $X \times Y$, lo spazio delle linee orarie (11'), sottoinsieme dello spazio euclideo R_{2n+1} a $2n + 1$ dimensioni costituito da quei punti (ω, t) che con i valori delle loro coordinate $(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n\ t)$ individuano oltrechè lo stato del dato sistema olonomo, anche l'istante in cui tale stato viene assunto.

(11') Si veda in bibl. [1] pag. 330.

Sia ora $F(\omega, t)$ una qualunque funzione definita e integrabile sullo spazio delle linee orarie $\Omega \times \mathfrak{T}$; se ne consideri la media definita dalla relazione:

$$(4.1)\qquad \widehat{F}(\omega, t^*, n\cdot\tau) = \frac{F(\omega, t^*) + F(T_{0,t^*}\,\omega, t^* + \tau) + \ldots + F(T^{(n-1)}_{0,t^*}, t^* + (n-1)\,\tau)}{n} =$$

$$= \frac{1}{n\cdot\tau}\sum_{0}^{n-1}{}_i\, F(T^{(i)}_{0,t^*}\,\omega, t^* + i\cdot\tau),$$

ove si è posto:

$$T^{(0)}_{0,t^*}\,\omega \equiv \omega\,.$$

Tale media coincide a meno del fattore $1/\tau$ con la media aritmetica dei valori assunti dalla data funzione in corrispondenza agli istanti $t^* + i\cdot\tau (i = 0, 1, \ldots, (n-1))$ ed agli stati successivi che il sistema dinamico assume in detti istanti, quando lo stato in cui si trova all'istante iniziale t^* è quello individuato dal punto ω.

Dal teorema ergodico di HALMOS si ha quindi che per quasi tutti i punti (ω, t^*) in $\Omega \times \mathfrak{T}$ esiste il limite della media $\widehat{F}(\omega, t^*, n\cdot\tau)$ al tendere di n all'infinito.

Si può quindi prendere in esame la particolare funzione $F(\omega, t^*)$, definita come segue:

$$(4.2)\qquad F(\omega, t^*) = \int_0^{\tau} f(T^{(t)}_{t^*}\,\omega, t^* + t)\,\mathrm{d}t$$

ove con $f(\omega, t)$ si è indicata una funzione definita in $\Omega \times \mathfrak{T}$ e ivi soddisfacente le ipotesi precisate per essa nel § 1.

Per tale funzione si ha:

$$(4.3)\qquad F(T_{0,t^*}\,\omega, t^* + \tau) = \int_0^{\tau} f(T^{(t)}_{t^*+\tau}\cdot T_{0,t^*}\,\omega, t^* + \tau + t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\tau}^{2\tau} f(T^{(t)}_{t^*}\,\omega, t^* + t)\,\mathrm{d}t,$$

e in generale:

$$(4.4)\qquad F(T^{(i)}_{0,t^*}\,\omega, t^* + i\cdot\tau) = \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} f(T^{(t)}_{t^*}\,\omega, t^* + t)\,\mathrm{d}t,$$

da questa risulta evidente che la media temporale della particolare funzione 4-2, presa in esame, può essere scritta nella forma seguente:

$$\widehat{F}(\omega,\ t^*,\ n\cdot\tau) = \frac{1}{n\cdot\tau}\sum_{0}^{n-1}{}_i\ F(T^{(i)}_{0,t^*}\ \omega,\ t^* + i\cdot\tau) = \tag{4.5}$$

$$= \frac{1}{n\cdot\tau}\int_0^{n\cdot\tau} f(T^{(t)}_{t^*}\ \omega,\ t^* + t)\ dt\,.$$

Per quanto stabilito, quale espressiva traduzione del teorema di HALMOS, nei confronti delle medie $\widehat{F}(\omega,\ t^*,\ n\cdot\tau)$ si può così riconoscere che l'esistenza del limite delle medie:

$$\frac{1}{n\cdot\tau}\int_0^{n\cdot\tau} f(T^{(t)}_{t^*}\ \omega,\ t^* + t)\ dt \tag{4.6}$$

quasi ovunque in $\Omega \times \mathfrak{T}$, è una ulteriore conseguenza del teorema di convergenza casuale.

5. – Proprietà delle medie temporali nel discreto. Convergenza ad un limite finito delle medie temporali nel continuo.

Si consideri la media temporale di una generica funzione definita e misurabile in $\Omega\times\mathfrak{T}$ e sommabile in Ω per ogni valore di t, media definita dalla relazione:

$$\widehat{f}(\omega,\ t^*,\ \Omega) = \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta} f(T^{(t)}_{t^*}\ \omega,\ t^* + t)\ dt, \tag{5.1}$$

ove si pensa Θ variabile su tutto l'insieme dei reali $\mathfrak{T}$. Si vuole ora riconoscere:

a) che esiste il limite della media 5.1 al tendere di Θ all'infinito su $\mathfrak{T}$, quasi ovunque in $\Omega \times \mathfrak{T}$.

b) che tale limite è quasi ovunque finito in $\Omega \times \mathfrak{T}$.

Per conseguire più agevolmente tali scopi si supporrà che in corrispondenza alla data funzione $f(\omega,\ t)$ sia possibile determinare una funzione di fase, non negativa, $\varphi(\omega)$, definita e sommabile in Ω, tale che per ogni valore del tempo t e in tutto Ω si abbia:

$$(5.2) \qquad | f(\omega, t) | \leqslant \varphi(\omega) \text{ (12)} .$$

Con questa ipotesi, del resto sufficientemente lata, si può intanto riconoscere che il limite delle medie al tendere di Θ all'infinito su una particolare successione di istanti, quali la 4.6, è quasi ovunque finito in $\Omega \times \mathfrak{T}$. Si consideri per questo la ovvia diseguaglianza:

$$(5.3) \qquad \int_{\Omega} \left| \frac{1}{n\cdot\tau} \int_0^{n\cdot\tau} f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^* + t)\, \mathrm{d}t \right| \mathrm{d}\omega \leqslant \int_{\Omega} \frac{1}{n\cdot\tau} \cdot \int_0^{n\cdot\tau} | f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ ft^* + t) |\, \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}\omega$$

per la 5.2 si ha poi:

$$(5.4) \qquad \int_{\Omega} \frac{1}{n\cdot\tau} \int_0^{n\cdot\tau} | f(T_{t^*}^{(t)}\omega,\ t^* + t) |\, \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}\omega \leqslant \frac{1}{n\cdot\tau} \int_{\Omega} \int_0^{n\cdot\tau} \varphi(T_{t^*}^{(t)}\,\omega)\, \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}\omega,$$

d'altra parte, in virtù del teorema di FUBINI (13), è anche:

$$(5.5) \qquad \frac{1}{n\cdot\tau} \int_{\Omega} \int_0^{n\cdot\tau} \varphi(T_{t^*}^{(t)}\,\omega)\, \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}\omega = \frac{1}{n\cdot\tau} \int_0^{n\cdot\tau} \int_{\Omega} \varphi(T_{t^*}^{(t)}\,\omega)\, \mathrm{d}\omega \cdot \mathrm{d}t = \int_{\Omega} \varphi(\omega)\, \mathrm{d}\omega;$$

si ha quindi in definitiva:

$$(5.6) \qquad \int_{\Omega} \left| \frac{1}{n\cdot\tau} \int_0^{n\cdot\tau} f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^* + t)\, \mathrm{d}t \right| \cdot \mathrm{d}\omega \leqslant \int_{\Omega} \varphi(\omega)\, \mathrm{d}\omega,$$

---

(12) Ipotesi questa non necessaria per l'esistenza del limite finito delle medie, prese in esame, quasi ovunque in $\Omega \times \mathfrak{T}$. La sommabilità della $f(\omega, t)$ su $\Omega \times \mathfrak{T}$ è infatti, anche essa, sufficiente ad assicurare la sommabilità della media $f(\omega, t^*, \tau)$ che risulterà quindi finita quasi ovunque in $\Omega \times \mathfrak{T}$. Vedasi per questo [3] e si confronti in esso pag. 92 con pag. 20.

(13) Cfr. in bibl. [4] pagg. 135-136.

da questa diseguaglianza, per il lemma di FATOU [14], segue che il limite delle medie temporali:

$$(5.7) \qquad \widehat{f}(\omega,\ t^*,\ \tau) = \lim_{n\to+\infty} \widehat{f}(\omega,\ t^*,\ n\cdot\tau)$$

è per ogni valore attribuito a t^* e a τ, una funzione assolutamente integrabile in Ω e di conseguenza quasi ovunque finita in $\Omega \times \mathfrak{T}$ [15].

Come corollario della provata esistenza del limite finito delle medie 4.6 quasi ovunque in $\Omega \times \mathfrak{T}$ [16] si può ancora riconoscere che è:

$$(5.8) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\cdot\tau} \int_{(n-1)}^{n\cdot\tau} f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^* + t)\,dt = 0$$

a meno di un insieme di punti di misura nulla in $\Omega \times \mathfrak{T}$. Si osservi per questo che le medie $\widehat{F}(\omega,\ t^*,\ n\cdot\tau)$ soddisfano alla identità:

$$(5.9) \qquad \widehat{F}(\omega,\ t^*,\ n\cdot\tau) - \widehat{F}(\omega,\ t^*,\ (n-1)\cdot\tau) = -\frac{1}{n}\,\widehat{F}(\omega,\ t^*,\ (n-1)\cdot\tau) + \frac{1}{n\cdot\tau}\int_{(n-1)\cdot\tau}^{n\cdot\tau} f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^* + t)\,dt$$

per essere quasi ovunque finito il limite delle medie $\widehat{F}(\omega,\ t^*,\ n\cdot\tau)$ sarà anche, quasi ovunque in $\Omega \times \mathfrak{T}$:

$$(5.10) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,\widehat{F}(\omega,\ t^*,\ (n-1)\cdot\tau) = 0\,.$$

Poichè d'altra parte è nullo anche il limite della espressione a primo membro della 5.9, la 5.8 risulta verificata.

---

[14] Cfr. in bibl. [4] pag. 113.

[15] Cfr. in bibl. [4] pag. 102 e [8] pag. 120.

[16] I punti eccezionali essendo quelli in corrispondenza ai quali o non esiste il limite delle medie ovvero esiste ma non è finito.

Si può ora prendere in esame la media [17]:

$$\frac{1}{\Theta}\int_0^\Theta f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^*+t)\,dt \tag{5.11}$$

con Θ variabile sull'insieme dei reali $\mathfrak{T}$. Si indichi con $[\Theta]$ il massimo multiplo intero di τ per il quale sia:

$$n\cdot\tau \leqslant \Theta.$$

La media 5.11 può quindi scriversi come segue:

$$\frac{1}{\Theta}\int_0^\Theta f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^*+t)\,dt=\frac{1}{\Theta}\int_0^{[\Theta]} f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^*+t)\,dt+\frac{1}{\Theta}\int_{[\Theta]}^{\Theta} f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^*+t)\,dt. \tag{5.12}$$

Poichè è certo:

$$\lim_{\Theta\to+\infty}\frac{[\Theta]}{\Theta}=1$$

è anche:

$$\lim_{\Theta\to+\infty}\frac{1}{\Theta}\int_0^{[\Theta]} f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^*+t)\,dt=\lim_{\Theta\to+\infty}\frac{[\Theta]}{\Theta}\cdot\frac{1}{[\Theta]}\int_0^{[\Theta]} f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^*+t)\,dt=\widehat{f}(\omega,\ t^*,\ \tau) \tag{5.13}$$

per quei punti $(\omega,\ t^*)$ per i quali quest'ultimo esiste in $\Omega\times\mathfrak{T}$. D'altra parte è certo:

$$\left|\frac{1}{\Theta}\int_{[\Theta]}^{\Theta} f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^*+t)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{\Theta}\int_{[\Theta]}^{\Theta}|\,f(T_{t^*}^{(t)}\omega,\ t^*+t)\,|\,dt\leqslant\frac{1}{[\Theta]}\int_{[\Theta]}^{[\Theta]+1}\left|f(T_{t^*}^{(t)}\omega,\ t^*+t)\right|dt, \tag{5.14}$$

---

[17] Cfr. con il procedimento seguito in [9] pag. 68 per il caso stazionario, onde constatarne le analogie.

e poichè dalla 5.8 applicata lla funzione $|f(\omega, t)|$ si ha:

$$\lim_{[\Theta]\to+\infty} \frac{1}{[\Theta]} \int_{[\Theta]}^{[\Theta]+1} |f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^* + t)|\, dt = 0, \tag{5.15}$$

si avrà anche:

$$\lim_{\Theta\to+\infty} \frac{1}{\Theta} \int_{[\Theta]}^{\Theta} f(T_{t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^* + t)\, dt = 0\,.$$

Risulta così provata in base alla 5.12 l'esistenza del limite finito, quasi ovunque in $\Omega \times \mathfrak{S}$, della media 5.11. Indicato poi con $\widehat{f(\omega,\ t^*)}$ tale limite, poichè, sempre per la 5.12, è:

$$\widehat{f(\omega,\ t^*)} = \widehat{f(\omega,\ t^*,\ \tau)}, \tag{5.16}$$

qualunque sia τ, la funzione $\widehat{f(\omega,\ t^*)}$, quasi ovunque finita in $\Omega \times \mathfrak{S}$, è integrabile su Ω, per quei valori di t^* per i quali è definita, risultando tale la $\widehat{f(\omega,\ r^*,\ \tau)}$.

6. – Carattere invariante della media $\widehat{f(\omega\ t^*)}$ e proprietà dei sottoinsiemi di non convergenza ad un limite finito.

È possibile riconoscere che per le medie sul discreto $\widehat{f(\omega,\ t^*,\ \tau)}$ sussiste la seguente proprietà di invarianza:

$$\widehat{f(\omega,\ t^*,\ \tau)} = \widehat{f(T_{0,t^*}\,\omega,\ t^* + \tau,\ \tau)}; \tag{6.1}$$

si ha infatti:

$$\frac{1}{n\cdot\tau} \sum_0^{n-1}{}_i\, f(T_{0,t^*}^{(t)}\,\omega,\ t^* + i\cdot\tau) = \frac{1}{n\cdot\tau} \sum_1^{n-1}{}_i\, f(T_{1,t^*}^{(i-1)}\cdot T_{0,t^*}\,\omega,\ t^* + i\cdot\tau) + \tag{6.2}$$

$$+ \frac{1}{n\cdot\tau} f(\omega,\ t^*),$$

dalla quale segue:

$$\widehat{f(\omega,\ t^*,\ \tau)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\cdot\tau} \sum_0^{n-1}{}_i\, f(T_{0,t^*}^{(i)}\,\omega,\ t^* + i\cdot\tau) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\cdot\tau} \sum_0^{n-1}{}_i\, f(T_{0,t^*+\tau}^{(i)}\cdot T^{0,t^*}\,\omega,\ t^* + i\cdot\tau + \tau) = \widehat{f(T_{0,t^*}\,\omega,\ t^* + \tau,\ \tau)}\,,$$

cioè l'asserto. Dalla 6.1, per induzione, si ha la relazione più generale:

$$\widehat{f}(\omega,\ t^*,\ \tau) = \widehat{f}(T^{(k)}_{0,t^*}\,\omega,\ t^* + k\cdot\tau,\ \tau)\,. \tag{6.3}$$

Dalla eguaglianza 5.16 valida identicamente in τ, si avrà di conseguenza che è:

$$\widehat{f}(\omega,\ t^*) = \widehat{f}(T^{(\bar{t})}_{t^*}\,\omega,\ t + \bar{t}) \tag{6.4}$$

per ogni valore di $\bar{t}$ in $\mathfrak{T}$.

La 6.4 assicura la invarianza della media temporale di ogni funzione misurabile su $\Omega \times \mathfrak{T}$ e sommabile in Ω [18] lungo la generica linea oraria in tale spazio; ciò vuol dire che la media temporale anzidetta esprime con il suo valore una proprietà di linea oraria, ovvero di soluzione del sistema 1.1. Dall'essere le linee orarie in corrispondenza biunivoca con i punti dello spazio Ω, che possono essere riguardati come quelli rappresentativi dello stato del dato sistema olonomo all'istante $t^* = 0$, segue anche che ha misura di LEBESGUE nulla in Ω il sottoinsieme dei punti in corrispondenza ai quali o non esiste o esiste ma non è finito il limite delle medie 5.11. Dal punto di vista propriamente euleriano il risultato conseguito si enuncia nei seguenti termini: ha misura nulla lo insieme dei punti geometrici di Ω tali che in corrispondenza alle traiettorie dei punti rappresentativi che ad un dato istante t^* transitano per essi non esiste o esiste ma non è finito il limite delle rispettive medie temporali di una qualunque funzione $f(\omega,\ t)$ che soddisfa le ipotesi formulate per essa nel § **1**.

7. – Conclusioni.

Quanto è stato provato assicura l'esistenza del limite finito delle medie temporali quasi ovunque nello spazio delle fasi, per ogni valore della variabile temporale. Questo risultato pone in luce una proprietà tutt'altro che evidente, ma generale, delle soluzioni di un sistema canonico di equazioni differenziali quale è il sistema 1.1; si riconosce che tale proprietà, esistenza del limite finito delle medie temporali, compete anche alle soluzioni di un qualunque sistema non autonomo di equazioni differenziali:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ t) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{7.1}$$

---

[18] E ivi soddisfacente la 5.2.

quando esista, per una opportuna famiglia di sottoinsiemi (significativi) del relativo spazio delle fasi, una misura invariante rispetto alle trasformazioni $T_{t^*}^{(t)}$ da esse caratterizzate. Se, in particolare, i secondi membri delle 7.1 sono le componenti di un campo vettoriale a divergenza nulla, se cioè si ha:

$$\sum_{1}^{n} {}_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0$$

il teorema di LIOUVILLE assicura ancora, come noto, la invarianza della misura di LEBESGUE rispetto alle trasformazioni $T_{t^*}^{(t)}$ relative alle soluzioni del predetto sistema.

Dall'esame del procedimento seguito da KAKUTANI e ripreso da HALMOS per la dimostrazione del teorema di convergenza casuale si nota che questo viene ricondotto al teorema di convergenza puntuale di BIRKHOFF, del quale si conoscono molteplici dimostrazioni [5]; si può a questo punto osservare, e questo sarà oggetto di una nota successiva, che senza ricondursi al caso stazionario (caso cui si riferisce il teorema di BIRKHOFF) bensì generalizzando e perfezionando un procedimento di F. RIESZ [10] è agevole pervenire direttamente alla esistenza del limite finito delle medie temporali nel caso non stazionario, conseguendo così un risultato che contiene come caso particolare quello analogo relativo al caso stazionario.

Non sarebbe poi privo di interesse lo stabilire per il caso non stazionario delle condizioni sufficienti, late quanto più possibile, per la costanza quasi ovunque delle medie temporali, nello spirito (problema ergodico ristretto) della nota [11] e per i motivi che in tale nota sono stati specificati.

Bibliografia.

[1] T. LEVI CIVITA e U. AMALDI: *Lezioni di Meccanica razionale*, Vol. II, parte 2ª, Zanichelli, Bologna (1952).

[2] E. T. WHITTAKER: *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Dover Publ., New York, (1944).

[3] P. R. HALMOS: *Lectures on ergodic theory*, ed. by the Math. Soc. of Japan, Tokyo (1956).

[4] P. R. HALMOS: *Measure Theory*, Van Nostrand Co. Inc., New York (1951).

[5] P. R. HALMOS: *Measurable transformations*, Bull. of the A. M. S. pag. 1015 (1949).

[6] S. KAKUTANI: *Random ergodic theorems and Markoff processes with a stable distribution*, Proc. of the second Berkley Symposium, (1951) pag. 237.

[7] M. ULAM e J. VON NEUMANN: *Random ergodic theorems*, Bull. Amer. Math. Soc. (1945), p. 660.

[8] M. LOEVE: *Probability Theory*, Van Nostrand Co. Inc., New York (1955).

[9] A. BLANC-LAPIERRE, P. CASAL e A. TORTRAT: *Méthodes mathématiques de la Mécanique statistique*, Masson & Cie, éd., Paris (1959).

[10] F. RIESZ: *Sur la théorie ergodique*, Comment. Math. Helv. **17**, 221-239, (1944-45).

[11] B. FORTE: *Sul problema ergodico ristretto nella statistica dei sistemi olonomi*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, (3) **13**, (1959).