Riv. Mat. Univ. Parma 10 (1959), 145-152

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Su una classe di equazioni alle differenze, del tipo di Bessel. (**)

1. - Introduzione.

Per le equazioni differenziali di BESSEL

$$x\, y''(x) + 2n\, y'(x) - a^2\, x\, y(x) = 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{1}$$

dove a è una data costante, è stato indicato [1] un certo procedimento risolutivo che ha condotto all'integrale generale nella forma

$$y(x) = (\mathrm{D}_x^2 - a^2)^{n-1}\, \frac{c_1\, e^{ax} + c_2\, e^{-ax}}{x}, \tag{2}$$

con $\mathrm{D}_x = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$, e c_1, c_2 costanti arbitrarie.

Nel presente lavoro individuo una classe di equazioni alle differenze finite, del secondo ordine, soddisfacenti ai due requisiti:

1°) si possano riguardare, nel Calcolo delle differenze finite, come le corrispondenti delle (1) nel Calcolo infinitesimale (per questo motivo si diranno *del tipo di Bessel*);

2°) si possa ad esse applicare un procedimento risolutivo che, nel Calcolo delle differenze finite, sia il corrispondente di quello seguito [2] per le (1).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 30-X-1959.
[1] A. MAMBRIANI, *Genesi ed integrazione in termini finiti di vaste classi d'equazioni differenziali lineari, aventi per coefficienti delle funzioni razionali intere*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **9** (1940), 27-43; cfr., in particolare, pp. 27-29.
[2] Cfr. loc. cit. in [1].

Tali equazioni alle differenze, del tipo di BESSEL, sono le seguenti:

$$(1)_h \qquad x\, Y^{(2,h)}(x) + 2nY^{(1,h)}(x+h) - a^2\, xY(x) = 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

dove

$$Y^{(1,h)}(x) = \frac{1}{h}\left\{ Y(x+h) - Y(x) \right\},$$

$$Y^{(2,h)}(x) = \frac{1}{h^2}\left\{ Y(x+2h) - 2\,Y(x+h) + Y(x) \right\}$$

e $a = a(x,\ h)$ è una data funzione periodica di x, col periodo h (in particolare una costante). Osservo che l'equazione $(1)_h$ può anche scriversi nella forma

$$(x+2nh)\ Y(x+2h) - 2\,(x+nh)\ Y(x+h) + (1 - a^2 h^2)\ x\ Y(x) = 0.$$

Applicando alla $(1)_h$ il procedimento risolutivo sopra accennato, se ne ottiene la *soluzione generale* nella forma

$$(2)_h \qquad Y(x) = (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{n-1}\, \frac{\pi_1 \cdot (1+ah)^{x/h} + \pi_2 \cdot (1-ah)^{x/h}}{x},$$

dove $\mathrm{D}^2_{x,h}$ è l'operatore definito da

$$\mathrm{D}^2_{x,h}\, \varphi(x) = \varphi^{(2,h)}(x) = \frac{1}{h^2}\left\{ \varphi(x+2h) - 2\,\varphi(x+h) + \varphi(x) \right\},$$

e $\pi_1 = \pi_1(x,\ h)$, $\pi_2 = \pi_2(x,\ h)$ sono arbitrarie funzioni periodiche di x, col periodo h [3].

Il parallelismo che intercede fra l'equazione differenziale (1) e l'equazione alle differenze $(1)_h$ è evidente. Invece il parallelismo intercedente fra le rispet-

---

[3] Le operazioni indicate nel secondo membro di $(2)_h$ sono facilmente eseguibili. Infatti, indicando per brevità con $f(x)$ il rapporto figurante in tale secondo membro, si ha

$$Y(x) = (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{n-1}\, f(x) = \sum_0^{n-1}{}_r\, (-1)^{n-r-1} \binom{n-1}{r}\, a^{2(n-r-1)}\ \mathrm{D}^{2r}_{x,h}\, f(x),$$

dove è

$$\mathrm{D}^{2r}_{x,h}\, f(x) = \frac{1}{h^{2r}} \sum_0^{2r}{}_s\, (-1)^s \binom{2r}{s} f(x+sh)\,.$$

tive soluzioni (2) e $(2)_h$ può sembrare meno manifesto, ma risulta chiaramente dalle constatazioni seguenti:

1°) l'operatore $D_{x,h}$ corrisponde all'operatore D_x;

2°) le funzioni

$$(1 + ah)^{x/h}, \qquad (1 - ah)^{x/h}$$

sono entrambe del tipo $(1 + \alpha h)^{x/h}$ [con $\alpha = \alpha(x, h)$ funzione periodica di x, col periodo h], e quest'ultima funzione è da ritenersi, nel Calcolo delle differenze finite, come la corrispondente della funzione esponenziale $e^{\alpha x}$ nel Calcolo infinitesimale: ciò discende dall'osservare che, se ad esempio α è un numero prefissato, si ha

$$\lim_{h \to 0} (1 + \alpha h)^{x/h} = e^{\alpha x}$$

ed anche

$$D_{x,h} (1 + \alpha h)^{x/h} = \alpha \cdot (1 + \alpha h)^{x/h}, \tag{3}$$

in analogia con $D_x e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$. La (3) però sussiste in generale per $\alpha = \alpha(x, h)$, funzione periodica di x, col periodo h (come inizialmente si era supposto).

Ad esempio, le particolari equazioni alle differenze $(1)_h$ date da

$$x\, Y^{(2,h)}(x) + 2\, Y^{(1,h)}(x + h) - x\, Y(x) = 0,$$

$$x\, Y^{(2,h)}(x) + 4\, Y^{(1,h)}(x + h) - x\, Y(x) = 0$$

hanno ordinatamente le soluzioni

$$Y(x) = \frac{\pi_1 \cdot (1 + h)^{x/h} + \pi_2 \cdot (1 - h)^{x/h}}{x},$$

$$Y(x) = (D^2_{x,h} - 1)\, \frac{\pi_1 \cdot (1 + h)^{x/h} + \pi_2 \cdot (1 - h)^{x/h}}{x}.$$

2. - Alcune premesse.

a) Ricordiamo la formula

$$\mathrm{D}^n_{x,h}\,(u\cdot v) = (u\cdot v)^{(n,h)} = \sum_{0}^{n}{}_{\nu} \binom{n}{\nu}\, u^{(\nu,h)}\,{}_{\nu h}v^{(n-\nu,h)}, \tag{4}$$

dove $u = u(x)$, $v = v(x)$ sono due date funzioni e si è posto, per brevità, ${}_{\nu h}v = v\,(x + \nu h)$.

Per operatori del tipo

$$\mathfrak{L}_{x,h} \equiv \sum_{0}^{m}{}_{r}\, p_r\, \mathrm{D}^r_{x,h}\,,$$

con $p_r = p_r(x)$, applicando la (4) risulta

$$\mathfrak{L}_{x,h}\,(u\cdot v) = \sum_{0}^{m}{}_{r}\, p_r\, \mathrm{D}^r_{x,h}\,(u\cdot v) = \sum_{0}^{m}{}_{r}\; p_r \sum_{0}^{r}{}_{\nu} \binom{r}{\nu}\, u^{(\nu,h)}\,{}_{\nu h}v^{(r-\nu,h)} =$$

$$= \sum_{0}^{m}{}_{\nu} \frac{u^{(\nu,h)}}{\nu\,!} \sum_{\nu}^{m}{}_{r}\, r(r-1)\ldots(r-\nu+1)\; p_r\; {}_{\nu h}v^{(r-\nu,h)}.$$

Ponendo poi

$$\mathfrak{L}^{(\nu)}_{x,h}\, v \equiv \sum_{\nu}^{m}{}_{r}\, r\,(r-1)\ldots(r-\nu+1)\; p_r\, {}_{\nu h}v^{(r-\nu,h)},$$

si ha

$$\mathfrak{L}_{x,h}\,(u\cdot v) = \sum_{0}^{m}{}_{\nu} \frac{u^{(\nu,h)}}{\nu\,!}\, \mathfrak{L}^{(\nu)}_{x,h}\, v. \tag{5}$$

b) Poniamo qui, per brevità,

$$x^{n|h} = x\,(x-h)\,(x-2h)\ldots(x-(n-1)\,h)\,. \tag{6}$$

Questi prodotti fanno, nel Calcolo delle differenze finite, la parte delle potenze nel Calcolo infinitesimale, come si rileva anche osservando che è

$$\mathrm{D}_{x,h}\, x^{n|h} = n\; x^{n-1|h} \tag{7}$$

(al limite per $h \to 0$ risulta $\mathrm{D}_x\, x^n = n\; x^{n-1}$).

c) L'equazione alle differenze $y^{(2,h)}(x) - a^2\, y(x) = 0$, con $a = a(x,\ h)$ funzione periodica di x col periodo h, si può scrivere

$$(8)\qquad (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)\, y(x) \equiv \underleftarrow{(\mathrm{D}_{x,h} - a)\,(\mathrm{D}_{x,h} + a)}\, y(x) = 0,$$

dove la speciale sottolineatura sta ad evitare l'uso di parentesi e a ricordare che le varie operazioni applicate alla funzione $y(x)$ procedono da destra verso sinistra. Valgono le identità

$$\mathrm{D}_{r,h} + a \equiv \underleftarrow{(1 - ah)^{\frac{x}{h}+1}\, \mathrm{D}_{x,h}\, (1 - ah)^{-\frac{x}{h}}}\ ,$$

$$\mathrm{D}_{x,h} - a \equiv \underleftarrow{(1 + ah)^{\frac{x}{h}+1}\, \mathrm{D}_{x,h}\, (1 + ah)^{-\frac{x}{h}}}\ ,$$

onde

$$(9)\qquad \mathrm{D}^2_{x,h} - a^2 \equiv \underleftarrow{(1 - a^2 h^2)\,(1 + ah)^{x/h}\, \mathrm{D}_{x,h} \left(\frac{1 - ah}{1 + ah}\right)^{x/h} \mathrm{D}_{x,h}\, (1 - ah)^{-x/h}}\ .$$

L'equazione (8) si può pertanto scrivere nella forma

$$\underleftarrow{\mathrm{D}_{x,h} \left(\frac{1 - ah}{1 + ah}\right)^{x/h} \mathrm{D}_{x,h}\, (1 - ah)^{-x/h}}\, y(x) = 0\ .$$

Invertendo qui successivamente gli operatori del primo membro ed indicando con $\pi_r = \pi_r(x,\ h)$ $(r = 0,\ 1,\ 2)$ delle arbitrarie funzioni periodiche di x, col periodo h, si ottiene

$$\underleftarrow{\left(\frac{1 - ah}{1 + ah}\right)^{x/h} \mathrm{D}_{x,h}\, (1 - ah)^{-x/h}}\, y(x) = \pi_0\ ,$$

$$\underleftarrow{\mathrm{D}_{x,h}\, (1 - ah)^{-x/h}}\, y(x) = \pi_0 \cdot \left(\frac{1 + ah}{1 - ah}\right)^{x/h},$$

$$(1 - ah)^{-x/h}\, y(x) = \pi_1 \cdot \left(\frac{1 + ah}{1 - ah}\right)^{x/h} + \pi_2 \qquad \left(\pi_1 = \frac{2a}{1 - ah}\,\pi_0\right),$$

ed infine, come formula risolutiva di (8),

$$(10)\qquad y(x) = \pi_1 \cdot (1 + ah)^{x/h} + \pi_2 \cdot (1 - ah)^{x/h}.$$

Si ha cioè

$$(10') \qquad (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{-1}\, 0 = \pi_1 \cdot (1 + ah)^{x/h} + \pi_2 \cdot (1 - ah)^{x/h}.$$

d) L'equazione

$$(11) \qquad (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^2\, y(x) = 0,$$

in base a (10') e alla decomposizione (9), si può scrivere nella forma

$$(1 - a^2 h^2)\,(1 + ah)^{x/h}\, \mathrm{D}_{x,h} \left(\frac{1 - ah}{1 + ah}\right)^{x/h} \mathrm{D}_{x,h}\, (1 - ah)^{-x/h}\, y(x) =$$

$$= \pi_1 \cdot (1 + ah)^{x/h} + \pi_2 \cdot (1 - ah)^{x/h},$$

da cui, procedendo come in c),

$$(12) \qquad y(x) = x \left\{ \pi_{0,1} \cdot (1 + ah)^{x/h} + \pi_{0,2} \cdot (1 - ah)^{x/h} \right\} +$$

$$+ \pi_{1,1} \cdot (1 + ah)^{x/h} + \pi_{1,2} \cdot (1 - ah)^{x/h},$$

dove le $\pi_{r,s}$ sono arbitrarie funzioni periodiche di x, col periodo h. Posto, per brevità,

$$(13) \qquad \varphi_r = \pi_{r,1} \cdot (1 + ah)^{x/h} + \pi_{r,2} \cdot (1 - ah)^{x/h} \qquad (r = 0, 1, \ldots),$$

si ha dunque, come formula risolutiva di (11),

$$(12') \qquad y(x) = x\, \varphi_0 + \varphi_1 .$$

Analogamente, per l'equazione

$$(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^3\, y(x) = 0$$

si ottiene la formula risolutiva

$$y(x) = x^{2|h}\, \varphi_0 + x\, \varphi_1 + \varphi_2,$$

dove $x^{2|h} = x\,(x - h)$ può anche essere sostituito con x^2 [la preferenza per $x^{2|h}$ si comprende tenendo presente la (7)].

In generale, per l'equazione

$$(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^n\, y(x) = 0$$

si ha la formula risolutiva

(14) $$y(x) = x^{n-1|h}\,\varphi_0 + x^{n-2|h}\,\varphi_1 + \dots + x\,\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1},$$

dove le φ_r $(r = 0, 1, \dots, n-1)$ hanno le espressioni date da (13). Si ha cioè, a generalizzazione di (10′),

(14′) $$(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{-n}\, 0 = x^{n-1|h}\,\varphi_0 + x^{n-2|h}\,\varphi_1 + \dots + x\,\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1}$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

3. - Risoluzione di $(1)_h$.

L'equazione alle differenze $(1)_h$ si può scrivere nella forma

$$x\,(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)\,Y(x) + 2n\,\mathrm{D}_{x,h}\,Y(x+h) = 0$$

ed anche

$(1)'_h$ $$x\,(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^n\,(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{1-n}\,Y(x) +$$
$$+\, n\cdot 2\,\mathrm{D}_{x,h}\,(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{n-1}\,(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{1-n}\,Y(x+h) = 0\,.$$

Se ora nella (5) assumiamo

$$u = x, \qquad v = (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{1-n}\,Y(x), \qquad \mathfrak{L}_{x,h} = (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^n,$$

si constata che il secondo membro di (5) diventa esattamente il primo membro di $(1)'_h$: ne segue che l'equazione $(1)'_h$ può essere scritta

$$\underline{(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^n\, x\,(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{1-n}}\;Y(x) = 0\,.$$

Di qui, invertendo successivamente gli operatori del primo membro, si ha

(15) $$Y(x) = \underline{(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{n-1}\,\frac{1}{x}\,(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{-n}}\;0\,,$$

che è la formula risolutiva di $(1)_h$. Eseguendo ora i calcoli indicati nel secondo membro di (15), si ha, in virtù di (14'),

$$Y(x) = (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{n-1} \left[\frac{1}{x} \left\{ x^{n-1|h} \varphi_0 + x^{n-2|h} \varphi_1 + \ldots + x \varphi_{n-2} + \varphi_{n-1} \right\} \right],$$

ossia, tenendo presente (6),

$$Y(x) = (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{n-1} \left\{ (x-h)^{n-2|h} \varphi_0 + (x-h)^{n-3|h} \varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-2} \right\} +$$

$$+ (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{n-1} \frac{\varphi_{n-1}}{x}.$$

E poichè il primo termine del secondo membro è nullo, potendo esso scriversi nella forma

$$\underline{(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{n-1} (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{1-n}}\, 0,$$

risulta

$$Y(x) = (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{n-1} \frac{\varphi_{n-1}}{x},$$

a quale non è altro che la $(2)_h$ riportata nella introduzione.