Riv. Mat. Univ. Parma 10 (1959), 119-129

G. CAPRIZ (*)

Sui casi di « incompatibilità » tra l'elastostatica classica e la teoria delle deformazioni elastiche finite. (**)

Questa Nota rappresenta un complemento a miei precedenti lavori (1) nei quali avanzavo la congettura che i casi di « incompatibilità » tra la elastostatica classica e la teoria delle deformazioni elastiche finite, messi in evidenza dal Prof. SIGNORINI (2), fossero dovuti alla seguente circostanza: certe volte le soluzioni delle equazioni della elastostatica linearizzata rappresentano approssimazioni a stati iniziali di un solido elastico, donde si svolge un fenomeno di moto durante il quale le forze di inerzia sono infinitesime del secondo ordine almeno; sicchè il carattere dinamico del fenomeno rimane all'oscuro finchè non si esca dalla approssimazione lineare.

(*) Indirizzo: Nelson Research Laboratories, English Electric Co., Ltd, Stafford, England.

(**) Questo lavoro è tratto dalla comunicazione *Successive approximations in problems of elastic stability* letta al Congresso dei Matematici tenuto ad Edimburgo tra il 14 e il 21 agosto 1958. Tale comunicazione è già apparsa come Report Nsy 99 dei Nelson Research Labs. della English Electric Co., Ltd., Stafford, ed il presente lavoro è pubblicato col permesso del Director of Research. — Ricevuto il 21-I-1959.

(1) *Sopra le deformazioni elastiche finite di un solido tubolare*, Rend. Mat. e Appl. Roma **15** (1956), 228-262; *Alcune osservazioni su problemi di instabilità delle travi elastiche*, Rend. Mat. e Appl. Roma **16** (1957), 23-42; *Alcune osservazioni sulla instabilità di una trave sollecitata a torsione*, Riv. Mat. Univ. Parma **8** (1957), 145-160.

(2) A. SIGNORINI: *Trasformazioni termoelastiche finite ecc.*, Atti XXIV Riunione S.I.P.S., Vol. **3**, pp. 17-18; *Trasformazioni termoelastiche finite* (Memoria II), Ann. Mat. Pura e Appl. **30** (1949), 1-72; *Un semplice esempio di « incompatibilità » tra la elastostatica classica e la teoria delle deformazioni elastiche finite*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **8** (1950), 276-281.

Mettevo anche in evidenza come esempi di « incompatibilità » si potessero agevolmente costruire nella teoria delle travi elastiche e come un procedimento di approssimazioni successive proposto dal Prof. SIGNORINI (3) si prestasse a chiarire certi punti poco soddisfacenti nella teoria della stabilità delle travi elastiche. Non ho però condotto prima d'ora i calcoli necessari fino al punto in cui è possibile una discussione sul carattere dinamico delle approssimazioni successive nei proposti esempi di « incompatibilità ».

È quello che mi propongo di fare qui — per rendere più plausibile la congettura a cui ho fatto cenno — riprendendo in esame sia un esempio presentato nel mio primo lavoro sull'argomento, sia il classico caso di EULERO della trave incastrata e soggetta a carico di punta. In entrambi i casi mi spingo fino alla terza approssimazione; i calcoli sono un po' laboriosi ma i risultati hanno semplici interpretazioni fisiche, pienamente aderenti sia alla congettura fatta sopra, sia alla immediata intuizione. Per facilitare i richiami mi attengo alla nomenclatura usata nei lavori citati nella annotazione (1).

1. - Un caso elementare di « incompatibilità ».

Consideriamo una trave $\mathfrak{L}$ che abbia nella configurazione indeformata la forma di un cilindro circolare sottile e che possa essere schematizzata — per gli scopi del presente lavoro — come una « elastica » nel senso precisato nel trattato di elasticità del LOVE (Cap. XVIII, p. 381 e segg.). Il segmento AB rappresenti la direttrice l di $\mathfrak{L}$ nella configurazione indeformata di riferimento; e si supponga che la lunghezza di un qualunque tratto di l rimanga la stessa comunque cambi la forma di l.

Si faccia anche l'ipotesi che le uniche forze esterne agenti su $\mathfrak{L}$ siano applicate alle basi di $\mathfrak{L}$ e siano equivalenti ad una coppia di momento $\lambda \boldsymbol{M}$ più una forza $\lambda \boldsymbol{F}$ applicate ad A ed una forza $-\lambda \boldsymbol{F}$ applicata a B, coll'ulteriore intesa che entrambi i vettori $\boldsymbol{F}$ ed $\boldsymbol{M}$ siano ortogonali al segmento AB e tali che

$$\lambda \boldsymbol{M} + BA \wedge \lambda \boldsymbol{F} = 0,$$

cioè tali da assicurare l'equilibrio di $\mathfrak{L}$, quando essa s'immagini rigida. Si è introdotto qui un parametro moltiplicativo λ in vista dei successivi sviluppi.

Quanto s'è detto sulle forze esterne è sufficiente ad assicurare l'esistenza di una soluzione statica per le equazioni linearizzate della dinamica di una « elastica », adattate al nostro caso. Invece le corrispondenti equazioni non lineari

(3) Si veda, ad esempio, la seconda delle Memorie citate nella annotazione (2), pp. 9-22.

non ammettono soluzioni statiche [4] e se si applica il procedimento di approssimazioni successive di SIGNORINI si trova che il sistema di equazioni che dovrebbe dare la terza approssimazione della soluzione statica è incompatibile [5]. Questi risultati possono essere così interpretati: sotto l'azione delle forze esterne, $\mathfrak{L}$ assume una configurazione nella quale l non è più rettilinea, sicchè ne viene ridotto il braccio della coppia $(\lambda \boldsymbol{F}, \ -\lambda \boldsymbol{F})$. Nelle circostanze qui assunte tale riduzione è del secondo ordine in λ; ne consegue che il sistema delle forze esterne è squilibrato per una coppia del terzo ordine in λ e la trave è costretta a ruotare con una accelerazione che è anche essa del terzo ordine in λ e che perciò completamente sfugge alla approssimazione classica.

Ecco come questi fatti vengono precisati dai risultati ottenuti applicando il metodo dei sistemi ausiliari successivi di SIGNORINI. Restringiamo per semplicità le nostre considerazioni al caso in cui la direttrice di $\mathfrak{L}$ rimane in un piano, che sarà preso come il piano (x_1, x_3) di un sistema di coordinate cartesiane scelte così: il segmento AB coincide col segmento $(0, 1)$ dell'asse di indice 3 ed $\boldsymbol{F}$ è diretta all'opposto del versore $\boldsymbol{c}_1$ del primo asse. Per semplificare ulteriormente la notazione supporremo addirittura che sia

$$(1.1) \qquad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{c}_1, \qquad \boldsymbol{M} = -\boldsymbol{c}_2 .$$

Ad ogni istante t, l sarà una curva del piano (x_1, x_3) che potrà essere precisata indicando la funzione vettoriale $\boldsymbol{w}(s, t)$ che rappresenta lo spostamento del punto di l di ascissa curvilinea s a partire dalla configurazione di riferimento. Il versore della tangente ad l sarà indicato con $\boldsymbol{i}_3$; quello della normale principale con $\boldsymbol{i}_1$; e la curvatura di l (dotata di segno) con ψ_2. Il risultante delle forze intime agenti attraverso la generica sezione normale α di $\mathfrak{L}$ sarà detto $\boldsymbol{R}_\alpha$ ed il momento flettente M_α.

Ragioni geometriche impongono le relazioni

$$(1.2) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{i}_1}{\partial s} = -\psi_2 \boldsymbol{i}_3, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{i}_3}{\partial s} = \psi_2 \boldsymbol{i}_1, \qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial s^2} = \psi_2 \boldsymbol{i}_1 .$$

Di più, in una « elastica », il momento flettente, finchè l rimane piana, è proporzionale alla curvatura

$$(1.3) \qquad M_\alpha = -a\, \psi_2$$

---

[4] Ciò è dimostrato nel § 8 del primo lavoro citato nella annotazione [1], in ipotesi anche più larghe di quelle qui fatte in riguardo alle proprietà materiali di $\mathfrak{L}$.

[5] Si veda la annotazione [22] a piè delle pagine 258-259 nel primo lavoro citato nella annotazione [1]. Alcuni errori di stampa là sfuggiti sono corretti qui nel seguito.

(qui il coefficiente di proporzionalità $-a$ è l'opposto del coefficiente di rigidità a flessione), cosicchè, in assenza di forze esterne dist ibuite, le equazioni dinamiche si possono scrivere

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{R}_\alpha}{\partial s} + \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = 0 \\ &a \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial s^2} \times \boldsymbol{i}_1\right) = \boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{R}_\alpha, \end{aligned}\right. \tag{1.4}$$

dove μ è la massa per unità di lunghezza.

La specificazione (1.1) per le forze esterne si riflette nelle seguenti condizioni al contorno per $\boldsymbol{R}_\alpha$ ed M_α:

$$[\boldsymbol{R}_\alpha]_{s=0} = -\lambda\, \boldsymbol{c}_1, \qquad [\boldsymbol{R}_\alpha]_{s=1} = -\lambda\, \boldsymbol{c}_1;$$

$$[M_\alpha]_{s=0} = -\lambda, \qquad [M_\alpha]_{s=1} = 0\,.$$

Supponiamo ora che $\boldsymbol{R}_\alpha$, M_α, $\boldsymbol{w}$, ecc. si possano sviluppare in serie di potenze di λ:

$$\boldsymbol{R}_\alpha = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, \boldsymbol{r}^{(\nu)} \lambda^\nu, \qquad M_\alpha = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, m^{(\nu)} \lambda^\nu, \qquad \text{ecc.}; \tag{1.5}$$

i coefficienti delle successive potenze in questi sviluppi soddisfano a certi sistemi di equazioni lineari che il prof. SIGNORINI ha proposto di chiamare sistemi ausiliari successivi. Il primo di essi è il classico sistema lineare della dinamica delle travi. Come già si è detto, primo e secondo sistema ausiliare ammettono soluzioni statiche che si possono trovare con calcoli elementari (6). Tali soluzioni sono definite a meno di termini lineari, che intendiamo di precisare qui in modo che l'origine di l coincida con l'origine del sistema di riferimento ed i versori $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_3$ coincidano per $s = 0$ con $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_3$ (nei limiti, si intende, di dette due approssimazioni). Si ha allora

$$\boldsymbol{r}^{(1)} = -\boldsymbol{c}_1, \qquad m^{(1)} = s - 1, \qquad \boldsymbol{w}^{(1)} = \frac{1}{6a}(3s^2 - s^3)\,\boldsymbol{c}_1;$$

$$\boldsymbol{r}^{(2)} = 0, \qquad m^{(2)} = 0, \qquad \boldsymbol{w}^{(2)} = \frac{1}{a^2}\left(-\frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{4} - \frac{s^5}{20}\right)\boldsymbol{c}_3\,.$$

---

(6) Si confronti loc. cit. nella annotazione (5).

Il terzo sistema ausiliare poi si presenta nella forma

$$(1.6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}^{(3)}}{\partial s} + \mu \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(3)}}{\partial t^2} = 0 \\ a \dfrac{\partial^3 \boldsymbol{w}^{(3)}}{\partial s^3} \times \boldsymbol{c}_1 + \dfrac{3}{a^2}\left(2s - 7s^2 + 6\, s^3 - \dfrac{3}{2}\, s^4\right) = \boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{r}^{(3)}, \end{cases}$$

colle condizioni al contorno

$$[\boldsymbol{r}^{(3)}]_{s=0} = 0, \qquad [\boldsymbol{r}^{(3)}]_{s=1} = 0,$$

$$[m^{(3)}]_{s=0} = 0, \qquad [m^{(3)}]_{s=1} = 0,$$

condizioni che possono anche essere scritte così:

$$(1.7)\qquad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial^3 \boldsymbol{w}^{(3)}}{\partial s^3}\right]_{s=0} = 0, & \left[\dfrac{\partial^3 \boldsymbol{w}^{(3)}}{\partial s^3}\right]_{s=1} = \dfrac{3}{2\, a^3}\, \boldsymbol{c}_1, \\ \left[\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(3)}}{\partial s^2}\right]_{s=0} \times \boldsymbol{c}_1 = 0, & \left[\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(3)}}{\partial s^2}\right]_{s=1} \times \boldsymbol{c}_1 = 0. \end{cases}$$

Il sistema (1.6), (1.7) non ammette soluzioni statiche; la soluzione dinamica che soddisfa alle solite condizioni per $s = 0$ all'istante iniziale e per la quale a tale istante la velocità è ovunque zero, è data da

$$\boldsymbol{w}^{(3)} = \left\{ \frac{6}{5\mu a^2}(1 - 2s)\, t^2 + \frac{3}{a^3}\left(-\frac{7}{60}\, s^4 + \frac{13}{100}\, s^5 - \frac{1}{20}\, s^6 + \frac{1}{140}\, s^7\right)\right\} \boldsymbol{c}_1 .$$

L'addendo che dipende dal tempo rappresenta uno spostamento di l in una rotazione rigida attorno al baricentro di $\mathfrak{L}$ con velocità angolare $12t/(5\mu a^2)$.

2. - « Incompatibilità » in un problema di stabilità elastica.

Consideriamo qui uno dei più semplici casi di instabilità statica: quello di una trave (pensata schematizzata in una « elastica ») incastrata ad un estremo e soggetta a carico di punta. Cominciamo col ricordare l'analisi classica del fenomeno di instabilità: se si usano ancora le notazioni del paragrafo precedente, si indica inoltre con θ l'angolo formato da $\boldsymbol{i}_3$ con $\boldsymbol{c}_3$ (cioè l'angolo tra la tangente alla direttrice nella generica configurazione ed il segmento che rappresenta l'elastica nello stato indeformato) e con R il carico di punta, e si pensa ora ad una trave la cui direttrice l è lunga L (anzichè 1), le equazioni per l'equilibrio impongono le relazioni [7]:

$$\left\{\begin{aligned} & a\,\frac{d^2\,\theta}{d\,s^2} + R\sin\theta = 0 \\ & \left(\frac{d\theta}{ds}\right)_{s=L} = 0, \end{aligned}\right. \tag{2.1}$$

alle quali si aggiunge la relazione geometrica

$$\theta(0) = 0 \tag{2.2}$$

corrispondente alla condizione di incastro all'estremo A.

Le equazioni (2.1), (2.2) ammettono l'ovvia soluzione $\theta(s) \equiv 0$; anzi tale soluzione è unica e stabile purchè R non superi un certo valore critico R_c. Dire che la soluzione $\theta(s) \equiv 0$ è stabile corrisponde a dire che essa non rappresenta semplicemente un estremo, ma proprio un minimo per il funzionale che dà la energia totale di $\mathfrak{L}$:

$$E = \int_0^L \left\{ \frac{a}{2}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - R\cdot(1 - \cos\theta) \right\} ds,$$

cioè che, quando θ è identicamente nulla, non solo è $\delta E = 0$, ma è anche $\delta^2 E > 0$ per ogni variazione non nulla di θ che soddisfi alle condizioni al contorno.

Quando ad R si assegni il valore critico $R_c = \pi^2 a/(4L^2)$, la variazione seconda di E, a partire dal valore nullo corrispondente alla scelta $\theta(s) \equiv 0$, può essere nulla purchè la variazione di θ sia scelta, ad esempio, così:

$$\delta\theta = \alpha \sin\frac{\pi}{2L}\,s, \tag{2.3}$$

dove α è una costante arbitraria.

È pressochè immediato verificare che il secondo membro della (2.3) soddisfa anche alle equazioni lineari per l'equilibrio di $\mathfrak{L}$ valide nell'intorno della configurazione banale critica. Ma se ne può forse concludere che sotto il carico R_c esistono infiniti stati di equilibrio non banali, ciascuno corrispondente ad

---

[7] Si confronti, ad esempio, la prima parte del secondo lavoro citato nella annotazione [1].

una scelta di α? Certo no. Una diretta analisi delle equazioni (2.1), (2.2) mostra che soluzioni non banali effettivamente esistono solo per $R > R_c$ e che esse possono essere rappresentate approssimativamente dal secondo membro della (2.3) solo se α è posto eguale a

$$\pm 2\sqrt{2}\,\sqrt{(R - R_c)/R_c}\,. \tag{2.4}$$

Si sarebbe potuto giungere a tale risultato anche col metodo di SIGNORINI. Per studiare, coll'uso dei sistemi ausiliari successivi, il comportamento di $\mathfrak{L}$ quando $R > R_c$, conviene porre ([8])

$$R = R_c + \lambda^2 r$$

(dove λ è un parametro ed r una costante positiva), pensare θ sviluppabile in una serie di potenze di λ nella quale il primo termine coincide col secondo membro della (2.3) e procedere quindi ad una analisi dei sistemi di equazioni a cui soddisfano i coefficienti delle potenze più elevate di λ.

Si trova allora ([9]) che il terzo sistema ausiliare ammette una soluzione statica solo se α è data dalla (2.4); altrimenti — come faremo vedere qui — sono possibili solo soluzioni dinamiche. Come si poteva facilmente prevedere, se, ad esempio, il valore scelto per α eccede il valore assoluto della quantità (2.4), il secondo membro delle (2.3) rappresenta l'approssimazione lineare di θ in uno stato iniziale di l, a partire dal quale s'inizia un movimento che tende a riportare l nella vicinanza di uno stato d'equilibrio. Siccome in questo movimento l'accelerazione è infinitesima del terzo ordine in λ, l'effetto non può essere messo in rilievo che da un esame dei sistemi ausiliari successivi.

Ecco i particolari dei calcoli. Ci limitiamo ancora alla considerazione dei moti di $\mathfrak{L}$ nei quali l rimane nel piano (x_1, x_3) e facciamo uso delle notazioni introdotte nel paragrafo precedente. Le equazioni da risolvere sono ancora le (1.2), (1.3), (1.4), ma le condizioni al contorno vanno precisate così:

$$(\boldsymbol{w})_{s=0} = 0, \qquad (\boldsymbol{i}_1)_{s=0} = \boldsymbol{c}_1, \qquad (\boldsymbol{i}_3)_{s=0} = \boldsymbol{c}_3; \tag{2.5}$$

$$(M_\alpha)_{s=L} = 0, \qquad (\boldsymbol{R}_\alpha)_{s=L} = (R_c + \lambda^2 r)\,\boldsymbol{c}_3\,. \tag{2.6}$$

([8]) Cfr. loc. cit. nella annotazione ([7]) (§ 2).
([9]) Cfr. loc. cit. nella annotazione ([7]) (§ 3).

L'ultima delle (2.5) ha per conseguenza

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial s}\right)_{s=0} = 0. \tag{2.7}$$

Introduciamo ora gli sviluppi

$$\boldsymbol{R}_\alpha = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, \boldsymbol{r}^{(\nu)} \lambda^\nu, \qquad M_\alpha = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, m^{(\nu)} \lambda^\nu, \qquad \text{ecc.}, \tag{2.8}$$

notando che nel primo di essi $\boldsymbol{r}^{(0)}$ non è nullo: $\boldsymbol{r}^{(0)} = R_c \boldsymbol{c}_3$.

Calcoli elementari assicurano dell'esistenza di soluzioni statiche dei primi due sistemi ausiliari, fornendo anche le seguenti espressioni per i termini di indici 1 e 2 negli sviluppi (2.8):

$$\boldsymbol{r}^{(1)} = 0, \qquad m^{(1)} = -\frac{\pi^2}{4L^2} aC \cdot \cos \frac{\pi}{2L} s; \qquad \boldsymbol{w}^{(1)} = C \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{2L} s\right) \boldsymbol{c}_1;$$

$$\boldsymbol{r}^{(2)} = 2r\boldsymbol{c}_3, \qquad m^{(2)} = -\frac{\pi^2}{4L^2} aD \cdot \cos \frac{\pi}{2L} s;$$

$$\boldsymbol{w}^{(2)} = D \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{2L} s\right) \boldsymbol{c}_1 + \frac{\pi}{8L} C^2 \left(\sin \frac{\pi}{L} s - \frac{\pi}{L} s\right) \boldsymbol{c}_3 .$$

Qui C e D sono costanti arbitrarie. La relazione tra questi risultati e quelli citati all'inizio del paragrafo in riguardo a θ va cercata nella circostanza che in generale si ha

$$\sin \theta = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial s} \times \boldsymbol{c}_1,$$

ed in particolare

$$\theta^{(1)} = \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(1)}}{\partial s} \times \boldsymbol{c}_1 .$$

Del terzo sistema ausiliare scriviamo qui solo le equazioni relative alla funzione

$$V(s,\ t) = \boldsymbol{w}^{(3)} \times \boldsymbol{c}_1;$$

le equazioni rimanenti non fanno che definire le altre grandezze di indice 3 in termini di V.

Le equazioni che riguardano V sono le seguenti:

$$
(2.9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^4 V}{\partial s^4}+\frac{\pi^2}{4L^2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+\frac{\mu}{a}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\\
&=-\frac{3\pi^2}{4\,L^2}\,C\left\{\frac{9\pi^4}{64\,L^4}\,C^2\cdot\cos\frac{3\pi}{2L}\,s+\left(\frac{2r}{a}-\frac{\pi^4\,C^2}{64\,L^4}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{2L}\,s\right\},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(2.10)\quad \left\{\begin{aligned}
&[V]_{s=0}=0,\qquad \left[\frac{\partial V}{\partial s}\right]_{s=0}=0;\qquad \left[\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right]_{s=L}=0,\\
&\left[\frac{\partial^3 V}{\partial s^3}+\frac{\pi^2}{4\,L^2}\frac{\partial V}{\partial s}\right]_{s=L}=-\frac{3\pi}{2L}\,C\left(\frac{2r}{a}-\frac{\pi^4\,C^2}{16\,L^4}\right);
\end{aligned}\right.
$$

più la condizione che deriva dall'ipotesi che la velocità dei punti di l sia zero (almeno) all'istante iniziale:

$$
(2.11)\qquad \left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]_{t=0}=0\,.
$$

Di questo sistema esistono soluzioni statiche quando e solo quando

$$
(2.12)\qquad C=(8L^2/\pi^2)\sqrt{2r/a}\,.
$$

Per una diversa scelta di C, esistono solo soluzioni dinamiche, ed è facile trovarne la espressione esplicita. Cominciamo col porre

$$
(2.13)\quad \left\{\begin{aligned}
&V=G\cdot\left(1-\cos\frac{\pi}{2L}\,s\right)t^2+\\
&\qquad+\frac{3\,\pi^2}{8\,L^2}\left(\frac{\pi^4}{64\,L^4}\,C^2+\frac{2r}{a}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2L}s-1\right)+\\
&+\frac{3\,L}{\pi}\,C\left(\frac{2r}{a}-\frac{\pi^4}{64\,L^4}\,C^2\right)s\cdot\sin\frac{\pi}{2L}\,s+\\
&\qquad+\frac{3\,\pi^2}{128\,L^2}\,C^3\cdot\left(1-\cos\frac{3\pi}{2L}s\right)+\Phi,
\end{aligned}\right.
$$

dove G è una costante e Φ è funzione solo di s. Le soluzioni del sistema (2.9), (2.10), (2.11) sono date dalla (2.12) purchè $\Phi(s)$ e G soddisfino alle equazioni:

$$\Phi^{(4)} + \frac{\pi^2}{4L^2}\Phi'' = -\frac{\mu}{a}G\cdot\left(1-\cos\frac{\pi}{2L}s\right); \tag{2.14}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\Phi(0)=0, \qquad \Phi'(0)=0; \qquad \left[\Phi''' + \frac{\pi^2}{4L^2}\Phi'\right]_{s=L}=0,\\ &\Phi''(L) = \frac{3\pi}{4L}\frac{C}{a}\left(\frac{2r}{a}-\frac{\pi^4}{64L^4}C^2\right)L. \end{aligned}\right. \tag{2.15}$$

La soluzione generale della equazione (2.14) è

$$\Phi = -\frac{4\mu GL^3}{a\pi^3}\left(\frac{\pi}{2L}s^2 + s\cdot\sin\frac{\pi}{2L}s\right) +$$
$$+ F_1\cdot\cos\frac{\pi}{2L}s + F_2\cdot\sin\frac{\pi}{2L}s + F_3 s + F_4,$$

dove intervengono certe costanti F_1, F_2, F_3, F_4 la cui scelta — assieme a quella di G — è subordinata alle condizioni al contorno (2.15). È facile constatare che queste possono essere verificate, ponendo

$$G = \frac{3\pi^3}{3\pi-8}\frac{C}{4\mu L^2}\left(\frac{2r}{a}-\frac{\pi^4}{64}\frac{C^2}{L^4}\right), \qquad F_1 = -F_4,$$

$$F_2 = -\frac{32\mu L^6}{a\pi^5}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)G, \qquad F_3 = \frac{4\mu L^3}{a\pi^2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)G$$

e se ne conclude che V contiene un addendo funzione del tempo

$$\frac{3\pi^3}{3\pi-8}\frac{C}{4L^2}\left(\frac{2r}{a}-\frac{\pi^4}{64}\frac{C^2}{L^4}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{2L}s\right)t^2,$$

che si annulla identicamente solo se C è scelto in modo da soddisfare alla (2.12). Se C, ad esempio, eccede invece il modulo del secondo membro della (2.12), l'addendo in V che dipende dal tempo viene ad essere negativo e proporzionale a t^2, e rappresenta il contributo a V conseguente ad un movimento che tende a ridurre la spostamento iniziale.

Summary.

By carrying out explicit calculations for two simple examples, plausibility is added to a hypothesis previously made with regard to the cases of incompatibility between the theory of finite elastic deformations and the classical linerized theory, first put in evidence by Prof. A. Signorini. The calculations show that the static solutions of the linearized theory may sometimes represent approximately states of an elastic body, whence a movement ensues, for which the inertia forces are infinitesimal of higher order.