Riv. Mat. Univ. Parma 10 (1959), 99-102

CARLO SILLI (*)

Una osservazione sul moto verticale di un grave con resistenza quasi-newtoniana e subviscosa. (**)

Il Sig. POLACHEK in un suo lavoro **[1]** (1), ricordato che un proiettile puntiforme scagliato da un pezzo della moderna artiglieria, con velocità subsonica, ma assai prossima a quella del suono, incontra una resistenza che si discosta da quella newtoniana $\boldsymbol{R} = - Kv \cdot \boldsymbol{v}$ solo per piccole quantità, introduce un metodo, in sostanza analogo a quello delle perturbazioni, per determinare con buona approssimazione le coordinate parametriche del punto-proiettile e la sua velocità.

Egli assume come espressione della resistenza diretta (che chiama quasi-newtoniana)

$$(1) \qquad \boldsymbol{R} = - K \cdot (v + \Delta E) \boldsymbol{v},$$

dove ΔE è una correzione empirica da apportarsi a v per ottenere il risultato voluto. Essa è da ritenersi in generale funzione di P, $\dot{P}$ e t.

L'Autore, supposto noto ΔE, stabilisce un procedimento analitico per determinare (a meno di termini di ordine superiore al primo in ΔE) le coordinate parametriche e le componenti della velocità del punto-proiettile nel regime di resistenza dato dalla (1).

(*) Indirizzo: Istituto Matematico U. DINI, Università, Firenze, Italia.

(**) Ricevuto il 10-XI-1958.

(1) I numeri in neretto in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

L'introduzione di resistenze di tipo non newtoniano, cioè non esprimibili proporzionalmente a potenze intere del modulo della velocità e di versore opposto a quello della velocità stessa, che ha permesso al POLACHEK di giustificare le anomalie delle traiettorie stratosferiche dei proiettili, calcolate in regime newtoniano, ci ha suggerito un'idea: quella di indagare se con una resistenza di tipo non newtoniano si possa ottenere in un tempo finito la stabilizzazione del moto verticale di un grave alla velocità limite che, nei casi classici della resistenza di tipo newtoniano, è, come è ben noto, una velocità asintotica per $t \to \infty$. In questo intento premettiamo un'osservazione.

Si consideri la funzione

$$\varphi(v) = 1 - a\, v^2 - b\, v^{\alpha+1}$$

con $v \geqslant 0$ e α, a, b costanti soddisfacenti le condizioni $\alpha > -1$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a + b \neq 0$.

Si ha per essa, evidentemente,

$$\varphi(0) = 1, \qquad \varphi(+\infty) = -\infty,$$

e poichè nell'intervallo aperto $(0;\, +\infty)$ la derivata $\varphi'(v)$ è negativa, la funzione $\varphi(v)$ si annulla in uno e in un sol punto γ del semiasse positivo delle v.

Considerato l'integrale

$$\int_{v_0}^{\gamma} \frac{\mathrm{d}v}{\varphi(v)} \tag{2}$$

(con $0 \leqslant v_0 \neq \gamma$), poichè si ha, per ogni v positivo o nullo,

$$\varphi(v) = (v - \gamma)\, \psi(v)$$

con $\psi(v)$ continua e negativa, ne risulta immediatamente:

$$\int_{v_0}^{\gamma} \frac{\mathrm{d}v}{\varphi(v)} \geqslant \int_{v_0}^{\gamma} \frac{\mathrm{d}v}{\gamma - v} \cdot \min_{v_0 \leq v \leq \gamma} \left[-\frac{1}{\psi(v)} \right] = +\infty,$$

che è il risultato che volevamo mettere in rilievo.

Occorre osservare che l'integrale (2) risulta infinito anche per $-1 < \alpha < 0$, $a = 0$ e $b = b(v)$ funzione di v positiva e con derivata prima non negativa e finita in $(0;\ +\infty)$; in particolare per b costante.

Un integrale del tipo di quello ora considerato esprime, come è ben noto, la dipendenza tra il tempo di caduta e la velocità raggiunta nel moto verticale discendente di un grave con una resistenza del tipo newtoniano $-Hv\boldsymbol{v}$ corretta con un termine non newtoniano $-Kv^{\alpha}\,\boldsymbol{v}$, essendo α un numero compreso tra -1 e 1. Infatti, supposta la velocità iniziale del mobile verticale, diretta verso il basso e in modulo uguale a v_0, assunta la verticale ascendente nella posizione iniziale come asse delle z positive di un sistema di riferimento cartesiano, si ha per l'equazione di moto:

$$m\ddot{z} = -mg - Hv\,\dot{z} - Kv^{\alpha}\,\dot{z}\,.$$

Dividendo per m e ponendo $H/(mg) = a$, $K/(mg) = b$, si ha:

$$\dot{v} = g\cdot(1 - a\,v^2 - b\,v^{\alpha+1}) = g\cdot\varphi(v), \tag{3}$$

da cui

$$t(\gamma) = \frac{1}{g}\int_{v_0}^{\gamma}\frac{dv}{1 - a\,v^2 - b\,v^{\alpha+1}} = +\infty,$$

essendo γ l'unico zero di $\varphi(v)$ in $(0;\ +\infty)$.

Il risultato era naturale e facilmente raggiungibile per diretto confronto con uno dei due casi di resistenza newtoniana: $-\lambda\boldsymbol{v}$ (resistenza viscosa) oppure $-\mu v\boldsymbol{v}$ (resistenza idraulica). Ma per quanto è stato sopra osservato il risultato resta valido anche per resistenze del tipo:

$$\boldsymbol{R} = -K(v)\,\frac{\boldsymbol{v}}{v^{\beta}} = -K(v)\,v^{1-\beta}\,\frac{\boldsymbol{v}}{v}\,,$$

con $K(v)$ soddisfacente alle condizioni prima specificate per $b(v)$.

In queste ipotesi infatti, posto $b(v) = K(v)/(mg)$, si ha:

$$\dot{v} = g\cdot[1 - b(v)\,v^{1-\beta}]$$

e questa si può ottenere dalla (3) facendo in essa $a = 0$, $b = b(v)$, $\alpha = -\beta$ e quindi $-1 < \alpha < 0$.

Si ha quindi, il che sembra di qualche interesse, che, anche con resistenze a regime subviscoso (b costante), il moto di discesa dei gravi raggiunge lo stato di regime dopo un tempo infinitamente grande.

È interessante osservare come sia proprio la presenza del campo uniforme della gravità a rendere infinito il tempo di stabilizzazione del moto.

Qualora infatti si supponga che la forza direttamente applicata sia di diversa natura, si può ottenere un tempo finito di stabilizzazione del moto [**2**], così come in assenza di campo agente.

Bibliografia.

[1] H. Polachek, *Solution of the differential equations of motion of a projectile in a medium of quasi-newtonian resistance*, Quart. Appl. Math. **7** (1949), 275-291.

[2] G. Malgarini, *Studio asintotico del moto d'un oscillatore elastico, con resistenza di tipo « subviscoso »*, Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. **86** (1953), 258-280.

Summary.

In this paper it is shown that also in subviscous conditions (resistance of quasi-newtonian type) the vertical motion of an heavy body reaches its limit speed in an infinitely long time.