Riv. Mat. Univ. Parma 10 (1959), 57-83

CALOGERO VINTI (*)

Le teorie dell' integrazione distribuite in uno spettro. (**)

Introduzione. (1)

H. LEBESGUE (2) aveva osservato, per una funzione $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, misurabile e limitata, che l'integrale di $f(x)$ in (a, b) è un numero compreso tra l'integrale inferiore e l'integrale superiore di $f(x)$ nel senso di RIEMANN.

Partendo dalla stessa osservazione H. HAHN (3) ha fatto vedere che, assegnata in (a, b) una funzione $f(x)$ limitata e misurabile, comunque si consideri una successione di suddivisioni D_n $[a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{\nu_n} = b, \quad n = 1, 2, 3, \ldots]$, con la condizione che $d_n = \max\limits_i | x_{i+1} - x_i |$ tenda a zero, esistono dei punti x_i' $(i = 1, 2, \ldots, \nu_n)$, con $x_i \leqslant x_i' \leqslant x_{i+1}$, tali che:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\nu_n} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i') = \int_a^b f(x)\, dx .$$

In tempi più recenti A. MAMBRIANI (4) è stato portato, per necessità connesse allo studio dell'area di una superficie, a ricerche dello stesso tipo di quelle di

(*) Indirizzo: Via Domenico di Marco 15, Palermo, Italia.

(**) Ricevuto il 23-XII-1958. Questo lavoro è stato eseguito nel Seminario di Analisi Matematica della Università di Palermo.

(1) Ringrazio il Prof. E. BAIADA per i consigli che mi ha dato.

(2) H. LEBESGUE: *Intégral, Longueur, Aire,* Ann. Mat. Pura Appl. (3) **7** (1902), (cfr. pag. 232).

(3) H. HAHN: *Über Annäherung an Lebesgue' sche Integrale durch Riemann' sche Summen,* Sitzungsber. d. math. - phys. Klasse d. Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Wien **123** (1914), 713-743.

(4) A. MAMBRIANI: *Sull'approssimazione dell'integrale di Lebesgue per le funzioni di una variabile,* Boll. Un. Mat. Ital. (3) **2** (1947), 173-181.

H. HAHN. Egli ha dimostrato per una funzione $f(x)$ quasi continua, limitata o no, che l'integrale di $f(x)$, quando esiste, si ottiene come limite di somme di RIEMANN, ove però il punto x'_i può essere scelto arbitrariamente in (x_i, x_{i+1}) purchè non cada in opportuni plurintervalli aperti di (a, b). Il teorema di A. MAMBRIANI è il seguente:

Se $f(x)$ è una funzione definita in (a, b) ed ivi quasi continua e integrabile secondo Lebesgue, si ha:

a) *ad ogni $\varepsilon > 0$ arbitrario si può far corrispondere almeno un plurintervallo aperto Δ di (a, b), con $|\Delta|. < \varepsilon$ [5] ed un numero $\delta > 0$, con $\delta < \varepsilon$, in modo da aversi:*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x'_i) \right| < \varepsilon \tag{1}$$

per ogni gruppo di punti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ così scelti:

$$\alpha) \quad \begin{cases} a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b; \\ \text{se un intervallo } (x_i, x_{i+1}) \text{ ha punti interni fuori di } \Delta, \text{ sia } x_{i+1} - x_i < \delta; \\ \text{se un intervallo } (x_i, x_{i+1}) \text{ ha i punti interni tutti in } \Delta, \text{ uno almeno dei} \\ \quad \text{suoi estremi sia fuori di } \Delta; \end{cases}$$

inoltre per x'_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ punto qualunque dell'insieme $(x_i, x_{i+1}) - \Delta$.

Va osservato, con riferimento al lavoro di H. HAHN, che la proposizione di A. MAMBRIANI vale sia per le funzioni limitate che per le illimitate, e che inoltre il MAMBRIANI dà, fissato $\varepsilon > 0$, la effettiva costruzione dell'insieme ove il punto x'_i può essere comunque preso. Inoltre A. MAMBRIANI [6] in una Nota successiva ha dato un gruppo di teoremi, generalizzazione dei risultati ottenuti nel lavoro citato in [4], nel caso molto più complesso e di grande interesse per la integrazione secondo LEBESGUE delle funzioni a più variabili.

---

[5] Col MAMBRIANI il simbolo $|\Delta|.$ indica la lunghezza di Δ (il punto sta ad evitare ogni eventuale confusione col segno di valore assoluto). Cfr. lavoro citato in [4].

[6] A. MAMBRIANI: *Sull'approssimazione dell'integrale di Lebesgue per le funzioni di due variabili*, Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3) **80** (1947), 201-226.

I risultati precedenti, ed in particolar modo quelli di A. MAMBRIANI, conducono in modo naturale a dare una definizione costruttiva [7] dell'integrale di LEBESGUE a partire dalle somme di RIEMANN. E precisamente daremo la seguente definizione:

b) *Una funzione $f(x)$ definita in (a, b), limitata, la diremo «integrabile (L) in (a, b)» se esiste un numero $I \; (= \int_a^b f\,dx)$ che gode della proprietà espressa dalla proposizione* a) *del teorema di A. Mambriani.*

Tale definizione si estende al caso che $f(x)$ sia illimitata in (a, b), anzi nel § **1**, qualunque sia $f(x)$, limitata o no, daremo una definizione d'integrabilità (L) che si riduce alla precedente quando $f(x)$ è limitata, e faremo vedere che nella classe delle funzioni quasi continue è equivalente alla definizione d'integrabilità secondo LEBESGUE.

Nel § 1 daremo poi per una funzione $f(x)$, definita in (a, b), un'altra definizione d'integrale, *dicendo «$f(x)$ integrabile* (R) *in (a, b)» se esiste un numero $I \; (= \int_a^b f\,dx)$ che goda della proprietà espressa dalla proposizione* a) *del teorema di A. Mambriani, ove però il plurintervallo aperto Δ di (a, b) può essere qualunque, purchè sia $|\Delta| < \varepsilon$, e faremo vedere che tale definizione è equivalente a quella data da Riemann.*

La definizione d'integrale (L) da noi proposta contempla l'esistenza di un ben determinato plurintervallo Δ al di fuori del quale si possono scegliere i punti x'_i, mentre la definizione d'integrale (R) permette la scelta arbitraria di questo plurintervallo e quindi la relazione (1) si avvera qualunque sia questo plurintervallo. *È chiaro che queste due situazioni sono in un certo senso estreme,* e si può pensare a situazioni intermedie in cui *la scelta del plurintervallo è consentita per ogni $\varepsilon > 0$ in famiglie di plurintervalli $[\Delta]_\varepsilon$ opportunamente fissate.* Nel caso che questa famiglia sia ridotta ad un solo plurintervallo, oppure a tutti

---

(7) In altra direzione W. H. YOUNG [*On the general theory of integration*, Philos. Trans. Roy. Soc. London (A) **203-204** (1905), 221-252] e J. PIERPONT [*The theory of functions of real variables*, II (1912, pag. 371] hanno mostrato che l'integrale di LEBESGUE della $f(x)$ in (a, b) si ottiene come limite di somme di RIEMANN, suddividendo l'intervallo (a, b) in infiniti insiemi misurabili o intervalli, ed in tal senso W. H. YOUNG [*On a new method in the theory of integration*, Proc. London Math. Soc. (2) **9** (1911), 15-20] e B. LEVI [*Analisi Matematica algebrica e infinitesimale*, N. Zanichelli, Bologna 1937] hanno dato una definizione di integrale. Non prederemo in esame questo modo di procedere in quanto implica un passaggio al limite supplementare.

i plurintervalli possibili si ottengono le due sistuazioni estreme di cui abbiamo già detto.

Così se imponiamo la condizione che il plurintervallo Δ vari in una famiglia di plurintervalli $[\Delta]_\varepsilon$, opportunamente definita, dicendo $f(x)$ integrabile in (a, b) se esiste un numero I che goda della proprietà espressa dalla proposizione a) del teorema di A. MAMBRIANI, comunque si consideri un plurintervallo Δ della famiglia $[\Delta]_\varepsilon$, tale integrale non sarà nè meno generale di quello di RIEMANN, nè più generale di quello di LEBESGUE; e sarebbe opportuno studiare lo spettro delle definizioni di integrali facendo variare la famiglia $[\Delta]_\varepsilon$ in tutti i modi possibili. Un risultato che ha una qualche affinità con quest'ultima osservazione è stato annunciato da E. R. LORCH (8). Anche E. R. LORCH fa vedere che si può ottenere uno spettro delle definizioni d'integrale al variare di una certa famiglia d'insiemi. Volendo estendere alle funzioni di n variabili ($n > 1$) i risultati ottenuti per funzioni di una sola variabile, si presentano due possibilità diverse: l'estensione ad integrazione n volte ripetuta o dell'n-esimo ordine, e l'estensione globale in dimensione n. Ci limiteremo al caso $n = 2$. Per il primo tipo di estensione daremo le seguenti definizioni:

c) *Una funzione $f(x, y)$ definita e limitata nel rettangolo $\mathfrak{R}$: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, sotto le ipotesi che per quasi tutti i punti x di (a, b) esista l'integrale* (L): $\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$, *e per quasi tutti i punti y di (c, d) esista l'integrale* (L): $\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$, *la diremo integrabile* (L) *in $\mathfrak{R}$ se esiste un numero I che goda della seguente proprietà: in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ arbitrario esistono almeno due plurintervalli aperti $\Delta^{(x)}$, $\Delta^{(y)}$, l'uno di (a, b) e l'altro di (c, d), con $|\Delta^{(x)}| < \varepsilon$, $|\Delta^{(y)}| < \varepsilon$, ed un numero $\delta > 0$, in modo che si abbia:*

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \int_c^d f(x_i', y)\,\mathrm{d}y \right| < \varepsilon,$$

$$\left| I - \sum_{j=1}^{m-1} (y_{j+1} - y_j) \cdot \int_a^b f(x, y_j')\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon,$$

per ogni gruppo di punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di (a, b), e per ogni gruppo di punti $y_1, y_2, \ldots, y_m$ di (c, d) soddisfacenti le condizioni:

---

(8) E. R. LORCH: *On integration theory*, sunto in « Bull. Amer. Mat. Soc. » **63** (1957), 377-378.

$$\gamma)\left\{\begin{array}{l} a=x_1<x_2<\ldots<x_n=b, \qquad c=y_1<y_2<\ldots<y_m=d; \\ \textit{se un intervallo } (x_i,\ x_{i+1})\ [(y_j,\ y_{j+1})]\ \textit{ha punti interni fuori di } \Delta^{(x)}\ [\Delta^{(y)}] \\ \quad \textit{sia } x_{i+1}-x_i<\delta\ [y_{j+1}-y_j<\delta]; \\ \textit{se un intervallo } (x_i,\ x_{i+1})\ [(y_j,\ y_{j+1})]\ \textit{ha punti interni tutti in } \Delta^{(x)}\ [\Delta^{(y)}] \\ \quad \textit{uno almeno dei suoi estremi sia fuori di } \Delta^{(x)}\ [\Delta^{(y)}]; \end{array}\right.$$

x'_i $[y'_j]$ *essendo un punto qualsivoglia dell'insieme* $(x_i, x_{i+1})-\Delta^{(x)}\,[(y_j, y_{j+1})-\Delta^{(y)}]$.

Tale definizione si estende al caso che $f(x, y)$ sia illimitata in $\mathfrak{R}$, anzi noi nel § **2**, qualunque sia f, limitata o no, daremo una definizione d'integrabilità (L) che si riduce alla precedente quando f è limitata, e faremo vedere che nella classe delle funzioni quasi continue è equivalente alla definizione d'integrabilità secondo LEBESGUE.

d) *Una funzione* $f(x, y)$ *definita in* $\mathfrak{R}$, *sotto le ipotesi che per tutti i punti* x *di* (a, b) *esista l'integrale* (R): $\int_c^d f(x, y)\,dy$, *e per tutti i punti* y *di* (c, d) *esista l'integrale* (R): $\int_a^b f(x, y)\,dx$, *la diremo integrabile* (R) *in* $\mathfrak{R}$ *se esiste un numero* I *che goda della proprietà espressa nella definizione* c) *d'integrabilità* (L), *ove però i plurintervalli aperti* $\Delta^{(x)}$, $\Delta^{(y)}$ *possono essere qualunque purchè sia sempre* $|\Delta^{(x)}|<\varepsilon$, $|\Delta^{(y)}|<\varepsilon$.

Va osservato che, in virtù della equivalenza per le funzioni di una sola variabile tra la definizione d'integrabilità (R) e quella di RIEMANN, se $f(x, y)$ è integrabile (R) in $\mathfrak{R}$ risulta ovviamente

$$(*)\qquad I=\int_a^b dx\int_c^d f(x,\ y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,\ y)\,dx,$$

ove gli integrali sono nel senso di RIEMANN; e viceversa se per la $f(x, y)$ ha luogo la seconda uguaglianza della $(*)$, sempre con gli integrali nel senso di RIEMANN, $f(x, y)$ è integrabile (R) in $\mathfrak{R}$ ed è valida la $(*)$. Ne consegue allora che la definizione d'integrabilità (R) per la $f(x, y)$ non è equivalente alla definizione d'integrabilità secondo RIEMANN, appunto perchè, come è noto, esistono funzioni $f(x, y)$ integrabili (R) ma non secondo RIEMANN, e viceversa (9).

(9) Vedere, in particolare, A. PRINGSHEIM [*Zur Theorie des Doppel-Integrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes*, Sitzungber. d. math.,-phys. Klasse d. Kgl. Bayer. Akad. Wissensch. München **29** (1899), 39-62, 268-271] e B. LEVI [*Analisi Matematica algebrica e infinitesimale* citata nella annotazione (7)].

Per il secondo tipo di estensione daremo le seguenti definizioni:

e) *Una funzione $f(x, y)$, definita e limitata in $\mathfrak{R}$, la diremo integrabile* (L) *in $\mathfrak{R}$ se esiste un numero I che gode della seguente proprietà: in corrispondenza ad un numero positivo arbitario ε esiste almeno un plurirettangolo aperto* ([10]) *Δ di $\mathfrak{R}$, con $|\Delta| < \varepsilon$ ed un numero $\delta > 0$ in modo che si abbia:*

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| \cdot f(x'_i, y'_i) \right| < \varepsilon \qquad (^{11})$$

per ogni gruppo di rettangoli $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ costituente una suddivisione del rettangolo $\mathfrak{R}$, con la condizione che ogni $\mathfrak{R}_i$ abbia diametro minore di δ, inoltre per (x'_i, y'_i) punto qualunque dell'insieme $\mathfrak{R}_i - \Delta$, e se tale insieme è vuoto porremo $f(x'_i, y'_i) = 0$.

Tale definizione si estende al caso che f sia illimitata in $\mathfrak{R}$, anzi noi nel § **3**, qualunque sia f limitata o no, daremo una definizione d'integrabilità (L) che si riduce alla precedente quando f è limitata, e faremo vedere che nella classe delle funzioni quasi continue è equivalente alla definizione d'integrabilità secondo LEBESGUE.

f) *Una funzione $f(x, y)$ definita in $\mathfrak{R}$, la diremo integrabile* (R) *in $\mathfrak{R}$ se esiste un numero I che goda della proprietà espressa nella definizione* e) *d'integrabilità* (L), *ove però il plurintervallo aperto Δ può essere qualunque purchè sia $|\Delta| < \varepsilon$.*

Mostreremo nel § **3** che tale definizione è equivalente a quella data da RIEMANN. Le considerazioni fatte per le funzioni di una sola variabile circa l'esistenza di uno spettro di definizioni di integrali, *si ripetono* analogamente *per i due modi di estensione al caso di funzioni di due variabili.* Si avranno quindi per le funzioni di due variabili due spettri: A (spettro della integrazione due volte ripetuta), B (spettro della integrazione globale). Tali spettri non sono in generale confrontabili; però, poichè operando in opportune classi di funzioni le righe estreme di A e B coincidono, ci si pone allora il problema, sempre relativamente a certe classi di funzioni, di stabilire se esistono righe intermedie dello spettro A che sono anche righe intermedie dello spettro B. A tale problema risponderemo affermativamente nel § **4**.

([10]) Per plurirettangolo aperto intendiamo un insieme aperto a due dimensioni.
([11]) Col simbolo $|\mathfrak{R}_i|$ denotiamo l'area del rettangolo $\mathfrak{R}_i$.

§ 1. – Integrabilità per le funzioni di una variabile.

1. – Definizione d'integrabilità (R).

Diremo I *l'integrale* (R) *di* $f(x)$, $x \in (a, b)$, *se per ogni* $\varepsilon > 0$, *ed ogni plurintervallo aperto* (12) $\varDelta$ *di* (a, b), *con* $|\varDelta| < \varepsilon$, *esiste un* $\delta > 0$ *tale che si abbia:*

$$(1) \qquad \left| I - \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i') \right| < \varepsilon$$

per ogni gruppo di punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *di* (a, b) *soddisfacente le condizioni* α) *della introduzione* (13), *ed* x_i' $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ *qualunque in* $(x_i, x_{i+1}) - \varDelta$.

2. – Teorema di unicità.

I è unico. Infatti, se anche I' soddisfa la (1), in corrispondenza ad un $\varepsilon > 0$ ed a un $\varDelta$ (prefissati relativamente alla esistenza di I), esiste un $\delta' > 0$ tale che risulti:

$$\left| I' - \sum_{j=1}^{m-1} (u_{j+1} - u_j) \cdot f(u_j') \right| < \varepsilon$$

per ogni gruppo di punti $u_1, u_2, \ldots, u_m$ di (a, b) soddisfacente le condizioni α), quando nelle α) si sostituiscano i punti x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ con i punti u_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ ed il numero δ con δ', essendo u_j' qualsivoglia in $(u_j, u_{j+1}) - \varDelta$. Detto δ^* il più piccolo tra δ e δ', e considerato un gruppo $v_1, v_2, \ldots, v_r$ di (a, b) soddisfacente le condizioni α), ove nelle α) si cambi x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ con v_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ e δ con δ^*, si ha:

$$\left| I - \sum_{j=1}^{r-1} (v_{j+1} - v_j) \cdot f(v_j') \right| < \varepsilon, \qquad \left| I' - \sum_{j=1}^{r-1} (v_{j+1} - v_j) \cdot f(v_j') \right| < \varepsilon$$

qualunque sia v_j' $(j = 1, 2, \ldots, r-1)$ in $(v_j, v_{j+1}) - \varDelta$. È dunque $I = I'$.

---

(12) In questo paragrafo con un simbolo del tipo $\varDelta$ denoteremo sempre un plurintervallo aperto.

(13) Le condizioni α) della introduzione d'ora in avanti le chiameremo « condizioni α) ».

3. — Condizione necessaria per l'integrabilità (R).

Condizione necessaria affinchè $f(x)$ sia integrabile (R) in (a, b) è che risulti limitata su tale intervallo.

La dimostrazione è immediata ed elementare.

4. — Equivalenza tra la definizione d'integrabilità (R) e la definizione d'integrabilità secondo Riemann.

Detto I l'integrale (R) di $f(x)$ in (a, b), preso un $\varepsilon > 0$ ed un $\Delta \equiv (c, d)$, con $d - c < \varepsilon$, esiste un $\delta > 0$ tale che abbia luogo la (1). Sia

$$(0) \qquad u_1, u_2, \ldots, u_m$$

una arbitraria suddivisione di (a, b) con $u_{i+1} - u_i < \delta$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$, e denotiamo con u_r il primo di tali punti per cui $u_{r+1} \geqslant c$, ed u_s il primo punto per cui $u_s > d$, Per la suddivisione

$$(*) \qquad u_1, u_2, \ldots, u_r, \quad c, \quad d, \quad u_s, \ldots, u_m$$

si ha manifestamente:

$$| I - \sum{}^{(*)} (u_{i+1} - u_i) \cdot f(u_i') | < \varepsilon,$$

essendo la somma $\sum^{(*)}$ estesa a tutti gli intervalli della $(*)$, ed u_i' qualsivoglia in $(u_i, u_{i+1}) - (c, d)$.

Considerata la somma $\sum\limits_{i=1}^{m-1}(u_{i+1} - u_i) \cdot f(u_i'')$, estesa agli intervalli (0), con u_i'' qualsivoglia in (u_i, u_{i+1}), scegliamo quando è possibile u_i', in $(u_i, u_{i+1}) - (c, d)$, in modo che sia $u_i' = u_i''$; poichè allora risulta

$$| \sum{}^{(*)} (u_{i+1} - u_i) \cdot f(u_i') - \sum_{i=1}^{m-1} (u_{i+1} - u_i) \cdot f(u_i'') | < 3 \varepsilon M,$$

essendo M il confine superiore di $| f(x) |$ in (a, b), ed avendo supposto, come è lecito, $\delta < \varepsilon$, si deduce:

$$| I - \sum_{i=1}^{m-1} (u_{i+1} - u_i) \cdot f(u_i'' | < \varepsilon + 3 \varepsilon M .$$

Quest'ultima ci dice che $f(x)$ è integrabile secondo RIEMANN, ed I è l'integrale di $f(x)$ in (a, b).

Inversamente, detto I l'integrale secondo RIEMANN di $f(x)$ in (a, b), preso un $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i') \right| < \varepsilon,$$

per ogni gruppo di punti, di (a, b), $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, con $x_{i+1} - x_i < \delta$, ed x_i' qualsivoglia in (x_i, x_{i+1}). Consideriamo un Δ arbitrario di (a, b), ed un gruppo di punti u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ di (a, b) soddisfacente le condizioni α); se risulta $u_{i+1} - u_i \geqslant \delta$, (u_i, u_{i+1}) ha tutti i punti interni appartenenti a Δ, e noi allora tra i punti u_i, u_{i+1} inseriamo un numero finito di punti in modo che (u_i, u_{i+1}) venga suddiviso in intervalli parziali ciascuno di ampiezza $< \delta$. Denotiamo con $v_1, v_2, \ldots, v_m$ la suddivisione di (a, b) che si ottiene così operando. Poichè la differenza, in valore assoluto,

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) \cdot f(u_i') - \sum_{j=1}^{m-1} (v_{j+1} - v_j) \cdot f(v_j') \right|,$$

con u_i' in $(u_i, u_{i+1}) - \Delta$, è maggiorata da $2 \mid \Delta \mid . M$, se fissiamo v_j' coincidente con u_i' quando è $u_i = v_j$, $u_{i+1} = v_{j+1}$, risulta manifestamente:

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) \cdot f(u_i') \right| < \varepsilon + 2 \mid \Delta \mid . M < \varepsilon + 2\varepsilon M .$$

Quest'ultima ci dice che $f(x)$ è integrabile (R) ed I è l'integrale (R) di $f(x)$.

5. – Definizione d'integrabilità (L).

Diremo I l'integrale (L) *di $f(x)$, $x \in (a, b)$, se per ogni $\varepsilon > 0$ è determinato un intero ν tale che per ogni coppia d'interi p, q, con $p > \nu$, $q > \nu$, esiste almeno un Δ di (a, b), con $\mid \Delta \mid . < \varepsilon/p$, $\mid \Delta \mid . < \varepsilon/q$, ed un $\delta > 0$ in modo che si abbia:*

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f_{p,q}(x_i') - I \right| < \varepsilon \quad (^{14})$$

per ogni gruppo di punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di (a, b) soddisfacente le condizioni α), ed x_i' qualsivoglia in $(x_i, x_{i+1}) - \Delta$.

(14) Con $f_{p,q}(x)$ abbiamo denotato la funzione definita in (a, b) nel seguente modo:

$$f_{p,q}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ove è} \quad -q \leqslant f(x) \leqslant p, \\ -q & \text{ove è} \quad f(x) < -q, \\ p & \text{ove è} \quad f(x) > p. \end{cases}$$

6. – Lemma.

Fissati ad arbitrio due plurintervalli aperti Δ, Δ' di (a, b) e due numeri positivi δ, δ', è possibile costruire due suddivisioni di (a, b),

$$u_1, u_2, \ldots, u_r; \qquad v_1, v_2, \ldots, v_s$$

soddisfacenti le condizioni:

1°) $a = u_1 < u_2 < \ldots < u_r = b, \qquad a = v_1 < v_2 < \ldots < v_s = b;$

2°) *se un intervallo* (u_i, u_{i+1}) $[(v_j, v_{j+1})]$ *ha punti interni fuori di* Δ $[\Delta']$ *sia* $u_{i+1} - u_i < \delta$ $[v_{j+1} - v_j < \delta']$;

3°) *se un intervallo* (u_i, u_{i+1}) $[(v_j, v_{j+1})]$ *ha i punti interni tutti in* Δ $[\Delta']$ *almeno uno dei suoi estremi è fuori di* Δ $[\Delta']$;

4°) *la somma delle ampiezze degli intervalli* (u_i, u_{i+1}) *che non coincidono con intervalli del tipo* (v_j, v_{j+1}) *risulta non maggiore di* $|\Delta| + |\Delta'|$..

D i m o s t r a z i o n e.

Sia δ^* il più piccolo tra δ, δ', e costruiamo prima un gruppo di punti $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_t = b$ soddisfacente le condizioni:

a) x_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$ appartenga ad $(a, b) - \Delta - \Delta'$;

b) se (x_i, x_{i+1}) ha qualche punto interno appartenente ad $(a, b) - \Delta - \Delta'$, sia $x_{i+1} - x_i < \delta^*$.

Detto n il più piccolo intero tale che $(b-a)/n < \delta^*$, dividiamo (a, b) in intervalli parziali mediante la suddivisione

$$\mathrm{D}: \qquad a = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n+1} = b,$$

con

$$\alpha_{i+1} - \alpha_i < (b-a)/n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Supponiamo che non tutti i punti α_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ appartengano ad $(a, b) - \Delta - \Delta'$ [in caso contrario la D soddisfa le condizioni a), b)], e sia α_p il primo punto di D, certamente distinto da α_1, che non appartiene ad $(a, b) - \Delta - \Delta'$. Se il punto α_{p+1} appartiene ad $(a, b) - \Delta - \Delta'$, denotiamo con η_p il massimo dell'insieme chiuso $(\alpha_{p-1}, \alpha_p) - \Delta - \Delta'$, e con ξ_{p+1} il minimo dell'insieme chiuso $(\alpha_p, \alpha_{p+1}) - \Delta - \Delta'$. Dalla suddivisione D togliamo il punto α_p ed inseriamo in D i punti η_p, ξ_{p+1}. Se invece α_{p+1} non appartiene ad $(a, b) - - \Delta - \Delta'$, sia (α_q, α_{q+1}) il primo intervallo della D, dopo (α_p, α_{p+1}), avente qualche punto appartenente ad $(a, b) - \Delta - \Delta'$. Denotiamo con η_p il massimo dell'insieme chiuso $(\alpha_{p-1}, \alpha_p) - \Delta - \Delta'$, con ξ_{p+1}, η_{p+1} rispettivamente il minino ed il massimo dell'insieme chiuso $(\alpha_p, \alpha_{p+1}) - \Delta - \Delta'$ (quando tale insieme non è vuoto), e con ξ_q il minimo dell'insieme chiuso $(\alpha_q, \alpha_{q+1}) - \Delta - \Delta'$. Dalla suddivisione D togliamo i punti $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_q$ ed inseriamo i punti η_p, ξ_{p+1}, η_{p+1}, ξ_q. Chiamiamo D_1 la suddivisione ottenuta da D dopo avere, con le considerazioni precedenti, tolto il punto α_p o i punti $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_q$ ed inserito altri punti. Detto α_r il primo punto della D_1 che non appartiene ad $(a, b) - \Delta - \Delta'$, si ripeta la costruzione precedente, e così di seguito. In tal modo si costruisce, partendo dalla D, un ben determinato gruppo di punti $x_1, x_2, \ldots, x_t$ $(t < 2n)$ che soddisfa le condizioni a), b).

Partiamo ora dal gruppo di punti $x_1, x_2, \ldots, x_t$ ed osserviamo che se un intervallo (x_i, x_{i+1}) ha ampiezza maggiore od uguale a δ^*, i suoi punti interni appartengono o tutti a Δ, o tutti a Δ', o parte a Δ e i rimanenti a Δ', e quindi la somma delle ampiezze di tali intervalli [cioè degli intervalli (x_i, x_{i+1}) con $x_{i+1} - x_i \geqslant \delta^*$] è non maggiore di $|\Delta|. + |\Delta'|.$ Prendiamo in considerazione quegli intervalli (x_i, x_{i+1}) con $x_{i+1} - x_i \geqslant \delta$ $[x_{i+1} - x_i \geqslant \delta']$ e che non coincidono con un intervallo di Δ $[\Delta']$; tra i punti x_i, x_{i+1} inseriamone altri (in numero finito), appartenenti ad $(a, b) - \Delta$ $[(a, b) - \Delta']$, in modo che l'intervallo (x_i, x_{i+1}) venga suddiviso in intervalli parziali ciascuno dei quali sia d'ampiezza minore di δ $[\delta']$ nel caso che essi abbiano punti interni non appartenenti a Δ $[\Delta']$. Denotiamo con $u_1, u_2, \ldots, u_r$ $[v_1, v_2, \ldots, v_s]$ il gruppo di punti costituito dai punti x_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$ e da quelli eventualmente ora inseriti. I due gruppi u_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, v_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ soddisfano, manifestamente, le condizioni 1°), 2°), 3°), 4°), ed il lemma è così completamente dimostrato.

7. – Teorema di unicità.

I è unico. Se anche I' soddisfa la (1), in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ è determinato un intero ν' tale che per ogni coppia d'interi p, q, con $p > \nu'$, $q > \nu'$, esiste un Δ', con $|\Delta'|. < \varepsilon/p$, $|\Delta'|. < \varepsilon/q$, ed un $\delta' > 0$ in modo da aversi:

$$(1') \qquad \left| I' - \sum_{i=1}^{m-1} (z_{i+1} - z_i) \cdot f_{p,q}(z'_i) \right| < \varepsilon,$$

per ogni gruppo $z_1, z_2, \ldots, z_m$ di (a, b) soddisfacente le condizioni α), quando nelle α) si sostituisce x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ con z_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, Δ con Δ' δ, con δ', con z'_i qualsivoglia in $(z_i, z_{i+1}) - \Delta'$.

Sia ν^* il più grande tra ν e ν', e $\bar{p}$ un intero maggiore di ν^*. Dall'esistenza del numero $I\,[I']$ vengono allora ad essere determinati un $\bar{\Delta}\,[\bar{\Delta}']$, con $|\bar{\Delta}|. < \varepsilon/p\ [\,|\bar{\Delta}|. < \varepsilon/\bar{p}]$, e un $\bar{\delta} > 0\ [\bar{\delta}' > 0]$ per i quali vale la (1) $[(1')]$ con $p = q = \bar{p}$, e per ogni gruppo x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ $[z_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)]$ soddisfacente le condizioni di validità della (1) $[(1')]$, quando in tali condizioni si sostituisce Δ con $\bar{\Delta}\,[\bar{\Delta}']$, δ con $\bar{\delta}\,[\bar{\delta}']$, e con $x'_i\,[z'_i]$ qualsivoglia in $(x_i, x_{i+1}) - \bar{\Delta}$ $[(z_i, z_{i+1}) - \bar{\Delta}']$.

In virtù del lemma del n. **6** costruiamo due gruppi $u_1, u_2, \ldots, u_r;\ v_1, v_2, \ldots, v_s$ di (a, b) soddisfacenti le condizioni 1°), 2°), 3°), 4°), quando i plurintervalli aperti prefissati siano $\bar{\Delta}$, $\bar{\Delta}'$ ed i numeri positivi prefissati siano $\bar{\delta}$, $\bar{\delta}'$. Risulta allora:

$$|\,I - \sum_{i=1}^{r-1}(u_{i+1} - u_i)\cdot f_{\bar{p},\bar{q}}(u'_i)\,| < \varepsilon, \qquad |\,I' - \sum_{j=1}^{s-1}(v_{j+1} - v_j)\cdot f_{\bar{p},\bar{q}}(v'_j)\,| < \varepsilon,$$

qualunque sia u'_i in $(u_i, u_{i+1}) - \bar{\Delta}$ e v'_j in $(v_j, v_{j+1}) - \bar{\Delta}'$.

Poichè dalla condizione 4°) del lemma del n. **6**, scegliendo $u'_i = v'_j$ quando è $u_i = v_j$, $u_{i+1} = v_{j+1}$, la differenza in valore assoluto

$$|\,\sum_{i=1}^{r-1}(u_{i+1} - u_i)\cdot f_{\bar{p},\bar{q}}(u'_i) - \sum_{j=1}^{s-1}(v_{j+1} - v_j)\cdot f_{\bar{p},\bar{q}}(v'_j)\,|$$

è maggiorata dal numero

$$\{\,|\bar{\Delta}|. + |\bar{\Delta}'|.\,\}\,\bar{p},$$

segue manifestamente:

$$|\,I - I'\,| < 2\varepsilon + \{\,|\bar{\Delta}|. + |\bar{\Delta}'|.\,\}\,\bar{p} < 2\varepsilon + (\varepsilon/\bar{p} + \varepsilon/\bar{p})\bar{p} = 4\varepsilon\,.$$

Cioè $I = I'$.

8. – Equivalenza, nella classe delle funzioni quasi continue, tra la definizione d'integrabilità (L) e la definizione d'integrabilità secondo Lebesgue.

Tale equivalenza la mostreremo prima nella classe delle funzioni quasi continue e limitate.

Osserviamo che se $f(x)$ è limitata la definizione d'integrabilità (L) del n. **5** si riduce alla definizione b) della introduzione. E poichè una funzione quasi continua e limitata è integrabile secondo Lebesgue, in virtù del teorema di

A. MAMBRIANI [15] e del teorema di unicità del n. 7, $f(x)$ risulta integrabile (L) e l'integrale secondo LEBESGUE di $f(x)$ coincide con l'integrale (L) [16].

Dimostriamo ora l'equivalenza nella classe delle funzioni quasi continue e non limitate.

Detto I l'integrale secondo LEBESGUE di $f(x)$ in (a, b), in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ è determinato un intero ν tale che per ogni coppia d'interi p, q, con $p > \nu$, $q > \nu$, si abbia:

$$\left| \int_a^b f_{p,q}(x)\, dx - I \right| < \varepsilon .$$

Siano p, q, con $p > \nu$, $q > \nu$, due interi; poichè $f_{p,q}(x)$ (in virtù della equivalenza mostrata per le funzioni quasi continue limitate) è integrabile (L), in corrispon-

---

(15) Cfr. l'annotazione (6).

(16) Per comodità del lettore diamo qui una dimostrazione diretta di tale equivalenza. Detto I l'integrale di $f(x)$ secondo LEBESGUE, in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ è determinato un $\sigma > 0$ tale che per ogni Δ di (a, b) associato alla $f(x)$, con $|\Delta|. < \sigma$, si abbia:

$$\left| \int_a^b {}_{\Delta}f(x)\, dx - I \right| < \varepsilon .$$

Fissiamo un $\overline{\Delta}$ di (a, b) associato alla $f(x)$, con $|\overline{\Delta}|. < \sigma$, $|\overline{\Delta}|. < \varepsilon$, ed osserviamo che, essendo ${}_{\overline{\Delta}}f(x)$ (continua) integrabile (R) in (a, b), in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ ed a $\overline{\Delta}$, esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot {}_{\overline{\Delta}}f(x_i') - \int_a^b {}_{\overline{\Delta}}f(x)\, dx \right| < \varepsilon ,$$

per ogni gruppo di punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, di (a, b), soddisfacente le condizioni α) quando nelle α) si sostituisce Δ con $\overline{\Delta}$, essendo x_i' qualsivoglia in $(x_i, x_{i+1}) - \overline{\Delta}$. Ma è:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot {}_{\overline{\Delta}}f(x_i') = \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i')$$

qualunque sia x_i' in $(x_i, x_{i+1}) - \overline{\Delta}$, e quindi risulta:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i') - I \right| < 2\varepsilon .$$

La $f(x)$ è dunque integrabile (L) ed I è l'integrale (L).

La definizione d'integrale di LEBESGUE adoperata è quella data da L. TONELLI [cfr.: *Sulla nozione di integrale*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **1** (1923-24), 105-145].

denza ad ε/p (supposto, ad esempio, $\varepsilon/p < \varepsilon/q$) esiste un Δ, con $|\Delta|. < \varepsilon/p$, ed un $\delta > 0$ tale che si abbia:

$$\left| \int_a^b f_{p,q}(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\cdot f_{p,q}(x_i') \right| < \varepsilon/p < \varepsilon$$

per ogni gruppo di punti x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ soddisfacente le condizioni α).

Segue allora:

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\cdot f_{p,q}(x_i') \right| < 2\varepsilon .$$

Quest'ultima ci dice che $f(x)$ è integrabile (L), ed I è l'integrale (L).

Inversamente, sia I l'integrale (L) di $f(x)$ in (a, b). Poichè $f_{p,q}(x)$, con $p > \nu$, $q > \nu$, è integrabile (L) (in virtù della equivalenza mostrata per le funzioni quasi continue limitate), in corrispondenza ad ε/p (supposto, ad esempio, $\varepsilon/p < \varepsilon/q$) è determinato un Δ' con $|\Delta'|. < \varepsilon/p$, ed un $\delta' > 0$, tali che si abbia:

$$\left| \int_a^b f_{p,q}(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{m-1} (z_{i+1} - z_i)\cdot f_{p,q}(z_i') \right| < \varepsilon/p < \varepsilon$$

per ogni gruppo z_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ di (a, b) soddisfacente le condizioni α), quando nelle α) si sostituisca x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ con z_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, Δ con Δ', δ con δ'; e z_i' essendo qualsivoglia in $(z_i, z_{i+1}) - \Delta'$. Siano $u_1, u_2, \ldots, u_r$; $v_1, v_2, \ldots, v_s$ due gruppi di punti che soddisfano le condizioni 1°), 2°), 3°), 4°) del lemma del n. **6**; si ha manifestamente:

$$\left| I - \sum_{i=1}^{r-1} (u_{i+1} - u_i)\cdot f_{p,q}(u_i') \right| < \varepsilon, \qquad \left| \int_a^b f_{p,q}(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^{s-1} (v_{j+1} - v_j)\cdot f_{p,q}(v_j') \right| < \varepsilon$$

qualunque sia u_i' in $(u_i, u_{i+1}) - \Delta$ e v_j' in $(v_j', v_{j+1}) - \Delta'$. Scegliamo ora $u_i' = v_j'$ quando è $u_i = v_j$, $u_{i+1} = v_{j+1}$; in tal caso la differenza, in valore assoluto,

$$\left| \sum_{i=1}^{r-1} (u_{i+1} - u_i)\cdot f_{p,q}(u_i') - \sum_{j=1}^{s-1} (v_{j+1} - v_j)\cdot f_{p,q}(v_j') \right|,$$

in virtù della condizione 4°) del n. **6** a cui soddisfano i gruppi u_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, v_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ è maggiorata dal numero $\{ |\Delta|. + |\Delta'|. \} p$, e quindi si ha:

$$\left| \int_a^b f_{p,q}(x)\,\mathrm{d}x - I \right| < 2\varepsilon + \{ |\Delta|. + |\Delta'|. \} p < 2\varepsilon + (\varepsilon/p + \varepsilon/p) p = 4\varepsilon,$$

qualunque siano gli interi p, q con $p > \nu$, $q > \nu$.

La $f(x)$ è quindi integrabile secondo LEBESGUE, ed I è l'integrale di $f(x)$ secondo LEBESGUE.

§ 2. – Integrazione del secondo ordine.

1. – Definizione d'integrabilità (R).

Tale definizione è stata data nella introduzione, ed abbiamo fatto vedere che non è equivalente alla definizione d'integrabilità secondo RIEMANN.

2. – Definizione d'integrabilità (L).

Sia $f(x, y)$ una funzione definita in un rettangolo $\mathfrak{R}$: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Supponiamo che per quasi tutti i punti x di (a, b) esista l'integrale (L): $\int_c^d f_{p,q}(x, y)\, dy$, e per puasi tutti i punti y di (c, d) esista l'integrale (L): $\int_a^b f_{p,q}(x, y)\, dx$, qualunque siano gli interi p, q.

Diremo I l'integrale (L) *di* $f(x, y)$ *in* $\mathfrak{R}$ *se in corrispondenza ad* $\varepsilon > 0$ *è determinato un intero* ν *tale che per ogni coppia d'interi* p, q, *con* $p > \nu$, $q > \nu$, *esistano almeno due plurintervalli aperti* $\Delta^{(x)}$, $\Delta^{(y)}$ (17), *l'uno di* (a, b), *l'altro di* (c, d), *con*

$$|\Delta^{(x)}| < \varepsilon/p, \quad |\Delta^{(x)}| < \varepsilon/q, \quad |\Delta^{(y)}| < \varepsilon/p, \quad |\Delta^{(y)}| < \varepsilon/q,$$

ed un $\delta > 0$ *in modo da aversi*

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \int_c^d f_{p,q}(x_i', y)\, dy \right| < \varepsilon,$$

$$\left| I - \sum_{j=1}^{m-1} (y_{j+1} - y_j) \cdot \int_a^b f_{p,q}(x, y_j')\, dx \right| < \varepsilon,$$

per ogni gruppo di punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *di* (a, b) *e per ogni gruppo* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *di* (c, d) *soddisfacenti le condizioni* γ) *della introduzione, con* x_i' $[y_j']$ *qualsivoglia in* $(x_i, x_{i+1}) - \Delta^{(x)}$ $[(y_j, y_{j+1}) - \Delta^{(y)}]$.

---

(17) In questo paragrafo con $\Delta^{(x)}$, $\Delta^{(y)}$ denoteremo sempre due plurintervalli aperti, rispettivamente di (a, b) e (c, d).

3. — Teorema di unicità.

L'unicità di I si dimostra con considerazioni analoghe a quelle fatte nel n. 7 del § 1.

4. — Equivalenza, nella classe delle funzioni quasi continue, tra la definizione d'integrabilità (L) e la definizione d'integrabilità secondo Lebesgue.

Tale equivalenza la mostreremo prima nella classe delle funzioni quasi continue e limitate.

Osserviamo che se $f(x, y)$ è limitata la definizione d'integrabilità (L) del n. 2 si riduce alla definizione c) della introduzione, e per una funzione quasi continua limitata vale come è noto il teorema di riduzione di FUBINI. Si ha quindi:

$$\int\int_{\mathfrak{R}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx,$$

ove gli integrali (secondo LEBESGUE)

$$\alpha(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy, \qquad \beta(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

esistono rispettivamente per quasi tutti i punti x di (a, b) ed y di (c, d), ed inoltre $\alpha(x)$, $\beta(y)$ sono quasi continue e limitate rispettivamente in (a, b) e (c, d). Ed allora, in virtù della equivalenza dimostrata, nella classe delle funzioni quasi continue di una sola variabile, tra la definizione d'integrabilità (L) e la definizione d'integrabilità secondo LEBESGUE, segue che $f(x, y)$ è integrabile (L) in $\mathfrak{R}$ ed è:

$$I = \int\int_{\mathfrak{R}} f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Mostriamo l'equivalenza nella classe delle funzioni quasi continue non limitate. Detto I l'integrale secondo LEBESGUE di $f(x, y)$ in $\mathfrak{R}$, in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ è determinato un intero ν tale che per ogni coppia d'interi p, q, con $p > \nu$, $q > \nu$, si abbia:

$$\left| \int\int_{\mathfrak{R}} f_{p,q}(x, y)\, dx\, dy - I \right| < \varepsilon\,.$$

Siano p, q due interi con $p > \nu$, $q > \nu$; poichè $f_{p,q}(x, y)$ è integrabile (L) in $\mathfrak{R}$ (per l'equivalenza mostrata nella classe delle funzioni quasi continue limitate di due variabili), in corrispondenza ad ε/p (supposto, ad esempio, $\varepsilon/p < \varepsilon/q$) esistono un $\Delta^{(x)}$ e un $\Delta^{(y)}$, con $|\Delta^{(x)}| . < \varepsilon/p$, $|\Delta^{(y)}| . < \varepsilon/q$, ed un $\delta > 0$ tali che si abbia:

$$\left| \iint_{\mathfrak{R}} f_{p,q}(x, y) \, dx \, dy - \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \int_c^d f_{p,q}(x_i', y) \, dy \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \iint_{\mathfrak{R}} f_{p,q}(x, y) \, dx \, dy - \sum_{j=1}^{m-1} (y_{j+1} - y_j) \cdot \int_a^b f_{p,q}(x, y_j') \, dx \right| < \varepsilon,$$

per ogni gruppo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di (a, b), e per ogni gruppo $y_1, y_2, \ldots, y_m$ di (c, d) soddisfacenti le condizioni γ), con x_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ qualsivoglia in $(x_i, x_{i+1}) - \Delta^{(x)}$, e y_j' $(j = 1, 2, \ldots, m)$ qualsivoglia in $(y_j, y_{j+1}) - \Delta^{(y)}$. Ne segue:

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \int_c^d f_{p,q}(x_i', y) \, dy \right| < 2\varepsilon,$$

$$\left| I - \sum_{j=1}^{m-1} (y_{j+1} - y_j) \cdot \int_a^b f_{p,q}(x, y_j') \, dx \right| < 2\varepsilon,$$

quindi $f(x, y)$ è integrabile (L) ed I è l'integrale (L).

Inversamente, sia I l'integrale (L) di $f(x, y)$ in $\mathfrak{R}$. Poichè $f_{p,q}(x, y)$, con $p > \nu$, $q > \nu$, è integrabile (L) (in virtù della equivalenza mostrata nella classe delle funzioni quasi continue limitate), in corrispondenza ad ε/p (supposto $\varepsilon/p < \varepsilon/q$) è determinato un $\overline{\Delta}^{(x)}$, con $|\overline{\Delta}^{(x)}| . < \varepsilon/p$, ed un $\delta' > 0$ tali che risulti:

$$\left| \iint_{\mathfrak{R}} f_{p,q}(x, y) \, dx \, dy - \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \int_c^d f_{p,q}(x_i', y) \, dy \right| < \varepsilon,$$

per ogni gruppo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di (a, b) soddisfacente le condizioni α) quando nelle α) si sostituisce Δ con $\overline{\Delta}^{(x)}$, e δ con δ'. Siano $u_1, u_2, \ldots, u_r$; $v_1, v_2, \ldots, v_s$ due gruppi di (a, b) che soddisfano le condizioni 1º), 2º), 3º), 4º) del lemma del

n. **6**, § **1**, quando in tale lemma si sostituisce Δ con $\Delta^{(x)}$ e Δ' con $\overline{\Delta}^{(x)}$; si ha allora manifestamente:

$$\left| I - \sum_{i=1}^{r-1} (u_{i+1} - u_i) \cdot \int_c^d f_{p,q}(u_i', \ y)\, dy \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \iint_{\mathfrak{R}} f(x, \ y)\, dx\, dy - \sum_{j=1}^{s-1} (v_{j+1} - v_j) \cdot \int_c^d f_{p,q}(v_j', \ y)\, dy \right| < \varepsilon,$$

qualunque sia u_i' in $(u_i, \ u_{i+1}) - \Delta^{(x)}$, e v_j' in $(v_j, \ v_{j+1}) - \overline{\Delta}^{(x)}$. Scegliamo ora $u_i' = v_j'$,quando è $u_i = v_j$, $u_{i+1} = v_{j+1}$; in tal caso, in virtù della condizione 4°) del n. **6**, § **1**, la quantità

$$\left| \sum_{i=1}^{r-1} (u_{i+1} - u_i) \cdot \int_c^d f_{p,q}(u_i', \ y)\, dy - \sum_{j=1}^{s-1} (v_{j+1} - v_j) \cdot \int_c^d f_{p,q}(v_j', \ y)\, dy \right|$$

è maggiorata dal numero $\{ |\Delta^{(x)}|. + |\overline{\Delta}^{(x)}|. \} p \cdot (d - c)$, e quindi si ha:

$$\left| \iint_{\mathfrak{R}} f_{p,q}(x, \ y)\, dx\, dy - I \right| < 2\varepsilon + \{ |\Delta^{(x)}|. + |\overline{\Delta}^{(x)}|. \} p \cdot (d - c) \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon \cdot (\varepsilon/p + \varepsilon/p) p \cdot (d - c) = 4\varepsilon^2 \cdot (d - c),$$

qualunque siano p, q, con $p > \nu$, $q > \nu$. La $f(x, y)$ è dunque integrabile secondo Lebesgue, ed I è l'integrale secondo Lebesgue.

§ 3. – **Integrazione globale in dimensione** 2.

1. – Definizione d'integrabilità (R).

Diremo I *l'integrale* (R) *di* $f(x, y)$, $(x, y) \in \mathfrak{R}$, *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *ed ogni plurirettangolo aperto* Δ ([18]) *di* $\mathfrak{R}$, *con* $|\Delta|. < \varepsilon$, *esiste un* $\delta > 0$ *tale che si abbia:*

$$(1) \qquad \left| I - \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i|. \ f(x_i', \ y_i') \right| < \varepsilon,$$

([18]) In questo paragrafo con un simbolo del tipo Δ denoteremo sempre un plurirettangolo aperto di $\mathfrak{R}$, cioè un insieme aperto di $\mathfrak{R}$.

per ogni gruppo di rettangoli $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ *costituente una suddivisione del rettangolo* $\mathfrak{R}$, *con la condizione che ogni* $\mathfrak{R}_i$ *abbia il diametro minore di* δ; *per* (x'_i, y'_i) *qualsivoglia in* $\mathfrak{R}_i - \Delta$, *e se tale insieme è vuoto si ponga* $f(x'_i, y'_i) = 0$.

2. – Teorema di unicità.

I è unico. Omettiamo la dimostrazione perchè è immediata.

3. – Condizione necessaria per l'integrabilità.

Condizione necessaria affinchè una funzione $f(x, y)$ sia integrabile (R) in $\mathfrak{R}$ è che essa sia limitata in $\mathfrak{R}$. La dimostrazione è immediata ed elementare.

4. – Equivalenza tra la definizione d'integrabilità (R) e la definizione d'integrabilità secondo Riemann.

Detto I l'integrale (R) della $f(x, y)$ in $\mathfrak{R}$, consideriamo la somma $\sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| . f(x_i, y_i)$, con (x_i, y_i) qualsivoglia in $\mathfrak{R}$, e fissiamo nella (1) il punto (x'_i, y'_i) in $\mathfrak{R}_i - \Delta$ in modo che risulti, quando è possibile, coincidente con (x_i, y_i). La differenza, in valore assoluto,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| . f(x_i, y_i) - \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| . f(x'_i, y'_i) \right|$$

risulta allora maggiorata dal numero $|\Delta| . M$, essendo M il confine superiore di $|f(x, y)|$ in $\mathfrak{R}$, e quindi segue:

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| . f(x_i, y_i) \right| < \varepsilon + |\Delta| . M < \varepsilon \cdot (1 + M) .$$

Quest'ultima ci dice che $f(x, y)$ è integrabile in $\mathfrak{R}$ secondo RIEMANN ed I è l'integrale di $f(x, y)$ secondo RIEMANN.

Inversamente, detto I l'integrale di $f(x, y)$ secondo RIEMANN, in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che si abbia:

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| . f(x_i, y_i) \right| < \varepsilon, \tag{2}$$

per ogni suddivisione $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ di $\mathfrak{R}$, con $\mathfrak{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ avente diametro $< \delta$ e (x_i, y_i) qualsivoglia in $\mathfrak{R}_i$. Consideriamo un Δ arbitrario di $\mathfrak{R}$, con $|\Delta| < \varepsilon$, e la somma $\sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| . f(x_i', y_i')$, essendo (x_i', y_i') qualsivoglia in $\mathfrak{R}_i - \Delta$, e se tale insieme è vuoto si ponga $f(x_i', y_i') = 0$. Fissiamo nella (2) il punto (x_i, y_i) in modo che risulti, quando è possibile, coincidente con (x_i', y_i'); in tal caso la differenza, in valore assoluto,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| . f(x_i, y_i) - \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| . f(x_i', y_i') \right|$$

risulta maggiorata dal numero $|\Delta| . M$, essendo M il confine superiore di $|f(x, y)|$ in $\mathfrak{R}$, e quindi si ha:

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| . f(x_i', y_i') \right| < \varepsilon + |\Delta| . M < \varepsilon \cdot (1 + M) .$$

Quest'ultima ci dice che $f(x, y)$ è integrabile (R), ed I è l'integrale (R).

5. – Definizione d'integrabilità (L).

Diremo I l'integrale (L) *di $f(x, y)$ in $\mathfrak{R}$, se per ogni $\varepsilon > 0$ è determinato un intero ν tale che per ogni coppia d'interi p, q, con $p > \nu$, $q > \nu$, esista almeno un Δ di $\mathfrak{R}$, con $|\Delta| < \varepsilon/p$, $|\Delta| < \varepsilon/q$, ed un $\delta > 0$ in modo che si abbia:*

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| . f_{p,q}(x_i', y_i') \right| < \varepsilon \quad (^{19})$$

per ogni suddivisione $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ di $\mathfrak{R}$, con $\mathfrak{R}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ avente diametro $< \delta$, con (x_i', y_i') qualsivoglia in $\mathfrak{R}_i - \Delta$, e, se tale insieme è vuoto, si ponga $f_{p,q}(x_i', y_i') = 0$.

6. – Teorema di unicità.

I è unico. La dimostrazione è immediata.

---

(19) Con $f_{p,q}(x, y)$ si denota la funzione definita in $\mathfrak{R}$ in modo analogo a come s'è definita la funzione $f_{p,q}(x)$ in (a, b). Cfr. annotazione (14).

7. – Equivalenza, nel campo delle funzioni quasi continue, tra la definizione d'integrabilità (L) e la definizione d'integrabilità secondo Lebesgue.

Mostriamo prima l'equivalenza nella classe delle funzioni quasi continue limitate. Osserviamo intanto che quando $f(x, y)$ è limitata la definizione d'integrabilità (L) si riduce alla definizione e) data nella introduzione. E per una funzione quasi continua limitata, detto I l'integrale di $f(x, y)$ secondo LEBESGUE, in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ esiste un σ tale che, per ogni Δ di $\mathfrak{R}$, associato [20] alla $f(x, y)$, con $|\Delta|. < \sigma$, si abbia:

$$\left| \iint_{\mathfrak{R}} {}_{\Delta}f(x, y)\, dx\, dy - I \right| < \varepsilon \quad (^{21}).$$

Fissiamo un $\bar{\Delta}$ associato alla f, con $|\bar{\Delta}|. < \sigma$, $|\bar{\Delta}|. < \varepsilon$. Poichè la funzione ${}_{\bar{\Delta}}f$ è integrabile secondo RIEMANN e quindi integrabile (R) in $\mathfrak{R}$, in corrispondenza ad ε ed a $\bar{\Delta}$ esiste un $\delta > 0$ tale che si abbia:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| \,.\, {}_{\bar{\Delta}}f(x'_i, y'_i) - \iint_{\mathfrak{R}} {}_{\bar{\Delta}}f(x, y)\, dx\, dy \right| < \varepsilon,$$

per ogni suddivisione $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ di $\mathfrak{R}$, con $\mathfrak{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ avente diametro $< \delta$, con (x'_i, y'_i) qualsivoglia in $\mathfrak{R}_i - \bar{\Delta}$, ponendo, se tale insieme è vuoto, ${}_{\bar{\Delta}}f(x'_i, y'_i) = 0$. Ma è

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| \,.\, {}_{\bar{\Delta}}f(x'_i, y'_i) = \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| \,.\, f(x'_i, y'_i),$$

---

(20) Per plurirettangolo aperto Δ associato alla $f(x, y)$ intendiamo un plurirettangolo aperto di $\mathfrak{R}$ [insieme aperto di $\mathfrak{R}$, cfr. annotazione (10)] tale che la $f(x, y)$ risulti continua in $\mathfrak{R}$ quando non si considerino affatto i punti di Δ e con essi si trascurino anche i valori corrispondenti della funzione. Per definizione di quasi continuità di $f(x, y)$ in $\mathfrak{R}$, per ogni intero positivo n esiste almeno un plurirettangolo aperto Δ associato alla $f(x, y)$, con $|\Delta|. < 1/n$.

(21) Con il simbolo ${}_{\Delta}f(x, y)$, essendo Δ un plurirettangolo aperto associato alla f, denotiamo la funzione (detta associata alla f secondo Δ) definita dal TONELLI [cfr. G. SANSONE: *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. 1 (ediz. 10ma), Casa Cedam, Padova 1952, vedasi pag. 395], che risulta continua in $\mathfrak{R}$, in $\mathfrak{R} - \Delta$ è ${}_{\Delta}f = f$, ed inoltre il minimo ed il massimo di f in $\mathfrak{R} - \Delta$ rappresentano rispettivamente il minimo e il massimo di ${}_{\Delta}f$ in $\mathfrak{R}$.

qualunque sia il punto (x'_i, y'_i) in $\mathfrak{R}_i - \bar{\Delta}$, ponendo, quando tale insieme è vuoto, ${}_{\bar{\Delta}}f(x'_i, y'_i) = f(x'_i, y'_i) = 0$, e quindi si deduce:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| . f(x'_i, y'_i) - I \right| < 2\varepsilon .$$

La $f(x, y)$ è dunque integrabile (L), ed I è l'integrale (L) di $f(x, y)$ in $\mathfrak{R}$.

Mostriamo ora l'equivalenza nella classe delle funzioni quasi continue non limitate. Detto I l'integrale secondo LEBESGUE di $f(x, y)$ in $\mathfrak{R}$, per ogni $\varepsilon > 0$ è determinato un intero ν tale che per ogni coppia d'interi p, q, con $p > \nu$, $q > \nu$, si abbia:

$$\left| \iint_{\mathfrak{R}} f_{p,q}(x, y)\, dx\, dy - I \right| < \varepsilon .$$

Siano p, q due interi con $p > \nu$, $q > \nu$. La funzione $f_{p,q}(x, y)$ è integrabile (L) in $\mathfrak{R}$ (in virtù della equivalenza mostrata nella classe delle funzioni quasi continue limitate), e quindi in corrispondenza ad ε/p (supposto $\varepsilon/p < \varepsilon/q$) esiste un Δ di $\mathfrak{R}$, con $|\Delta| . < \varepsilon/p$, ed un $\delta > 0$ tale che si abbia:

$$\left| \iint_{\mathfrak{R}} f_{p,q}(x, y)\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| .\ f_{p,q}(x'_i, y'_i) \right| < \varepsilon$$

per ogni suddivisione $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ di $\mathfrak{R}$, con $\mathfrak{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ avente diametro $< \delta$, con (x'_i, y'_i) qualsivoglia in $\mathfrak{R}_i - \Delta$, ponendo, se tale insieme è vuoto, $f_{p,q}(x'_i, y'_i) = 0$. Si deduce immediatamente

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{R}_i| .\ f_{p,q}(x'_i, y'_i) \right| < 2\varepsilon$$

e quindi $f(x, y)$ è integrabile (L) ed I è l'integrale (L) di $f(x, y)$ in $\mathfrak{R}$.

Inversamente, sia I l'integrale (L) di $f(x, y)$ in $\mathfrak{R}$. Poichè $f_{p,q}(x, y)$ con $p > \nu$, $q > \nu$, è integrabile (L) (in virtù della equivalenza mostrata nella classe delle funzioni quasi continue limitate), in corrispondenza ad ε/p (supposto $\varepsilon/p < \varepsilon/q$) è determinato un $\bar{\Delta}$, con $|\bar{\Delta}| . < \varepsilon/p$, ed un $\bar{\delta} > 0$, tali che si abbia:

$$\left| \iint_{\mathfrak{R}} f_{r,q}(x, y)\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{m} |\mathfrak{R}_i| .\ f_{p,q}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \right| < \varepsilon/p < \varepsilon$$

per ogni suddivisione $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_m$ di $\mathfrak{R}$, con $\mathfrak{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ avente diametro $< \bar{\delta}$, con $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ qualsivoglia in $\mathfrak{R}_i - \bar{\Delta}$, ponendo, se tale insieme è vuoto, $f_{p,q}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = 0$. Sia δ^* il più piccolo tra δ, $\bar{\delta}$, ed $\mathfrak{R}_1^*, \mathfrak{R}_2^*, \ldots, \mathfrak{R}_s^*$ una suddivisione di $\mathfrak{R}$, con $\mathfrak{R}_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ avente diametro $< \delta^*$. Si ha manifestamente:

$$\left| \iint_{\mathfrak{R}} f_{p,q}(x, y)\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{s} |\mathfrak{R}_i^*| .\ f_{p,q}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| I - \sum_{i=1}^{s} |\mathfrak{R}_i^*| .\ f_{p,q}(x_i', y_i') \right| < \varepsilon,$$

per la prima qualunque sia $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ in $\mathfrak{R}_i^* - \bar{\Delta}$ [se tale insieme è vuoto si ponga $f_{p,q}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = 0$], per la seconda qualunque sia (x_i', y_i') in $\mathfrak{R}_i^* - \Delta$ [se tale insieme è vuoto si ponga $f_{p,q}(x_i', y_i') = 0$]. Scegliamo, quando è possibile, $(x_i', y_i') \equiv (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$: in tal caso la differenza, in valore assoluto,

$$\left| \sum_{i=1}^{s} |\mathfrak{R}_i^*| .\ f_{p,q}(x_i', y_i') - \sum_{i=1}^{s} |\mathfrak{R}_i^*| .\ f_{p,q}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \right|$$

è maggiorata dal numero $\{ |\bar{\Delta}|. + |\Delta|. \} p$, e quindi si ha:

$$\left| I - \iint_{\mathfrak{R}} f_{p,q}(x, y)\, dx\, dy \right| < 2\varepsilon + \{ |\bar{\Delta}|. + |\Delta|. \} p < 2\varepsilon + (\varepsilon/p + \varepsilon/p)p = 4\varepsilon$$

qualunque siano gli interi p, q, con $p > \nu$, $q < \nu$. La $f(x, y)$ è dunque integrabile secondo LEBESGUE ed I è l'integrale di $f(x, y)$ secondo LEBESGUE.

§ 4. – Una riga intermedia degli spettri A, B.

1. – Definizione 1.

Sia $f(x, y)$ definita e limitata in $\mathfrak{R}$: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Posto

$$I_1 = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy, \qquad I_2 = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx,$$

ove in I_1 [I_2] l'integrazione rispetto ad y [x] è nel senso (R), mentre l'integrazione rispetto ad x [y] è nel senso (L), $f(x, y)$ la diremo integrabile in $\mathfrak{R}$ se esistono I_1 ed I_2, e risulta $I_1 = I_2$.

2. – Definizione 1′.

Diremo I l'integrale di $f(x, y)$ (definita e limitata in $\mathfrak{R}$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due plurintervalli aperti $\Delta^{(x)}$, $\Delta^{(y)}$, l'uno di (a, b), l'altro di (c, d), con $|\Delta^{(x)}|. < \varepsilon$, $|\Delta^{(y)}|. < \varepsilon$, ed un $\delta > 0$ tali che risulti:

$$(1) \qquad \left| I - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \cdot f(x'_i, y'_i) \right| < \varepsilon,$$

essendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$ suddivisioni arbitrarie rispettivamente di (a, b) e (c, d), con $x_{i+1} - x_i < \delta$, $y_{j+1} - y_j < \delta$, e (x'_i, y'_i) qualsivoglia nel rettangolo $(x_i, x_{i+1})(y_j, y_{j+1})$, con $x'_i \notin \Delta^{(x)}$, $y'_i \notin \Delta^{(y)}$, e se non esistono di tali punti porremo $f(x'_i, y'_i) = 0$.

3. – Equivalenza tra le due definizioni 1 e 1′ nella classe delle funzioni $f(x, y)$ continue separatamente rispetto alle variabili in $\mathfrak{R}$.

E. BAIADA ([22]) ha stabilito che una funzione $f(x, y)$ continua separatamente rispetto alle variabili in $\mathfrak{R}$, è in $\mathfrak{R}$ quasi continua rispetto ad x e y in modo regolare, cioè vale la seguente proposizione:

Fissato un $\varepsilon > 0$ è possibile determinare due plurintervalli aperti $\Delta^{(x)}$, $\Delta^{(y)}$, con $|\Delta^{(x)}|. < \varepsilon$, $|\Delta^{(y)}|. < \varepsilon$, tali che abbia luogo la seguente proprietà: in corrispondenza a $\sigma > 0$ arbitrario esiste un $\gamma > 0$ tale che, se (x_0, y_0) è un punto di $\mathfrak{R}$ con x_0 non appartenente a $\Delta^{(x)}$ od y_0 non appartenente a $\Delta^{(y)}$, per ogni punto (x, y) con x non appartenente a $\Delta^{(x)}$ od y non appartenente a $\Delta^{(y)}$, verificanti le disuguaglianze $|x - x_0| < \gamma$, $|y - y_0| < \gamma$, risulti:

$$(2) \qquad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \sigma.$$

([22]) E. BAIADA: *Sulle funzioni continue separatamente rispetto alle variabili e gli integrali curvilinei*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **17** (1948), 201-218. Cfr. anche:

G. SCORZA-DRAGONI: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **17** (1948), 102-106.

C. VINTI: *Una ripartizione del continuo ed una osservazione sulle funzioni continue rispetto ad una e non misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **27** (1957), 253-266.

Per mostrare tale equivalenza, poichè dalla definizione 1' si deduce facilmente che se I esiste è unico, basta far vedere che nella classe in cui ci siamo messi esistono I_1 ed I_2 ed entrambi soddisfano la (1).

Posto $I_1(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$, se x_1, x_2 sono due punti di $(a, b) - \Delta^{(x)}$, con $|x_1 - x_2| < \gamma$, in virtù della (2) si ha:

$$| I_1(x_1) - I_1(x_2) | \leqslant \int_c^d | f(x_1, y) - f(x_2, y) |\, dy < \sigma \cdot (d - c),$$

e questa ci dice che $I_1(x)$ è quasi continua in (a, b). Essendo poi $f(x, y)$ limitata, anche $I_1(x)$ è limitata, e quindi esiste I_1. Analogamente si mostra che esiste I_2.

Osserviamo ora che $I_1(x)$ gode della seguente proprietà: in corrispondenza ad ε esiste un $\delta^*(\varepsilon, x) > 0$ tale che risulti:

$$(3) \qquad | I_1(x) - \sum_{j=1}^{m(x)} (y_{j+1} - y_j) \cdot f(x, y'_j) | < \varepsilon,$$

essendo, per ogni x di (a, b), $y_1, y_2, \ldots, y_{m(x)}$ una qualsivoglia suddivisione di (c, d), con $y_{j+1} - y_j < \delta^*$, ed y'_j qualsivoglia in (y_j, y_{j+1}).

Denotiamo con $\delta(\varepsilon, x)$ il confine superiore di tutti i numeri $\delta^*(\varepsilon, x)$ per i quali, fissati ε ed x, è soddisfatta la (3), e mostriamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, $\delta(\varepsilon, x)$ ha, per x variabile nell'insieme chiuso $(a, b) - \Delta^{(x)}$, confine inferiore $\delta'(\varepsilon)$ positivo. Sia infatti x_0 un punto di WEIERSTRASS relativo a $\delta'(\varepsilon)$. Essendo $(a, b) - \Delta^{(x)}$ chiuso, x_0 apparterrà ad $(a, b) - \Delta^{(x)}$. Se x_0 è un punto isolato di $(a, b) - \Delta^{(x)}$, risulta $\delta'(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, e la proposizione è dimostrata. Supponiamo allora x_0 di accumulazione per $(a, b) - \Delta^{(x)}$. Per la $I_1(x)$ si ha che in corrispondenza ad $\varepsilon/3$ esiste un $\gamma' > 0$ tale da aversi:

$$| I_1(x) - I_1(x_0) | < \varepsilon/3,$$

per ogni x di $(a, b) - \Delta^{(x)}$, con $|x - x_0| < \gamma'$; e poichè per la proprietà espressa dalla (3) è

$$| I_1(x_0) - \sum_{j=1}^{m(x_0)} (y_{j+1} - y_j) \cdot f(x_0, y'_j) | < \varepsilon/3$$

per ogni $y_{j+1} - y_j < \delta(\varepsilon/3, x_0)$, con y'_j qualsivoglia in (y_j, y_{j+1}), si deduce:

$$(4) \qquad | I_1(x) - \sum_{j=1}^{m(x_0)} (y_{j+1} - y_j) \cdot f(x_0, y'_j) | < 2\varepsilon/3$$

per x in $(a, b) - \Delta^{(x)}$, con $|x - x_0| < \gamma'$ e per $y_{j+1} - y_j < \delta(\varepsilon/3, x_0)$.

Supposto, come è lecito, $\gamma < \gamma'$, dalla (4), in virtù della (2), segue:

$$(5) \qquad | I_1(x) - \sum_{j=1}^{m(x_0)} (y_{j+1} - y_j) \cdot f(x, y_j') | < \varepsilon,$$

qualunque sia x di $(a, b) - \Delta^{(x)}$, con $| x - x_0 | < \gamma$, per $y_{j+1} - y_j < \delta(\varepsilon/3, x_0)$, ed avendo scelto σ in modo che risulti $\sigma \cdot (d - c) < \varepsilon/3$.

Tenendo presente la definizione della funzione $\delta(\varepsilon, x)$, dalla (5) segue che per x appartenente ad $(a, b) - \Delta^{(x)}$, con $|x - x_0| < \gamma$ è $\delta(\varepsilon, x) \geqslant \delta(\varepsilon/3, x_0) > 0$ e quindi $\delta'(\varepsilon) = \delta(\varepsilon/3, x_0) > 0$.

La proposizione è così dimostrata, ed in modo ovvio si deduce per $I_1(x)$ che in corrispondenza ad ε, ed al plurintervallo $\Delta^{(y)}$, esiste un $\delta''(\varepsilon) > 0$ tale che:

$$(6) \qquad | I_1(x) - \sum_{j=1}^{m} (y_{j+1} - y_j) \cdot f(x, y_j') | < \varepsilon,$$

qualunque sia x in $(a, b) - \Delta^{(x)}$, per $y_{j+1} - y_j < \delta''(\varepsilon)$, con y_j' qualsivoglia in $(y_j, y_{j+1}) - \Delta^{(y)}$ e, se tale insieme è vuoto, si ponga $f(x, y_j') = 0$.

Consideriamo ora un intervallo (x_i, x_{i+1}) di (a, b), con $x_{i+1} - x_i < \gamma$; dalla (6), in virtù della (2), si ha:

$$(7) \qquad | I_1(x_i'') - \sum_{j=1}^{m} (y_{j+1} - y_j) \cdot f(x_i', y_i') | < \varepsilon + \sigma \cdot (d - c),$$

essendo x_i'' qualsivoglia in $(x_i, x_{i+1}) - \Delta^{(x)}$, e (x_i', y_i') qualsivoglia nel rettangolo $(x_i, x_{i+1}) (y_j, y_{j+1})$, con $x_i' \notin \Delta^{(x)}$, $y_j' \notin \Delta^{(y)}$, $y_{j+1} - y_j < \delta''$ e, se l'insieme $(x_i, x_{i+1}) - - \Delta^{(x)}$ è vuoto, si ponga $I_1(x_i'') = 0$, $f(x_i', y_i') = 0$, e, se è vuoto l'insieme $(y_j, y_{j+1}) - \Delta^{(y)}$, si ponga $f(x, y_j') = 0$. Ma $I_1(x)$ è integrabile (L), e quindi in modo abbastanza agevole si deduce che in corrispondenza ad ε esiste un plurintervallo aperto di ampiezza $< \varepsilon$ (potendo supporre che contenga $\Delta^{(x)}$ lo denoteremo $\Delta^{(x)}$) ed un $\delta > 0$ (possiamo supporre δ minore di γ e di δ'') tali che si abbia:

$$(8) \qquad | I_1 - \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) \cdot I_1(x_i'') | < \varepsilon,$$

essendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una arbitraria suddivisione di (a, b), con $x_{i+1} - x_i < \delta$, x_i'' qualsivoglia in $(x_i, x_{i+1}) - \Delta^{(x)}$ e, se tale insieme è vuoto, si ponga $I_1(x_i'') = 0$. Dalle (7) e (8), essendo $\sigma \cdot (d - c) < \varepsilon$, si ha:

$$| I_1 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) \cdot f(x_i', y_j') | < 3\varepsilon,$$

essendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$ suddivisioni arbitrarie rispettivamente di (a, b) e (c, d), con $x_{i+1} - x_i < \delta$, $y_{j+1} - y_j < \delta$, con (x_i', y_j') qualsivoglia nel rettangolo $(x_i, x_{i+1})(y_j, y_{j+1})$ con $x_i' \notin \Delta^{(x)}$, $y_j' \notin \Delta^{(y)}$ e, se non esistono di tali punti, si ponga $f(x_i', y_j') = 0$. Quest'ultima disuguaglianza ci dice che I_1 soddisfa la (1). Analogamente si mostra che I_2 soddisfa la (1), e quindi la equivalenza è provata.

4. – Le due definizioni d'integrabilità costituiscono manifestamente una riga intermedia sia dello spettro A che dello spettro B se ci poniamo nella classe, abbastanza ampia, delle funzioni $f(x, y)$ continue separatamente rispetto alle variabili e non integrabili secondo le due definizioni d'integrabilità (R).

* * *