Riv. Mat. Univ. Parma **10** (1959), 3-17

MARCO CUGIANI (*)

Sulla densità delle differenze fra numeri primi consecutivi.

§ I. - Introduzione - Risultati.

Indichiamo, come d'uso, con $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ la successione crescente dei numeri primi e fissiamo l'attenzione sulla differenza

$$\delta_n = p_{n+1} - p_n \tag{1}$$

fra due numeri primi consecutivi.

Lo studio del comportamento della successione δ_n ha dato luogo a notevoli ricerche negli ultimi anni (1); noi qui intendiamo trattare in particolare la questione della densità dei valori assunti da δ_n, questione che vogliamo adesso precisare nei termini seguenti.

Premettiamo che, poichè, ad eccezione del valore 1 che si presenta solo come differenza dei numeri primi 3 e 2, ogni altro valore di δ_n è certamente pari, nel seguito noi ci riferiremo a valori a soluzioni della equazione:

$$2a = p_{n+1} - p_n\,. \tag{2}$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico F. ENRIQUES, Università, Via C. Saldini 50, Milano, Italia.

(1) Per notizie su questo argomento rimandiamo, ad esempio, a « G. RICCI, *Sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi*, Riv. Mat. Univ. Parma **5** (1954), 3-54 », dove si troveranno anche notizie bibliografiche.

Ci potremo allora chiedere se la successione dei numeri a, soluzioni della (2), abbia densità inferiore positiva sull'insieme dei numeri naturali, cioè se, detto $\nu(r)$ il numero degli $a < r$ per cui è solubile la (2), risulti:

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{\nu(r)}{r} > 0$$

[o se, al contrario, si abbia $\varliminf_{r \to +\infty} \nu(r)/r = 0$].

Poichè, come è stato dimostrato ([2]) da K. PRACHAR e da W. KNÖDEL, e come del resto ritroveremo per altra via anche nel presente lavoro, alla precedente questione si dà risposta affermativa, il primo nostro scopo sarà di metterci alla ricerca di un valore per difetto, il più espressivo possibile, per $\varliminf_{r \to \infty} \nu(r)/r$.

Inoltre è nostro scopo di fornire una limitazione inferiore anche per la densità di speciali successioni di numeri a per i quali la (2) risulti soddisfatta in corrispondenza di valori p_n che soddisfano contemporaneamente ad una limitazione del tipo $p_n < f(a)$, per una opportuna funzione $f(a)$. È chiaro che per una sottosuccessione di numeri a così condizionati risulta definito un criterio operativo per la effettiva costruzione della sottosuccessione, in quanto è possibile, per ogni numero naturale, lo stabilire con un numero finito di tentativi se appartenga o meno alla sottosuccessione stessa. Una limitazione di questo tipo si incontrerà nel Teorema B, nel quale si fa entrare in gioco inoltre una valutazione dal di sotto per i valori di p_n in funzione di a.

Passiamo ora a formulare le proposizioni che verranno dimostrate al § **IV**, nelle quali si concretano le risposte alle prospettate questioni. Indicheremo con

$$J(\xi;\ \mu,\ \lambda), \quad \text{o semplicemente } J,$$

l'insieme degli interi a per cui risulta

$$\mu \log\xi < 2a \leqslant \lambda \log\xi,$$

e con $I(\delta,\ \xi)$, o semplicemente con I, l'insieme dei numeri p_n per cui si ha $(1-\delta)\xi < p_n \leqslant \xi$.

Indicheremo poi con J^* un qualunque sottoinsieme di J e con a^* gli elementi di J^*.

([2]) Si veda, per esempio, « K. PRACHAR, *Über Primzahldifferenzen*, Monatsh. Math. **56** (1952), 304-306 »; può essere utile confrontare anche « K. PRACHAR, **Primzahlverteilung**, Grund. Math. Wiss. **91**, J. Springer, Berlin 1957», cfr., in particolare, il Satz 4.1, pag. 154.

Sarà, poi,

$$D_\delta(\xi;\ \mu,\ \lambda), \qquad \text{ovvero} \qquad D_\delta^*(\xi;\ \mu,\ \lambda),$$

rispettivamente il numero delle differenze δ_n per cui risulta

$$\delta_n = 2a, \quad a \in J; \qquad \delta_n = 2a^*, \quad a^* \in J^*,$$

essendo in ogni caso $p_n \in I$.

Cominciamo adesso coll'esporre un Lemma, che costituisce in sostanza la proposizione fondamentale della presente ricerca:

Lemma 1°. *Per μ, λ e δ fissi pensiamo J^* variabile con ξ, ed il numero degli a^*, che indicheremo con ν^*, sia dato da*

$$\nu^* = \varepsilon(\lambda - \mu)\log\xi, \qquad \varepsilon = \varepsilon(\xi,\ J^*).$$

Vale allora la limitazione

$$D_\delta^*(\xi;\ \mu,\ \lambda) < \gamma\xi/\log\xi,$$

dove γ può essere preso piccolo quanto si vuole, purchè ε si mantenga abbastanza piccolo e quando ξ sia abbastanza grande.

Questo Lemma, anzi più precisamente il Lemma 3°, che verrà dimostrato nel § IV e che fornisce una versione più elaborata dello stesso concetto, nel senso che vi è meglio precisata la relazione che intercorre fra γ ed ε, ci permetterà di dedurre immediatamente i successivi Teoremi A e B che forniscono dirette risposte alle questioni che ci siamo proposte.

Teorema A. *Vale la relazione*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\nu(r)}{r} > 0{,}00558 .$$

In altre parole: *quando r è abbastanza grande, il numero degli $a < r$ per cui è solubile l'equazione*

$$p_{n+1} - p_n = 2a \tag{2}$$

è superiore al 5,58‰ del numero r.

Teorema B. *Fissato comunque $\delta > 0$, la successione dei numeri a in corrispondenza dei quali la* (2) *risulta soddisfatta da numeri primi p_n per cui risulti*

$$(1-\delta)e^{a} < p_n < e^{64a}$$

ha una densità inferiore non minore del $2{,}57‰$.

§ II. - Una osservazione.

Prima di procedere alla dimostrazione dei teoremi annunciati riteniamo opportuno far vedere come, sulla base dei risultati esposti nel citato lavoro del Ricci (3) e utilizzando il Lemma 1° del § precedente, si possa giungere in modo quasi immediato a dare già delle interessanti risposte alle questioni poste. Ci si dovrà accontentare di fornire delle informazioni di carattere qualitativo, senza preoccuparsi di precisare convenienti valori approssimati per le densità delle successioni, informazioni del tipo appunto di quelle contenute ad esempio nei citati lavori del Prachar (4).

Abbiamo, per noti risultati (5),

$$D_\delta(\xi;\ \mu,\ \lambda) < C(\lambda-\mu)\delta\xi/\log\xi,$$

dove si può assumere $C = 8 + \varepsilon_1$ per $\varepsilon_1 > 0$, quando ξ è abbastanza grande (6).

In particolare:

$$D_\delta(\xi;\ 0,\ \mu) < (8+\varepsilon_1)\mu\delta\xi/\log\xi\,. \tag{3}$$

D'altra parte abbiamo (sempre per ξ abbastanza grande):

$$D_\delta(\xi;\ 0,\ \lambda) > \varrho\delta\xi/\log\xi \qquad (\varrho < 1), \tag{4}$$

dove ϱ si può assumere prossimo ad 1 quanto si vuole purchè si scelga λ abbastanza grande (7).

---

(3) Cfr. loc. cit. in (1).

(4) Cfr. loc. cit. in (2).

(5) Cfr. loc. cit. in (1), Teorema I, pag. 10.

(6) La definizione di $D_\delta(\xi;\ \mu,\ \lambda)$ data in (1), pag 5, si riferisce a differenze δ_n per cui risulti $\mu \log p_n < \delta_n \leqslant \lambda \log p_n$ anzichè $\mu \log \xi < \delta_n \leqslant \lambda \log \xi$ come è nella nostra definizione. Ai nostri fini questa diversa definizione non nuoce in nessun caso poichè le due funzioni differiscono di $o(\xi/\log \xi)$ Si veda op. cit. in (1), Lemma 4, pag. 44.

(7) Si veda loc. cit. in (1), Teorema XII, pag. 20.

Da (3) e (4) si deduce, per λ e ξ abbastanza grandi,

$$D_\delta(\xi;\ \mu,\ \lambda) = D_\delta(\xi;\ 0,\ \lambda) - D_\delta(\xi;\ 0,\ \mu) > (1 - 8\mu - \varepsilon_2)\delta\xi/\log\xi$$

e quindi, per $\mu < 1/8$ e λ grande,

$$D_\delta(\xi;\ \mu,\ \lambda) > c_{\mu,\lambda}\delta\xi/\log\xi \qquad (c_{\mu,\lambda} > 0) \tag{5}$$

per ξ abbastanza grande.

Ora per il Lemma 1° abbiamo subito che, se il numero degli a per cui è solubile la (2) e per cui risulta $\mu \log\xi < 2a \leqslant \lambda \log\xi$ fosse di densità nulla sull'insieme dei numeri interi, assumendo come numeri a^* proprio tali numeri a risulterebbe:

$$\varepsilon \to 0 \qquad \text{e quindi} \qquad \gamma \to 0 \qquad \text{per} \qquad \xi \to \infty,$$

ed in tal caso sarebbe

$$D_\delta(\xi;\ \mu,\ \lambda) = D_\delta^*(\xi;\ \mu,\ \lambda),$$

mentre risulterebbe, per ξ abbastanza grande, $\gamma < c_{\mu,\lambda}$, evidentemente assurdo a causa della (5).

Questo riconferma il fatto fondamentale che la successione degli a per cui la (2) risulta solubile ha densità positiva, e in più mostra che densità positiva ha già la sottosuccessione formata da quei valori a per cui la relativa soluzione è ottenuta in corrispondenza a numeri p_n per cui sia

$$\mu \log p_n \leqslant \mu \log\xi < 2a \quad \text{e quindi} \quad p_n < \exp(2a/\mu) = e^{2a(8+\varepsilon_3)},$$

condizione che, come abbiamo visto, è sufficiente per fornire una legge operativa nella costruzione della sottosuccessione in questione.

§ III. - Un lemma preliminare.

Questo § è dedicato alla dimostrazione di un lemma, che risulterà di fondamentale importanza per il seguito della trattazione.

La dimostrazione prende lo spunto da un procedimento desunto da un lavoro del RICCI (8), che viene poi sviluppato in modo da far entrare in gioco gli elementi che interessano più in particolare la nostra questione.

---

(8) Si veda « G. RICCI, *Sul coefficiente di Viggo Brun*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (5) **7** (1953), 133-151 ». Qui si allude al procedimento tenuto nella dimostrazione del Lemma 1 al § 4, pp. 141 e seguenti.

Qui indichiamo con $J(\tau,\ \eta)$ l'insieme dei numeri a soddisfacenti alla condizione

$$\tau < 2a \leqslant \eta \qquad (0 \leqslant \tau < \eta)$$

e con $J^*(\tau,\ \eta)$ un sottoinsieme di $J(\tau,\ \eta)$ formato da certi numeri a^*, il cui numero indicheremo con

$$\varepsilon(\eta - \tau) \qquad \left(\text{sarà ovviamente } \varepsilon(\eta - \tau) \leqslant [(\eta - \tau)/2]\right),$$

e sui quali non faremo per altro ipotesi alcuna.

Poniamo poi:

$$\Phi(a) = \prod_{3 \leq p \mid a} (p-1)/(p-2)$$

ed inoltre

$$\Psi^*(\tau,\ \eta) = \sum_{J^*} \Phi(a^*).$$

Infine, indicato al solito con p_h l'h-esimo numero primo, poniamo:

$$P_h = p_1 \cdot p \cdot \ldots \cdot p_h = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p_h .$$

Possiamo adesso enunciare il

Lemma 2°. *Per ogni $p_h > 3$, $\eta > \tau$, $\eta > p_h$, vale la limitazione:*

$$\Psi^*(\tau,\ \eta) < \frac{C_h}{2H} \left\{ \left(\varepsilon \prod_{p \leq p_h} \frac{p}{p-1} + \frac{1}{p_h} \right) (\eta - \tau) + P_h \log \frac{\eta}{p_h} \right\},$$

dove:

$$C_h = \prod_{p > p_h} \left(1 + \frac{2}{(p+1)(p-2)} \right), \qquad H = \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)$$

e risulta quindi

$$C_h < \{ p_{h+1}/(p_{h+1} - 3) \}^{1/3}, \qquad H = 0{,}6601 \ldots$$

(*H è la cosiddetta costante di Shah e Wilson*).

La dimostrazione sarà divisa in vari punti.

(a) Denotiamo con v un generico intero tale che $0 < v \leqslant P_h/2$. Se risulta

$$2a \equiv 2v \pmod{P_h}, \tag{6}$$

posto $2v_0 = (2a,\ P_h)$ sarà anche $2v_0 = (2v,\ P_h)$.

(b) Risulta, per un generico intero a,

$$\Phi(a) = \prod_{3 \leq p \mid a} (p-1)/(p-2) = \prod_{p \mid v_0} (p-1)/(p-2) \cdot \prod_{p_h < p \mid a} (p-1)/(p-2) =$$

$$= \prod_{p \mid v_0} \frac{p-1}{p-2} \cdot \prod_{p_h < p \mid a} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{p_h < p \mid a} \left(1 + \frac{2}{(p+1)(p-2)}\right)$$

e indicheremo questi ultimi tre prodotti rispettivamente con

$$\Phi_h(a), \qquad f_h(a), \qquad \lambda_h(a).$$

(c) Per la funzione $\lambda_h(a)$ possiamo subito scrivere:

$$1 \leqslant \lambda_h(a) < C_h = \prod_{p > p_h} \left(1 + \frac{2}{(p+1)(p-2)}\right) < \exp \sum_{p > p_h} \frac{2}{(p+1)(p-2)}.$$

Ora, essendo $p_n - p_{n-1} \geqslant 2$ per $n > 2$ ed essendo la funzione

$$2/\{(x+1)(x-2)\}$$

decrescente insieme al modulo della derivata prima per $x > 2$, potremo scrivere:

$$\sum_{p > p_h} \frac{2}{(p+1)(p-2)} < \frac{1}{2} \int_{p_{h+1}-1}^{\infty} \frac{2\, dx}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3} \log \frac{p_{h+1}}{p_{h+1} - 3}$$

e quindi

$$\lambda_h(a) < C_h < \{p_{h+1}/(p_{h+1} - 3)\}^{1/3}.$$

(d) Per la funzione $\Phi_h(a)$ abbiamo [ricordando il punto (a)]:

$$\Phi_h(a) = \Phi(v_0) = \prod_{p \mid v_0} \frac{p-1}{p-2} = \varphi(v_0) \cdot \prod_{p \mid v_0} \frac{1}{p-2} = \varphi(2v_0) \cdot \prod_{p \mid v_0} \frac{1}{p-2}$$

(φ è l'indicatore di EULER). Ad ogni v_0 possono associarsi diversi v, per ciascuno dei quali avremo:

$$v = v_0 \cdot w, \qquad \text{essendo} \quad 1 \leqslant w \leqslant P_h/(2v_0), \qquad (w,\ P_h/(2v_0)) = 1 .$$

Il numero dei v che si possono associare a ciascun v_0 è dunque dato da

$$\varphi(P_h/(2v_0)) .$$

(e) Calcoliamo ora la somma, estesa a tutti i v,

$$\sum_v \Phi_h(v) = \sum_v \Phi_h(v_0) = \sum_{v_0} \varphi(P_h/(2v_0)) \cdot \Phi(v_0) = \sum_{v_0} \varphi(P_h/(2v_0)) \varphi(2v_0) \cdot \prod_{p \mid v_0} \frac{1}{p-2} =$$

$$= \sum_{v_0} \varphi(P_h) \cdot \prod_{p \mid v_0} \frac{1}{p-2} = \varphi(P_h) \cdot \prod_{3 \leq p \leq p_h} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right).$$

Essendo, per $p > 2$,

$$(p-1)\{1 + 1/(p-2)\} = p\{1 - 1/(p-1)^2\}^{-1},$$

potremo scrivere:

$$\sum_v \Phi_h(v) = \frac{1}{2} P_h \cdot \prod_{3 \leq p \leq p_h} \{1 - 1/(p-1)^2\}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2} P_h \cdot \prod_{p > p_h} \{1 - 1/(p-1)^2\} \cdot \prod_{p \geq 3} \{1 - 1/(p-1)^2\}^{-1} =$$

$$= P_h/(2H) \cdot \prod_{p > p_h} \{1 - 1/(p-1)^2\}.$$

(f) Denotiamo con a_v^* l'intero generico appartenente a J^* e tale che

$$2a_v^* \equiv 2v \pmod{P_h},$$

e sia N_v^* il numero degli a_v^*; risulterà

$$0 \leqslant N_v^* < (\eta - \tau)/P_h + 1 .$$

Denoteremo con J_v^* l'insieme degli a_v^*.

(g) Passiamo adesso alla funzione $\lambda_h(a)$. Abbiamo in primo luogo:

$$f_h(a) = 1 + \sum_{Q_a} 1/q_h ,$$

dove Q_a è l'insieme dei numeri q_h, divisori di a, primi con P_h e liberi da quadrati.

Consideriamo poi la somma

$$F_{h,v}^* = \sum_{J_v^*} f_h(a_v^*) = \sum_{J_v^*} \Big\{ 1 + \sum_{Q_{a_v^*}} 1/q_h \Big\} .$$

Se per un fisso v indichiamo con a_v il generico $a \in J$ che soddisfa alla (6), potremo scrivere:

$$F_{h,v}^* \leqslant N_v^* + \sum_{a_v} \sum_{Q_{a_v}} 1/q_h ,$$

e per la somma doppia vale la limitazione (⁹):

$$\sum \sum 1/q_h < (1/p_h)\big((\eta - \tau)/P_h\big) + \log (\eta/p_h) ,$$

onde avremo

$$F_{h,v}^* \leqslant N_v^* + (1/p_h)\big((\eta - \tau)/P_h\big) + \log (\eta/p_h) .$$

(h) Abbiamo adesso:

$$\Psi^*(\tau, \eta) = \sum_{J^*} \Phi_h(a^*) \cdot f_h(a^*) \cdot \lambda_h(a^*) = \sum_v \sum_{J_v^*} \Phi_h(a_v^*) \cdot f_h(a_v^*) \cdot \lambda_h(a_v^*) =$$

$$= \sum_v \Phi_h(v) \cdot \sum_{J_v^*} f_h(a_v^*) \cdot \lambda_h(a_v^*) .$$

Per (c), (g) ed (e) avremo poi:

$$\Psi^*(\tau, \eta) < \sum_v \left\{ \Phi_h(v) \cdot C_h \cdot \left(N_v^* + \frac{1}{p_h} \frac{\eta - \tau}{P_h} + \log \frac{\eta}{p_h} \right) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_v \Phi_h(v) N_v^* + \frac{P_h}{2H} \left(\frac{1}{p_h} \frac{\eta - \tau}{P_h} + \log \frac{\eta}{p_h} \right) \right\} C_h .$$

(⁹) Si veda: G. RICCI, loc. cit. in (⁸), n. 4, pag. 144.

(i) Maggiorando in primo luogo la somma, otteniamo:

$$\sum_v \Phi_h(v)N_v^* < \Phi_h(P_h/2)\cdot\sum_v N_v^* = \Phi_h(P_h/2)\cdot\varepsilon(\eta-\tau),$$

poichè ovviamente

$$\Phi_h(v) \leqslant \Phi_h(P_h/2).$$

(l) Abbiamo ancora:

$$\Phi_h(P_h/2) = \prod_{3\leq p\leq p_h}\left\{(p/(p-1))((p-1)/p)((p-1)/(p-2))\right\} =$$

$$= \prod_{3\leq p\leq p_h}\frac{p}{p-1}\cdot\prod_{3\leq p\leq p_h}\left\{1\Big/\left(1-\frac{1}{(p-2)^2}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\prod_{p\leq p_h}\frac{p}{p-1}\right\}\Big/\left\{2\prod_{p\geq 3}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\right\} = \left\{\prod_{p\leq p_h}\frac{p}{p-1}\right\}/(2H).$$

(m) In definitiva otteniamo, per (h), (i) ed (l),

$$\Psi^*(\tau,\eta) \leqslant C_h\cdot\left\{\frac{\varepsilon(\eta-\tau)}{2H}\prod_{p\leq p_h}\frac{p}{p-1}+\frac{1}{2H}\left(\frac{\eta-\tau}{p_h}+P_h\log\frac{\eta}{p_h}\right)\right\}$$

e il Lemma 2° è così dimostrato.

§ IV. – Dimostrazione dei teoremi.

Alla dimostrazione dei teoremi premetteremo due lemmi. D'ora in poi assumeremo, definitivamente,

$$\tau = \mu\log\xi, \qquad \eta = \lambda\log\xi.$$

Lemma 3°. *Per ogni $p_h > 3$ vale la limitazione:*

$$D_\delta^*(\xi;\ \mu,\ \lambda) < (8+\varepsilon_1)\left\{\varepsilon\prod_{p\leq p_h}\frac{p}{p-1}+\frac{1}{p_h}\right\}\frac{C_h(\lambda-\mu)\delta\xi}{\log\xi}$$

per ogni $\varepsilon_1 > 0$ e ξ abbastanza grande.

La dimostrazione si può ottenere osservando che si ha, per ogni $\varepsilon_2 > 0$ e ξ abbastanza grande,

$$D_\delta^*(\xi;\ \mu,\ \lambda) < (B + \varepsilon_2) \sum_{J^*} \Phi(a^*) \frac{\delta\xi}{\log^2 \xi},$$

dove B è la costante di Viggo Brun, per la quale si ha:

$$B \leqslant 16H$$

secondo i noti risultati [10].

Possiamo dunque scrivere:

$$D_\delta^*(\xi;\ \mu,\ \lambda) < (B + \varepsilon_2)\Psi^*(\tau,\ \eta) \frac{\delta\xi}{\log^2 \xi}$$

e per il Lemma 2° avremo, per un p_h fisso > 3 e per ogni $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2/H$,

$$D_\delta^*(\xi;\ \mu,\ \lambda) < \frac{B + 2\varepsilon_2}{2H}\left(\varepsilon \prod_{p \leq p_h} \frac{p}{p-1} + \frac{1}{p_h}\right) \frac{C_h(\lambda - \mu)\delta\xi}{\log \xi} \leqslant$$

$$\leqslant (8 + \varepsilon_1)\left(\varepsilon \prod_{p \leq p_h} \frac{p}{p-1} + \frac{1}{p_h}\right) \frac{C_h(\lambda - \mu)\delta\xi}{\log \xi},$$

e così è dimostrato il Lemma 3°.

È chiaro poi come il Lemma 1° non sia altro che un immediato corollario di questo Lemma 3°, tenuto conto che p_h può essere scelto grande a piacere, e che una volta fissato p_h si può scegliere sempre ε in guisa che il prodotto

$$\varepsilon \prod_{p \leq p_h} p/(p-1)$$

risulti piccolo a piacere.

Passiamo adesso al

Lemma 4°. *Sia $0 \leqslant \mu < \lambda$, $2 \leqslant \lambda$; vale allora una limitazione del tipo:*

$$D_\delta(\xi;\ \mu,\ \lambda) > \varrho\delta\xi/\log\xi, \tag{7}$$

---

[10] Su tutto questo si veda, ad esempio, loc. cit. in [8], n. 2.

con $\varrho = 1 - (8 + \varepsilon_2)\mu - (63 + \varepsilon_3)/(64\lambda)$ (qui ε_2 ed ε_3 sono delle costanti positive arbitrarie) *quando* ξ *sia abbastanza grande*.

La dimostrazione di questo Lemma discende facilmente dai Teoremi VIII e XI esposti nel già citato lavoro del Ricci [11], e si può condurre in modo analogo a quello del Teorema XII dello stesso lavoro [12].

Se si potessero trovare valori ξ comunque grandi per cui non valesse la (7), esisterebbe una successione $\{\xi_s\}$ lungo la quale si avrebbe:

$$D_\delta(\xi_s;\ \mu,\ \lambda) \sim A\delta\xi_s/\log\xi_s$$

con $A \leqslant \varrho$, e se ne potrebbe estrarre una sottosuccessione $\{\xi_{s_t}\}$ lungo la quale risulterebbe:

$$D_\delta(\xi_{s_t};\ 0,\ \mu) \sim A_1\delta\xi_{s_t}/\log\xi_{s_t}, \qquad D_\delta(\xi_{s_t};\ \lambda,\ +\infty) \sim A_2\delta\xi_{s_t}/\log\xi_{s_t}$$

per opportuni A_1 e A_2.

Ora dovremmo avere

$$D_\delta(\xi_{s_t};\ \mu,\ \lambda) \sim (\delta\xi_{s_t}/\log\xi_{s_t}) - D_\delta(\xi_{s_t};\ 0,\ \mu) - D_\delta(\xi_{s_t};\ \lambda,\ +\infty) \sim$$

$$\sim (1 - A_1 - A_2)(\delta\xi_{s_t}/\log\xi_{s_t}).$$

Ma per le formule (2.3.10) e (2.5.3) del citato lavoro [13] risulterebbe:

$$A_2 < 63/(64\lambda) \quad \text{essendo} \quad \lambda \geqslant 2; \qquad A_1 \leqslant 8\mu; \qquad A > 1 - 8\mu - 63/(64\lambda) > \varrho,$$

in evidente contrasto colla ipotesi $A \leqslant \varrho$.

Passiamo adesso ai nostri teoremi.

Consideriamo il solito insieme $J(\xi;\ \mu,\ \lambda)$ costituito dagli interi a tali che

$$\mu\ \log\xi < 2a \leqslant \lambda\ \log\xi, \qquad \text{con} \qquad 0 \leqslant \mu < \lambda, \quad 2 \leqslant \lambda,$$

e siano al solito indicati con a^* gli elementi di un generico sottoinsieme J^* di J e designamo con ν^* il numero di tali elementi, ponendo ancora $\nu^* = \varepsilon(\lambda - \mu)\log\xi$.

---

(11) Cfr. loc. cit. in (1).

(12) Si veda loc. cit. in (1), Teorema VIII (pag. 14), Teorema XI (pag. 16) e la dimostrazione del Teorema XII (pag. 19).

(13) Cfr. loc cit. in (1).

Gli a^* non potranno esaurire tutti i possibili valori δ_n [corrispondenti a valori p_n per cui risulti $(1-\delta)\xi < p_n \leqslant \xi$] se risulterà

$$\varepsilon < \left\{ \frac{\varrho}{(8+\varepsilon_1)(\lambda-\mu)C_h} - \frac{1}{p_h} \right\} \cdot \prod_{p \leq p_h} \frac{p-1}{p}. \tag{8}$$

Infatti, se al contrario ogni δ_n fosse uguale ad un a^* si avrebbe, tenendo conto dei Lemmi 3° e 4°, quando ξ fosse abbastanza grande,

$$D_\delta^*(\xi;\ \mu,\ \lambda) < (8+\varepsilon_1)C_h\left(\varepsilon \prod_{p\leq p_h} \frac{p}{p-1} + \frac{1}{p_h}\right)(\lambda-\mu)\delta\xi/\log\xi,$$

$$D_\delta(\xi;\ \mu,\ \lambda) > \varrho\delta\xi/\log\xi,$$

e ne seguirebbe, poichè nelle nostre ipotesi dovrebbe essere $D_\delta^* = D_\delta$,

$$(8+\varepsilon_1)C_h\left(\varepsilon \prod_{p\leq p_h} \frac{p}{p-1} + \frac{1}{p_h}\right)(\lambda-\mu) > \varrho,$$

ossia

$$\varepsilon > \left\{ \frac{\varrho}{(8+\varepsilon_1)(\lambda-\mu)C_h} - \frac{1}{p_n} \right\} \prod_{p\leq p_h} \frac{p-1}{p}$$

in contrasto colla (8).

Ogni numero ε soddisfacente alla (8) ci fornisce dunque un confine inferiore per la densità della successione $\{\delta_n\}$ sull'insieme dei numeri naturali. Detto $\bar{\varepsilon}$ un valore di ε che soddisfa alla (8) e tenuto conto che la densità viene valutata sull'insieme dei numeri pari, potremo scrivere:

$$\varliminf_{r\to\infty} \nu(r)/r \geqslant 2\,\bar{\varepsilon}. \tag{9}$$

Ora, ponendo ad esempio $p_h = 223$, $\mu = 0$, $\lambda = 2$, possiamo assumere $\bar{\varepsilon}$ in modo che risulti

$$2\,\bar{\varepsilon} \leqslant \left\{ \frac{\bar{\varrho}}{8\cdot 2}\left(\frac{224}{227}\right)^{1/3} - \frac{1}{223} \right\} \prod_{3\leq p\leq 223} \frac{p-1}{p},$$

con $\bar{\varrho} = 1 - 63/128 = 65/128$. Qui abbiamo potuto assorbire le costanti ε_1, ε_2, ε_3 nella quantità certo positiva di cui il valore dell'espressione

$$\{\, p_{h+1}/(p_{h+1} - 3)\,\}^{1/3}$$

supera quello di C_h [si ricordi il punto (c) del § III].

Con facili calcoli si trova

$$\frac{65}{16\cdot 128}\left(\frac{224}{227}\right)^{1/3} > 0{,}031597\,; \qquad \frac{1}{223} < 0{,}004485\,;$$

in quanto al prodotto $\prod\limits_{3\le p\le 223}(p-1)/p$ ricaviamo (14) da una tavola il valore 0,205877 e otteniamo quindi facilmente che nella (9) si può assumere

$$2\,\bar{\varepsilon} = 5{,}58‰,$$

d'onde segue il Teorema A.

Ponendo invece $p_h = 431$, $\mu = 1/32$, $\lambda = 2$, possiamo assumere

$$2\,\bar{\varepsilon} \leqslant \left\{ \frac{32\cdot\bar{\varrho}}{8\cdot 63}\left(\frac{430}{433}\right)^{1/3} - \frac{1}{431}\right\}\cdot \prod_{3\le p\le 431}\frac{p-1}{p}\,,$$

dove porremo $\bar{\varrho} = 1 - 1/4 - 63/128 = 33/128$, colla solita avvertenza circa la soppressione di ε_1, ε_2, ε_3.

Troviamo adesso:

$$\frac{33}{32\cdot 63}\left(\frac{430}{433}\right)^{1/3} > 0{,}016331\,; \qquad \frac{1}{431} < 0{,}002321$$

e ricaviamo

$$\prod_{3\le p\le 431}\frac{p-1}{p} = 0{,}183929\,.$$

Troviamo allora facilmente che si può porre

$$2\,\bar{\varepsilon} = 2{,}57‰\,.$$

---

(14) Si veda ad esempio: A. M. LEGENDRE, **Essai sur la théorie des nombres,** Paris 1808 (cfr. tavola IX).

Di qui segue subito il Teorema B, osservando che per i numeri p_n, da associare a ciascun a nella (2), si ha adesso

$$(1/32) \log p_n \leqslant (1/32) \log \xi < 2a \leqslant 2 \log \xi < 2 \log \{ p_n/(1-\delta) \},$$

ossia

$$(1-\delta)e^a < p_n < e^{64\,a}.$$

Nota. Il presente lavoro riproduce, con lievi miglioramenti, il contenuto di un precedente lavoro con lo stesso titolo pubblicato in opuscolo litografato e in pochi esemplari da « Tamburini », Milano 1958.