Riv. Mat. Univ. Parma 9 (1958), 125-138

C. SANGERMANO (*)

Rappresentazione delle calotte del terzo ordine, di dato centro e dato piano tangente. (**)

1. - Oggetto della Nota (***).

Nella presente Nota determino (nn. **2**, **3**) un sistema di coordinate per l'insieme delle calotte regolari σ_r^3 di S_{r+1} con dato centro e dato iperpiano tangente: tali coordinate permettono poi di determinare le varietà i cui punti rappresentano le calotte del detto insieme.

Il metodo seguito per la determinazione delle coordinate è analogo a quello introdotto da E. BOMPIANI [**4**] per gli elementi differenziali ed esteso da C. LONGO [**6**] alle calotte superficiali del secondo ordine; ossia esse si ottengono come coordinate grassmanniane dei sistemi lineari di ipersuperficie per una σ_r^3.

Le varietà che si ottengono risultano razionali *aperte* e tra loro birazionalmente equivalenti. I punti delle *chiusure* si possono interpretare (n. **8**) come rappresentanti classi di calotte *non regolari*, ed è la scelta di queste classi che determina la scelta della varietà rappresentativa.

Dopo alcune considerazioni di carattere generale (n. **4**) ed alcuni richiami (n. **5**), studio, per $r = 2$, le predette varietà, considerando quelle che (n. **6**) si presentano come naturale estensione delle varietà considerate, per $r = 1$, da E. BOMPIANI [**4**]; ne assegno una generazione proiettiva e ne determino i caratteri proiettivi. Le varietà che considero sono tali che una collineazione

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 16-X-1958.

(***) I numeri in neretto tra parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine della Nota.

che muta in sè l'insieme delle calotte si riflette in una trasformazione T della varietà rappresentativa indotta da una collineazione del suo spazio di appartenenza (n. **2**); lo studio (n. **7**) delle varietà subordinate ed invarianti rispetto al gruppo delle trasformazioni T permette la loro caratterizzazione [1].

2. - Calotta σ_r^3 e sue coordinate.

In uno spazio lineare S_{r+1}, riferito ad un sistema di coordinate proiettive non omogenee x^i $(i = 1, 2, \ldots, r+1)$, consideriamo la totalità delle varietà $V_r \equiv f(x^1, \ldots, x^{r+1}) = 0$ passanti per un punto $P_0(\underset{0}{x^i})$ e differenziabili di classe $s \geqslant 3$ in un intorno di P_0.

Posto

$$\underset{0}{f_i} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_0, \qquad \underset{0}{f_{ik}} \equiv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^k}\right)_0, \qquad \text{ecc.},$$

chiamiamo *equivalenti* due varietà $f = 0$ e $\varphi = 0$ se, supposto che le $\underset{0}{f_i}$ non siano tutte nulle, oltre ad $f(\underset{0}{x^i}) = \varphi(\underset{0}{x^i}) = 0$, si ha $\underset{0}{f_i} = \underset{0}{\varphi_i}$, $\underset{0}{f_{ik}} = \underset{0}{\varphi_{ik}}$, $\underset{0}{f_{ikj}} = \underset{0}{\varphi_{ikj}}$. Si verifica facilmente che tali condizioni sono riflessive, simmetriche e transitive e non dipendono dal sistema di coordinate che si è scelto. Esse definiscono quindi una relazione di equivalenza, rispetto alla quale le V_r considerate si suddividono in classi. Ciascuna di queste classi si dirà una *calotta ipersuperficiale regolare del terzo ordine* σ_r^3.

Le condizioni $\underset{0}{f_i} = \underset{0}{\varphi_i}$ (con le $\underset{0}{f_i}$ non tutte nulle) assicurano che le varietà di una stessa classe hanno in P_0 lo stesso *iperpiano tangente*. Considerato un riferimento (proiettivo) in cui tale iperpiano abbia l'equazione $x^{r+1} \equiv z = 0$ e il punto $P_0 \equiv O$ abbia tutte coordinate (non omogenee) nulle, una σ_r^3 si può rappresentare mediante lo sviluppo

$$a_0\, z = a_{ik}\, x^i\, x^k + a_{ikj}\, x^i\, x^k\, x^j + \{4\} \qquad (a_0 \neq 0) \tag{2.1}$$

ove: I) con $\{4\}$ si sono indicati termini di grado $\geqslant 4$ nel complesso delle x^i, II) si è adottata la convenzione di sommazione rispetto ad indici ripetuti in

---

(1) Se si assume come modello lo spazio lineare nel quale si possono rappresentare le dette varietà razionali, si ottiene la rappresentazione adottata da C. Longo [**3**] per la determinazione e la caratterizzazione degli invarianti proiettivi di una coppia di calotte tangenti in un punto.

basso e in alto, III) i coefficienti a_{ik}, a_{ikj} sono simmetrici rispetto ai loro indici (i, k, $j = 1, 2, \ldots, r$). Al variare dei coefficienti a_0, a_{ik}, a_{ikj} si ottiene l'insieme Φ delle σ_r^3 di dato centro O e di dato iperpiano tangente $z = 0$. Una collineazione dell'S_{r+1} in sè che lasci fisso il centro O e l'iperpiano ivi tangente alle (2.1) è rappresentata da [5]:

$$(2.2)\qquad \begin{cases} x^i = \dfrac{\omega^i_{i'}\, x^{i'} + \omega^i z'}{\pi_{i'}\, x^{i'} + \varepsilon z' + \pi} \\[2ex] z = \dfrac{\omega z'}{\pi_{i'}\, x^{i'} + \varepsilon z' + \pi} \end{cases}$$

e trasforma una σ_r^3 nella $\sigma_r'^3$, appartenente a Φ, rappresentata da

$$(2.3)\qquad a'_0\, z' = a_{i'k'}\, x^{i'}\, x^{k'} + a_{i'k'j'}\, x^{i'}\, x^{k'}\, x^{j'} + \{4\},$$

ove

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \varrho a'_0 = \omega^2\, \pi^2\, a_0^2 \\ \varrho a_{i'k'} = \omega\pi\omega^i_{i'}\, \omega^k_{k'}\, a_0\, a_{ik} \\ \varrho a_{i'k'j'} = \omega\omega^i_{i'}\, \omega^k_{k'}\, \omega^j_{j'}\, a_0\, a_{ikj} + 2\omega^j\, \omega^i_{(i'}\, \omega^k_{k'}\, \omega^l_{l')}\, a_{ik}\, a_{jl} - \omega\, \omega^i_{(i'}\, \omega^k_{k'}\, \pi_{j')}\, a_0\, a_{ik}\,. \end{cases}$$

Posto

$$(2.5)\qquad \xi_0 = a_0^2, \qquad \xi_{ik} = a_0\, a_{ik}, \qquad \xi_{ik,\,jl} = a_{ik}\, a_{jl}, \qquad \eta_{ikj} = a_0\, a_{ikj},$$

le (2.4) si scrivono:

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \varrho\, \xi'_0 = \omega^2\, \pi^2\, \xi_0 \\ \varrho \xi_{i'k'} = \omega\pi\omega^i_{i'}\, \omega^k_{k'}\, \xi_{ik} \\ \varrho\, \xi_{i'k',\,j'l'} = \omega^i_{i'}\, \omega^k_{k'}\, \omega^j_{j'}\, \omega^l_{l'}\, \xi_{ik,\,jl} \\ \varrho \eta_{i'k'j'} = \omega\, \omega^i_{i'}\, \omega^k_{k'}\, \omega^j_{j'}\, \eta_{ikj} + 2\omega^j\, \omega^i_{(i'}\, \omega^k_{k'}\, \omega^l_{l')}\, \xi_{ik,\,jl} - \omega\omega^i_{(i'}\, \omega^k_{k'}\, \pi_{j')}\, \xi_{ik}\,. \end{cases}$$

Ora, se in uno spazio lineare S_N, con

$$N = \binom{r+1}{2} + \binom{(r^2+r)/2+1}{2} + \binom{r+2}{3},$$

si assumono come coordinate proiettive omogenee le ξ e le η, le (2.5) rappresentano una varietà V i cui punti, corrispondenti ad $a_0 \neq 0$, sono in corrispondenza biunivoca con le σ_r^3 regolari (2.1).

Inoltre le (2.6) pongono in evidenza che una collineazione (2.2) si riflette in una collineazione dello S_N.

Si osservi, infine, che, mentre il gruppo di collineazioni (2.2) dipende da r^2+2r+2 parametri (non omogenei), il gruppo (2.6), essendo indipendente da ε, dipende da r^2+2r+1 parametri: e ciò è dovuto al fatto che ciascuna σ_r^3 del sistema Φ viene trasformata in sè dalle ∞^1 omologie speciali di centro O ed iperpiano assiale $z=0$, rappresentate dalle equazioni

$$x^i = \pi x^{i'}/(\varepsilon z' + \pi), \qquad z = \pi z'/(\varepsilon z' + \pi).$$

3. - Ancora sulle coordinate di una σ_r^3.

La classe delle V_r che definiscono una stessa σ_r^3 di Φ contiene in sè una sottoclasse di ipersuperficie algebriche del terzo ordine V_r^3, e viceversa queste individuano la σ_r^3. Indicate con φ_1 e φ_2 due forme rispettivamente di primo e di secondo grado nelle variabili x^i, z, le predette V_r^3 sono rappresentate da

$$(-a_0 z + \ldots)(1 + \varphi_1 + \varphi_2) = 0 \tag{3.1}$$

ovvero, posto

$$\begin{cases} \varphi_1 = \lambda_i x^i + \lambda_0 z \\ \varphi_2 = \lambda_{ik} x^i x^k + \lambda_i x^i z + \lambda z^2, \end{cases} \tag{3.2}$$

da:

$$\begin{aligned} -a_0 z + a_{ik} x^i x^k + a_{ikj} x^i x^k x^j + \lambda_i (-a_0 x^i z + a_{jk} x^i x^k x^j) + \\ + \lambda(-a_0 z^2 + a_{ik} x^i x^k z) - \lambda_{ik} a_0 x^i x^k z - \lambda_i a_0 x^i z^2 - \lambda a_0 z^3 = 0\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Data l'arbitrarietà delle λ, si possono assumere come coordinate delle V_r^3, e quindi anche delle σ_r^3 da esse individuate, i minori (distinti, non nulli) (coordinate grasmanniane) estratti dalla matrice

$$(3.4)\qquad \begin{Vmatrix} -a_0 & a_{ik} & a_{ikj} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{ik} & -a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 & a_{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \end{Vmatrix}.$$

Si ritrovano così, a meno di un inessenziale fattore, le coordinate (2.5).

4. - Considerazioni generali.

Per $r = 1$ dalle (2.5) si ottiene la rappresentazione, data dal BOMPIANI [4], degli elementi curvilinei piani E_3 di dato centro e data retta tangente

$$a_0 y = ax^2 + bx^3 + \{4\}$$

nei punti del cono (di S_3):

$$(4.1)\qquad \xi_0 = a_0^2, \qquad \xi_1 = a_0 a, \qquad \xi_2 = a^2, \qquad \eta = b$$

aperto mediante la generatrice $\xi_0 = \xi_1 = 0$.

Le ulteriori generatrici, o i punti di una sezione piana del cono (non passante per il vertice), sono in corrispondenza biunivoca con gli E_2 degli E_3, e gli E_3 per uno stesso E_2 sono rappresentati dai punti di una stessa generatrice. La generatrice $\xi_0 = \xi_1 = 0$ si può interpretare come rappresentante degli E_3 non regolari e costituisce la *chiusura* della varietà rappresentativa degli E_3 regolari.

Al cono (4.1) si può sostituire la superficie rigata R_2^4 (di S_5) rappresentata da

$$(4.2)\qquad \xi_0 = a_0^3, \quad \xi_1 = a_0^2 a, \quad \xi_2 = a_0 a^2, \quad \xi_3 = a^3, \quad \eta_0 = a_0 b, \quad \eta_1 = ab.$$

Questa R_2^4 è birazionalmente equivalente al cono: ma, in questo caso, la *chiusura* degli E_3 regolari è rappresentata dalla direttrice rettilinea $\xi_i = 0$, $\eta_0 = a_0$, $\eta_1 = a$ e dalla generatrice $\xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = \eta_0 = 0$. La R_2^4 può preferirsi al cono per il fatto che è il modello minimo secondo SEVERI della totalità degli E_3 considerati ed inoltre per il fatto che, considerati due E_2 distinti, le generatrici che rappresentano gli E_3 con tali E_2 non hanno alcun punto in comune.

Per $r > 1$ la varietà (2.5) generalizza il caso del cono.

Le equazioni

$$\xi_0 = a_0^2, \qquad \xi_{ik} = a_0\, a_{ik}, \qquad \xi_{ik,\,jl} = a_{ik}\, a_{jl} \tag{4.3}$$

forniscono un modello delle σ_r^2 appartenenti alle σ_r^3 dell'insieme (2.1); e le σ_r^3 con data σ_r^2 si rappresentano nei punti di un S_d, con $d = \binom{r+2}{3}$; al variare delle σ_r^2 questi spazi S_d hanno a comune lo S_{d-1} di equazioni

$$\xi_0 = \xi_{ik} = \xi_{ik,\,jl} = 0\,. \tag{4.4}$$

Ad esempio, per $r = 2$ la (2.5) è un cono V_7^8 di S_{13} avente per vertice lo S_3 (4.4) e per direttrice la varietà di VERONESE F_3^8 di S_9 di equazioni

$$\xi_0 = a_0^2, \qquad \xi_{ik} = a_0\, a_{ik}, \qquad \xi_{ik,\,jl} = a_{ik}\, a_{jl}, \qquad \eta_{ikj} = 0\,.$$

In modo analogo si può determinare una generalizzazione della R_2^4; ma di ciò, che costituisce la parte essenziale del presente lavoro, mi occuperò nei prossimi n.n., limitandomi per semplicità al caso $r = 2$.

5. – Richiami sulla rappresentazione delle σ_2^2 di dato centro e dato piano tangente.

La totalità delle calotte superficiali del secondo ordine di S_3 con dato centro O e dato piano tangente $z = 0$, ossia

$$a_0\, z = a_{11} x^2 + 2 a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + \{3\}, \tag{5.1}$$

si può rappresentare, come è noto **[1]**, nei punti di un $S_3^*(a_0,\ a_{ik})$ nel quale si ha un *assoluto* costituito da:

I) un cono quadrico Γ, $a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22} = 0$, i cui punti rappresentano le calotte σ_2^2 *paraboliche* ed il cui vertice Ω rappresenta la calotta σ_2^2 *inflessionale* dell'insieme (5.1);

II) un piano ω, $a_0 = 0$, non passante per Ω, che può assumersi come rappresentante delle calotte σ_2^2 *irregolari* o *coniche*, considerando tra loro equivalenti due di esse che seghino il piano $z = 0$ secondo gli stessi E_1.

Le generatrici del cono Γ sono in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con le direzioni passanti per il centro O delle σ_2^2 ed appartenenti al piano tangente $z = 0$.

Un punto del piano ω, o una retta per Ω, individua due generatrici di Γ (sezioni di Γ col piano polare della retta considerata): i punti di tale retta rappresentano le σ_2^2 aventi come direzioni asintotiche due rette assegnate (precisamente quelle corrispondenti a codeste generatrici). In particolare, i punti di una generatrice di Γ rappresentano le σ_2^2 paraboliche con data direzione asintotica.

Una retta generica di S_3^* rappresenta le σ_2^2 di un fascio.

Analogamente: Un piano generico di S_3^* rappresenta le σ_2^2 di una rete; in particolare: le σ_2^2 corrispondenti ai punti di un piano per Ω hanno le tangenti asintotiche variabili in una involuzione, e quelle corrispondenti ai punti di un piano tangente a Γ hanno tutte una data tangente asintotica.

6. - Rappresentazione delle σ_2^3 di S_3 con dato centro e dato piano tangente.

Consideriamo in S_3 la totalità delle σ_2^3 rappresentate dallo sviluppo

$$\alpha_0 z = \alpha_1 x^2 + 2\alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 + \beta_0 x^3 + 3\beta_1 x^2 y + 3\beta_2 xy^2 + \beta_3 y^3 + \{4\}, \tag{6.1}$$

con $\alpha_3 \neq 0$.

Ho già detto che tali calotte si possono rappresentare (n. 4) nei punti di un cono V_7^8 di S_{13}, le cui equazioni, con le nuove notazioni ora introdotte, si scrivono

$$\xi_{kj} = \alpha_k \alpha_j, \qquad \eta_l = \beta_l, \qquad (k,\ j,\ l = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{6.2}$$

La varietà analoga alla rigata R_2^4 del caso $r = 1$ si ottiene facendo il prodotto topologico di codesto cono V_7^8 per lo spazio S_3^* (n. 5) immagine delle σ_2^2 appartenenti alle (6.1); si ha così la varietà V_7^m rappresentata dalle equazioni

$$\xi_{ikj} = \alpha_i \alpha_k \alpha_j, \qquad \eta_{jl} = \alpha_i \beta_l, \qquad (i,\ k,\ j,\ l = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{6.3}$$

Lo spazio ambiente di tale varietà è un S_{35}. Il punto ξ_{ikj} descrive, al variare delle α, una varietà di VERONESE F_3^{27} di S_{19} che rappresenta le superficie cubiche di S_3^*; mentre il punto η_{il} descrive, al variare delle α e delle β, una

V_6^{20} di S_{15} di C. SEGRE, la quale contiene, com'è noto, due schiere ∞^3 di S_3.

Le (6.3) pongono in evidenza una proiettività tra i punti della F_3^{27} e gli S_3 di una schiera della V_6^{20}; la V_7^m appare quindi come il luogo degli ∞^3 S_4 congiungenti punto e spazio corrispondentisi nella predetta proiettività; per richiamare alla mente tale generazione proiettiva di V_7^m scriveremo simbolicamente

$$V_7^m \equiv (F_3^{27},\ V_6^{20}),$$

convenendo di adottare lo stesso simbolismo nei casi analoghi che si presenteranno nel seguito di questo lavoro.

Proponiamoci di calcolare ora l'ordine m della (6.3). A tale scopo, consideriamo un iperpiano $\sum$ per l'S_{15} di V_6^{20} che intersechi F_3^{27} secondo tre F_2^9; a ciascuna di queste corrisponde in S_3^* un piano che, a sua volta, individua nella V_6^{20} una V_5^{10}; quindi, adottando il consueto simbolo $\cap$ di intersezione, si ha

$$\textstyle\sum \cap (F_3^{27},\ V_6^{20}) \equiv V_6^{20} + 3(F_2^9,\ V_5^{10}).$$

In modo analogo, con evidente significato dei simboli $\sum_1$ e $\sum_2$, si ha:

$$\textstyle\sum_1 \cap (F_2^9,\ V_5^{10}) \equiv V_5^{10} + 3(C^3,\ V_4^4),$$

$$\textstyle\sum_2 \cap (C^3,\ V_4^4) \equiv V_4^4 + 3S_4.$$

Segue:

$$(C^3,\ V_4^4) \equiv V_5^7, \qquad (F_2^9,\ V_5^{10}) \equiv V_6^{31}, \qquad (F_3^{27},\ V_6^{20}) \equiv V_7^{113}.$$

Quindi $m = 113$.

Pertanto, poichè la (6.3) può assumersi come varietà rappresentativa delle (6.1), si ha:

La totalità delle calotte superficiali del terzo ordine di uno spazio proiettivo tridimensionale, di dato centro e dato piano tangente, si può rappresentare, in un S_{35}, mediante una varietà V_7^{113}; e questa è generata come luogo degli ∞^3 S_4 congiungenti punto e spazio corrispodenti in una proiettitività fra una F_3^{27} di Veronese (immersa in un S_{19}) e una delle due schiere di spazi di una V_6^{20} di C. Segre (immersa in un S_{15} sghembo con l'S_{19}).

Gli S_4 generatori della V_7^{113} rappresentano, ciascuno, la totalità delle σ_2^3 dell'insieme (6.1) aventi una data σ_2^2: due qualunque degli S_4 generatori sono tra loro sghembi.

Va tenuto presente che, poichè si è inteso fin qui di rappresentare su V_7^{113} la totalità delle calotte *regolari* (6.1), la varietà stessa è da considerarsi *aperta*, nel senso che da essa vanno esclusi i punti corrispondenti ad $a_0 = 0$; essi costituiscono una varietà subordinata $\overset{0}{V}$ di cui si parlerà al n. **8** del presente lavoro.

7. - Totalità (di calotte regolari) invarianti.

Tra le calotte regolari (6.1) si possono considerare le seguenti totalità (di calotte regolari) invarianti (rispetto alle omografie che lasciano fisso il centro O delle calotte e il piano ad esse tangente in O):

I) *Calotte paraboliche*, ossia con tangenti asintotiche coincidenti: $\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2 = 0$. Esse sono rappresentate sulla V_7^{113} dai punti di una $\overline{V}_6^{62}$. Infatti, tenendo presente che i punti di F_3^{27} sono in corrispondenza biunivoca con le σ_2^2 delle (6.1) e che un fascio di σ_2^2 si rappresenta su F_3^{27} nei punti di una cubica C^3, si ha, in particolare, che i fasci di σ_2^2 paraboliche si rappresentano con ∞^1 cubiche $\overline{C}^3$ (tutte passanti per il punto Ω^0, di F_3^{27}, che rappresenta la σ_2^2 inflessionale): e si ha che il luogo di queste $\overline{C}^3$ è una $\overline{F}_2^{18}$. Ciò posto, la varietà $\overline{V}_6$ è il luogo degli S_4 congiungenti i punti di $\overline{F}_2^{18}$ con gli spazi di V_6^{20} ad essi corrispondenti nella proiettività generativa di V_7^{113}. Si noti che il luogo di tali spazi (sulla V_6^{20}) è una $\overline{V}_5$ di C. SEGRE (prodotto topologico di un cono Γ con uno spazio a tre dimensioni).

Determiniamo ora l'ordine della *varietà parabolica* $\overline{V}_6$. A tale scopo, calcoliamo dapprima l'ordine della $\overline{V}_5$, tenendo presente che essa può generarsi come luogo degli S_3 individuati dalle ∞^2 quaterne di punti corrispondenti di quattro coni quadrici Γ_0, Γ_1, Γ_2, Γ_3 in corrispondenza proiettiva, appartenenti a quattro spazi S_3^0, S_3^1, S_3^2, S_3^4 linearmente indipendenti; posto allora $\overline{V}_5^s \equiv \overline{V}(\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ e detto Θ un iperpiano (S_{14}) passante per l'S_{11} congiungente i tre spazi S_3^0, S_3^1, S_3^2 e per due generatrici di Γ_3, si ha:

$$\Theta \cap \overline{V}^s(\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) \equiv \overline{V}(\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2) + 2\overline{V}_4^4 .$$

In modo analogo, con evidente significato dei simboli Θ_1 e Θ_2, si ha:

$$\Theta_1 \cap \overline{V}(\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2) \equiv \overline{V}(\Gamma_0, \Gamma_1) + 2\overline{V}_3^3,$$

$$\Theta_2 \cap \overline{V}(\Gamma_0, \Gamma_1) \equiv \overline{V}(\Gamma_0) + 2\overline{V}_2^2 \equiv \overline{V}_2^6 .$$

Segue:

$$\overline{V}(\Gamma_0, \Gamma_1) \equiv \overline{V}_3^6, \qquad \overline{V}(\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2) \equiv \overline{V}_4^{12}, \qquad \overline{V}(\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) \equiv \overline{V}_5^{20}$$

e quindi $s = 20$.

Passiamo ora a calcolare l'ordine t della $\overline{V}_6$. Consideriamo un iperpiano $\sum \equiv S_{34}$ passante per l'S_{15} in cui è immersa la V_6^{20} e per un S_{18} secante la F_3^{27}

secondo tre F_2^9; tenuto conto che ciascuna di queste interseca $\overline{F}_2^{18}$ in due curve $\overline{C}^3$ e che ad ogni $\overline{C}^3$ corrisponde su V_6^{20} una $\overline{V}_4^4$, posto $(\overline{C}^3, \overline{V}_4^4) \equiv \overline{V}_5^7$, si ha:

$$\sum \cap \overline{V}_6^t \equiv \overline{V}_5^{20} + 6\overline{V}_5^7 \equiv \overline{V}_5^{62}.$$

Pertanto $t = 62$.

II) *Calotte inflessionali*, ossia con tangenti asintotiche indeterminate: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Si rappresentano sulla V_7^{113} nei punti di uno $\overset{0}{S}_4$: quello congiungente il punto Ω^0 (che rappresenta su F_3^{27} la σ_2^2 inflessionale) con lo spazio ad esso corrispondente su V_6^{20} nella proiettività generativa di V_7^{113}. In particolare, il punto Ω^0 $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_l = 0)$ rappresenta su V_7^{113} la calotta σ_2^3 *iperinflessionale* $a_0 z = \{4\}$.

III) *Calotte flecnodali*, ossia con una tangente asintotica a contatto quadripunto; la relativa varietà rappresentativa su V_7^{113} è una W_6. Per dimostrare ciò, divideremo la ricerca in quattro parti: A) Calotte flecnodali con una data σ_2^2; B) calotte flecnodali con date tangenti asintotiche, entrambe ad incontro quadripunto; C) Calotte flecnodali con una tangente asintotica assegnata ad incontro quadripunto; D) totalità delle calotte flecnodali.

A) Si trova facilmente che: «l e c a l o t t e f l e c n o d a l i c o n d a t a $\overset{2}{\sigma_2}$ sono rappresentate dai punti di due spazi tridimensionali, S_3' ed S_3'', appartenenti all'S_4 (generatore di V_7^{113}) immagine delle σ_2^3 con quella data σ_2^2; di conseguenza restano individuati, al variare di σ_2^2, due piani, π' e π'', in ognuno degli S_3 della schiera (di V_6^{20}) proiettivamente riferita alla F_3^{27}». Si noti però che ogni direzione asintotica individua ∞^1 di tali piani, e quindi il sistema ∞^2 delle σ_2^2 con una data direzione asintotica dà luogo, nella predetta schiera della V_6^{20}, ad un sistema ∞^1 di piani ciascuno dei quali è, per così dire, *associato* ad ∞^1 delle predette calotte del secondo ordine. Tutto ciò si verifica analiticamente senza difficoltà.

B) Consideriamo ora la totalità delle c a l o t t e f l e c n o d a l i c o n d a t e t a n g e n t i a s i n t o t i c h e e n t r a m b e a d i n c o n t r o q u a d r i p u n t o (*calotte biflecnodali*). Le σ_2^2 di un tale sistema di σ_2^3 sono rappresentate sulla V_7^{113} dai punti di una cubica C^3 (per Ω^0) a ciascun punto P della quale sono associati due spazi, S_3' ed S_3'', immagini delle σ_2^3 del dato sistema aventi come tangente ad incontro quadripunto rispettivamente l'una o l'altra delle due tangenti asintotiche; questi due spazi, a loro volta, individuano nell'S_3 corrispondente di P (su V_6^{20}) due piani π' e π'', ciascuno dei quali descrive, al variare di P su C^3, una V_3^3. Pertanto: «fissate le due direzioni asintotiche, le σ_2^3 che hanno le direzioni fissate come tangenti ad un incontro quadripunto, sono rappresentate da due varietà, W' e W'', ciascuna delle quali si può costruire come luogo degli ∞^1 S_3 congiungenti i punti di una C^3 con i piani di una V_3^3 ad essa riferita proiettivamente: ciascuna di codeste varietà è quindi una W_4^k ». L ordine k di una tale W_4 si determina facilmente: osservato, infatti, che W_4 appartiene all'S_9 congiungente l'S_3 di C^3 con l'S_5 di V_3^3, consideriamo un iperpiano $\sum$ (di codesto S_9) passante per l'S_5 e per 3 punti di C^3 e seghiamo con esso la W_4^k; risulta:

$$\sum \cap W_4^k \equiv V_3^3 + 3S_3 \equiv V_3^6,$$

pertanto $k = 6$.

C) Calotte flecnodali con data tangente asintotica ad incontro quadripunto: esse si possono rappresentare con lo sviluppo

$$\alpha_0 z = \alpha_3 (y + \lambda x)(y + ax) + \beta_0 x^3 + 3\beta_1 x^2 y + 3\beta_2 xy^2 + \beta_3 y^3 + \{4\},$$

ove sia

$$\beta_0 - 3\beta_1 \lambda + 3\beta_2 \lambda^2 - \beta_3 \lambda^3 = 0,$$

avendo assunto come tangente ad incontro quadripunto la $y + \lambda x = 0$. Consideriamo (n. **5**) il cono Γ di S_3^* che rappresenta la totalità delle σ_2^2 paraboliche. Le σ_2^2 con una data tangente asintotica si rappresentano in S_3^* nei punti di un piano tangente a Γ lungo la generatrice corrispondente alla direzione asintotica prefissata. Possiamo assumere come corrispondente della tangente $y + \lambda x = 0$ la generatrice

$$\alpha_1 = (1/\lambda)\alpha_3, \qquad \alpha_2 = \lambda\alpha_3.$$

Il piano tangente a Γ lungo tale generatrice ha l'equazione

$$\lambda\alpha_1 + (1/\lambda)\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0.$$

La F_2^9 corrispondente a tale piano (sulla F_3^{27}) è quindi data da

$$\eta^{ikj} = \alpha_i \alpha_k \alpha_j, \qquad \alpha_3 = (1/2)\{\lambda\alpha_1 + (1/\lambda)\alpha_2\},$$

e la V_4, luogo degli ∞^2 piani associati (rispetto alla tangente prefissata $y + \lambda x = 0$) ai punti di F_2^9, è data da

$$\eta^{il} = \alpha_i \beta_l,$$

con

$$\alpha_3 = (1/2)\{\lambda\alpha_1 + (1/\lambda)\alpha_2\}, \qquad \beta_0 = 3\beta_1\lambda - 3\beta_2\lambda^2 + \beta_3\lambda^3.$$

Essa è pertanto una V_4^6. Si ha quindi: «Il sistema delle calotte del terzo ordine flecnodali con data tangente asintotica ad incontro quadripunto si rappresenta su V_7^{113} con una W_5^9, la quale si può costruire come luogo degli ∞^2 S_3 congiungenti un punto variabile sopra una F_2^9 con un piano variabile in una V_4^6; punti e piani essendo riferiti in una proiettività posta tra la F_2^9 immagine (su F_3^{27}) delle σ_2^2 contenute nelle σ_2^3 del sistema considerato e la V_4^6 luogo dei piani associati a codeste σ_2^2 rispetto alla prefissata tangente asintotica ad incontro quadripunto.» L'ordine q di tale varietà W_5 risulta uguale a 24. Per determinarlo segheremo la W_5 con un opportuno iperpiano Θ del suo spazio ambiente che è un S_{18}. A tale scopo, sia σ un piano tangente al cono Γ di S_3^* e siano r_1, r_2, r_3 tre rette di σ passanti per il vertice Ω di Γ. Alla cubica piana riducibile $r_1 + r_2 + r_3$ corrisponde nell'S_9 ambiente della F_2^9 (immagine di σ su F_3^{27}) un iperpiano S_8' che sega F_2^9 secondo tre cubiche C_1^3, C_2^3, C_3^3. Assunto come iperpiano Θ quello individuato da S_8' e dall'S_8 ambiente di V_4^6, e tenuto conto che ciascuna C^3 (di F_3^{27}) per Ω^0 individua, relativamente ad una prefissata tangente asintotica ad incontro quadripunto, una W_4^6, si ha:

$$\Theta \cap V_5^9 \equiv V_4^6 + 3W_4^6;$$

pertanto risulta $q = 6 + 3\cdot 6 = 24$.

D) Totalità delle calotte flecnodali di dato centro e dato piano tangente: «si rappresenta con una W_6^p, luogo delle ∞^1 W_5 di cui alla precedente lettera C)». Si trova che l'ordine p di codesta W_6 è 72. Consideriamo, infatti, tre piani tangenti al cono Γ; la superficie cubica (di S_3^*) da essi formata ha per immagine in S_{19} un iperpiano S_{18}' il quale sega la F_3^{27} in tre F_2^9. Se si considera allora l'iperpiano $\sum$ (di S_{35}) individuato da codesto S_{18}' e dall'S_{15} in cui è immersa la V_6^{20}, si ha:

$$\sum \cap W_6^p \equiv 3W_5^{24}.$$

Pertanto $p = 72$.

8. - Chiusura della V_7^{113}.

Vogliamo ora dare una interpretazione ai punti della varietà corrispondente ad $\alpha_0 = 0$.

A tale scopo consideriamo la totalità delle superficie con punto doppio in O e tra queste chiamiamo *equivalenti* quelle che sul piano $z = 0$ determinano la stessa coppia di E_2 per O.

Le dette superficie vengono così suddivise in classi di equivalenza, ciascuna delle quali è rappresentata da un punto della V_7^{113}; il luogo di questi punti è una $\overset{0}{V}_6$ che si ottiene dalle equazioni della V_7^{113} ponendovi la condizione $\alpha_0 = 0$: e tale $\overset{0}{V}_6$ costituisce la *chiusura* della V_7^{113} rappresentante delle calotte regolari, ed ogni punto di essa si può considerare come rappresentante di una delle suddette classi di *calotte coniche* (non regolari). Tale $\overset{0}{V}_6$ può generarsi come luogo degli S_4 congiungenti i punti di una $\overset{0}{F}{}_2^9$ (appartenente alla varietà direttrice F_3^{27}) con gli spazi di V_6^{20} ad essi corrispondenti nella proiettività generativa di V_7^{113}. Poichè la totalità di questi ultimi spazi è una $\overset{0}{V}{}_5^{10}$ (prodotto topologico di un S_2 per un S_3) si ha, con le consuete notazioni:

$$\overset{0}{V}{}_6^n \equiv (\overset{0}{F}{}_2^9,\ \overset{0}{V}{}_5^{10}),$$

e quindi l'ordine n di $\overset{0}{V}_6$ è uguale a 31 (cfr. n. **6**).

Sottovarietà invarianti della $\overset{0}{V}{}_6^{31}$ sono quelle caratterizzate (oltre che da $\alpha_0 = 0$) da una delle seguenti condizioni:

$$\text{A)} \qquad \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2 = 0, \qquad\qquad \text{B)} \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

$$\text{C)} \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

che determinano rispettivamente la chiusura delle tre varietà invarianti $\overline{V}_3^{62}$ (parabolica), $\overset{0}{S}_4$ (inflessionale), $\overline{W}_6^{72}$ (flecnodale). La seconda di esse può assumersi come rappresentante della totalità delle superficie con un punto triplo in O, nel senso che ciascun punto rappresenta la classe delle superficie con punto triplo in O e tali da determinare sul piano $z = 0$ una medesima terna E_1.

Bibliografia.

1. E. Bompiani, *Invarianti proiettivi di calotte*, Atti R. Accad. Italia, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (7) **2** (1941), 888-895.

2. E. Bompiani, *Invarianti proiettivi e topologici di calotte di superficie e di ipersuperficie tangenti in un punto*, Rend. Mat. e Appl. Roma (5) **2** (1941), 261-291.

3. E. Bompiani, *Geometria proiettiva di elementi differenziali*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **22** (1943), 1-32.

4. E. Bompiani, *Sugli elementi curvilinei piani E_3 tangenti*, Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **16** (1954), 585-590.

5. C. Longo, *Invarianti proiettivi di calotte del terzo ordine tangenti in un punto*, Rend. Mat. e Appl. Roma (5) **7** (1948), 295-326.

6. C. Longo, *Le calotte del secondo ordine di S_3 con centro assegnato*, Riv. Mat. Univ. Parma **8** (1957), 49-58.