Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 405-406

LETTERIO TOSCANO (*)

Sulle soluzioni intere dell'equazione $4x^3 = 27y^2 + N$.

1. - In una Nota dallo stesso titolo, pubblicata nell'ultimo fascicolo di questa Rivista [**8** (1957), 199-206], E. BOMBIERI ha dimostrato che per N intero, $-22 \leqslant N \leqslant 80$, $N \neq 0$, $N \neq 49$, l'equazione del titolo ammette un numero finito di soluzioni intere e ha determinato tutte le soluzioni basandosi su un lemma preliminare secondo il quale per ogni soluzione (x, y) esistono due interi a e c tali che

$$x = a^2 + c, \qquad y = ac, \tag{1}$$

e applicando anche un altro lemma che fissa intervalli in cui sono compresi gli zeri reali di particolari polinomi di terzo grado.

2. - Qui osservo che in virtù delle (1) risulta

$$N = 4a^6 + 12a^4c - 15a^2c^2 + 4c^3 = (a^2 + 4c)(2a^2 - c)^2 = (9a^2 + 4\nu)\nu^2,$$

dove $\nu = c - 2a^2$ e, in conseguenza,

$$x = 3a^2 + \nu, \qquad y = a(2a^2 + \nu).$$

(*) Indirizzo: Via Placida 85, Messina, Italia.

Questa scomposizione dell'intero N, che è conseguenza delle (1) fornite dal lemma citato, ci consente di determinare tutte le soluzioni con le semplici osservazioni seguenti. Distinguiamo due casi (tralasciando l'eventualità $\nu = 0$ che conduce al caso ovvio $N = 0$):

1°) Sia $\nu > 0$. Allora $-22 \leqslant N \leqslant 80$ ci dà

$$4 + 9a^2/\nu \leqslant 80/\nu^3$$

e quindi $1 \leqslant \nu \leqslant 2$. Per $\nu = 1$ risulta $a^2 \leqslant 76/9$ e $0 \leqslant a \leqslant 2$. Per $\nu = 2$ risulta $a^2 \leqslant 4/3$ e $0 \leqslant a \leqslant 1$. L'esame di questi casi conduce alle soluzioni seguenti che abbrevieremo con la notazione $(\nu, a; N, x, y)$.

$\nu = 1$: $(1, 0; 4, 1, 0)$, $(1, 1; 13, 4 \pm 3)$, $(1, 2; 40, 13, \pm 18)$;

$\nu = 2$: $(2, 0; 32, 2, 0)$, $(2, 1; 68, 5, \pm 4)$.

2°) Sia $\nu < 0$. Allora $-22 \leqslant N \leqslant 80$ ci dà, ponendo $\nu' = -\nu$,

$$4\nu' - 22/\nu'^2 \leqslant 9a^2 \leqslant 4\nu' + 80/\nu'^2.$$

Per $\nu' = 1$ risulta $a^2 \leqslant 84/9$ e quindi $0 \leqslant a \leqslant 3$.

Per $\nu' = 2$ risulta $5/18 \leqslant a^2 \leqslant 28/9$ e quindi $a = 1$.

Per $\nu' = 3$ e $\nu' = 4$ si ottengono le due limitazioni impossibili $86/81 \leqslant a^2 \leqslant 188/81$, $13/8 \leqslant a^2 \leqslant 7/3$.

Per $\nu' \geqslant 5$ la limitazione precedente, scritta così

$$-22/\nu'^2 \leqslant 9a^2 - 4\nu' \leqslant 80/\nu'^2,$$

ci mostra che $9a^2 - 4\nu' \geqslant 0$ e quindi necessariamente $N \geqslant 0$, e si ottiene $N > 0$ soltanto per $\nu'^2 \leqslant 80$ cioè $\nu' \leqslant 8$; pei valori $5 \leqslant \nu' \leqslant 8$ si controlla che non si hanno soluzioni. L'esame dei casi possibili per $\nu < 0$ conduce alle soluzioni

$\nu = -1$: $(-1, 0; -4, -1, 0)$, $(-1, 1; 5, 2, \pm 1)$, $(-1, \cancel{2}; 32, 11, \pm 14)$,
$(-1, 3; 77, 26, \pm 51)$;

$\nu = -2$: $(-2, 1; 4, 1, 0)$.

Si sono ritrovate così tutte e sole le soluzioni della Nota citata.