Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 313-335

MARIO G. GALLI (*)

Vedude moderne circa i fondamenti delle trasformazioni di Lorentz

(Parte II). (**)

Indice della Parte II.

Sintesi della Parte II.

Nel § **8** si discute la compatibilità tra la teoria della relatività ristretta e la (ipotetica) dispersione del vuoto. Si mostra, fra le altre cose, che, premesso il postulato di relatività e sostituendo al postulato einsteiniano della costanza della velocità della luce un altro postulato che di esso può essere considerato la naturale generalizzazione, è ancora possibile dedurre le trasformazioni di LORENTZ.

Nel paragrafo successivo si deducono le stesse trasformazioni dall'invarianza delle equazioni di MAXWELL. Questa dimostrazione non differisce so-

---

(*) Indirizzo: Convento PP. Domenicani, Piazza S. Maria Novella 18, Firenze, Italia.

(**) Per la Parte **I** vedasi: Riv. Mat. Univ. Parma **8** (1957), 161-198.

stanzialmente da quella tradizionale ed è effettivamente molto antica (BATEMAN, 1909; FRANK, 1910). Nondimeno essa è molto istruttiva e perciò abbiamo creduto utile riportarla. Il metodo adoperato è affine a quello di FRANK, ma ne differisce sotto vari aspetti. Tra l'altro esso ha il vantaggio di mettere in luce una suggestiva corrispondenza tra i risultati che se ne ricavano e quelli che risultavano precedentemente (§ 4) da considerazioni puramente cinematiche.

Nel § **10** si deducono le trasformazioni di LORENTZ partendo dalla supposizione che le trasformazioni spazio-temporali legittime devono costituire un gruppo. Si discute anche uno scritto recente in cui questa comune opinione è, in un certo senso, contestata.

Successivamente si procura di dedurre le stesse trasformazioni dall'invarianza della legge fondamentale della dinamica. Così risulterà chiaro quanto sia poco fondato il tentativo di separare cinematica e dinamica relativistica.

Infine avremmo vivamente desiderato esporre la teoria di MILNE. Purtroppo però lo spirito informatore di questa teoria non è agevolmente comprensibile senza una lunga esposizione preliminare e senza interessarsi (sia pure in misura limitata) ai problemi della relatività generale. Questa difficoltà può essere alleviata, ma non eliminata del tutto, limitando la propria attenzione al metodo con cui MILNE deduce le trasformazioni di LORENTZ. Perciò siamo stati costretti a rinunciarvi. Peraltro questa omissione non reca pregiudizio alle conclusioni finali.

Queste sono esposte nell'ultimo paragrafo, nel quale ci occupiamo, sebbene molto sommariamente, del problema di un eventuale superamento delle trasformazioni di LORENTZ. Ci limitiamo ad un breve esame critico del significato che può assumere nel caso attuale il termine « superamento » e ad un semplice suggerimento delle cautele che dovrebbero essere adoperate dagli studiosi che intendono dedicarsi a tanto arduo compito.

§ 8. – Possibilità della dispersione del vuoto e le eventuali conseguenze relativistiche.

Per quanto consta da esperienze sin'ora effettuate il vuoto si comporta come un mezzo non dispersivo. Se quindi indichiamo con $\omega/(2\pi)$ la frequenza della radiazione luminosa, con $b(\omega)$ la velocità di fase, con $U(\omega)$ la velocità di gruppo, e la propagazione della luce avviene nel vuoto, abbiamo:

$$b(\omega) = U(\omega) = \text{cost.} = c\,. \tag{27}$$

Un esame accurato della radiazione che ci proviene da stelle doppie o da stelle pulsanti lontanissime ci garantisce che, se la legge (27) non è esatta, essa è per lo meno estremamente approssimata.

Dopo l'applicazione di nuovi metodi alla misura di velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche, anche se da principio era nato qualche dubbio circa l'uguaglianza della velocità di propagazione relativa alla luce ed alle microonde, un più attento esame ha mostrato che la (27) è solidissima.

Tuttavia non è assolutamente da escludersi che la (27) sia solo molto approssimata, che quindi esperienze future rivelino qualche piccola deviazione da essa.

DE BROGLIE (37), ad esempio, ha elaborato una teoria quantistica del fotone nella quale la (27) è ritenuta solo approssimata. A rigore il vuoto, secondo questa teoria, si comporta come un mezzo dispersivo. Quantisticamente ciò equivale ad attribuire al fotone una massa di riposo diversa da zero, diversamente da quanto si fa nelle teorie più comunemente accettate. Naturalmente, per andare d'accordo con l'esperienza, si deve ammettere che la massa del fotone sia estremamente piccola.

Per quanto questa supposizione non abbia per il momento alcun valore pratico, tuttavia ha un certo interesse vedere se, ed in che senso, essa è compatibile con la teoria della relatività.

È chiaro intanto che, se la dispersione del vuoto esiste, anche se piccolissima, il 2° postulato della relatività deve ritenersi solo molto approssimato, non già rigorosamente esatto.

DE BROGLIE (38) dà un risposta molto sommaria a questa difficoltà. Egli dice in fondo che il 2° postulato è molto importante nella teoria della relatività in quanto per suo mezzo, in unione al 1° postulato, si deducono le trasformazioni di LORENTZ. Ma queste possono essere dedotte anche ammettendo semplicemente l'esistenza di una velocità limite, ciò che effettivamente si salva nella nuova teoria.

DITCHBUBN (39) ha mostrato che, indipendentemente da ogni teoria quantistica, l'ipotesi della dispersione del vuoto è compatibile con la teoria della relatività, però questa impone una restrizione sulla forma delle funzioni $b(\omega)$ ed $U(\omega)$. Vale precisamente la relazione

$$b(\omega)\ U(\omega) = c^2. \tag{28}$$

Nella deduzione di questa formula si fa uso delle trasformazioni di LORENTZ ammettendo che queste siano deducibili dal principio di relatività e dall'invarianza della forma quadratica $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$. In questa ammissione,

---

(37) L. DE BROGLIE: **Une nouvelle théorie de la lumière**, Hermann, Paris 1940-42; **Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs**, Gauthier-Villars, Paris 1949 (cfr. p. 143).

(38) Opera citata come prima in (37) (cfr. p. 42).

(39) R. W. DITCHBUBN, *Phase-velocity and group-velocity in relativistic optics*, Rev. Optique **27** (1948), 4-14.

peraltro, la costante c non deve essere identificata a priori con la velocità della luce. Essa ha un carattere puramente cinematico.

L'autore ([40]) di questo articolo, sottoponendo ad analisi critica i risultati di DITCHBURN, accetta la conclusione (28), osservando peraltro che nella deduzione è ammessa implicitamente una ipotesi che può essere riguardata come la naturale estensione del 2° postulato della relatività einsteiniana.

Con questo postulato si afferma l'indipendenza della velocità di fase e di gruppo dal moto della sorgente luminosa. Ossia, due radiazioni emesse da due sorgenti, una in quiete e l'altra mobile con velocità v rispetto ad un osservatore inerziale K, solidale col sistema $Oxyz$, se hanno la stessa frequenza $\omega/(2\pi)$ rispetto a questo osservatore, devono avere parimenti la stessa velocità di fase e di gruppo. Questa estensione del postulato einsteiniano è ovvia e facilmente accettabile, ma non si può dire logicamente necessaria.

Per quanto sia ormai evidente che le trasformazioni di LORENTZ si possano stabilire senza fare alcun ricorso alla propagazione luminosa, nondimeno è spontaneo chiedersi se sia possibile dedurle dal postulato di relatività e dal postulato ora enunciato. Un procedimento cosiffatto avrebbe questi due vantaggi:

a) Esso sarebbe compatibile con la dispersione del vuoto.

b) Esso si differenzierebbe il meno possibile dal procedimento originario di EINSTEIN, poichè il 2° postulato sarebbe sostituito dalla sua naturale generalizzazione.

A questo scopo premettiamo una giustificazione della (28), valida qualora si ammetta il principio di relatività e le trasformazioni di LORENTZ, comunque queste siano dedotte.

Premesso il principio di relatività si dimostra che, data un'onda piana, definita rispetto all'osservatore K (solidale col sistema $Oxyz$) dall'equazione

$$\varphi = a\, e^{i(\omega t - kx)}, \tag{29}$$

quella stessa onda è definita rispetto all'osservatore K' (solidale col sistema $O'x'y'z'$) dall'equazione

$$\varphi' = a' e^{i(\omega' t' - k'x')}. \tag{29'}$$

Per l'invarianza della fase deve essere:

$$\omega t - kx = \omega' t' - k'x', \tag{30}$$

([40]) M. GALLI: *Vitesse de phase et vitesse de groupe dans l'optique relativiste*, Rev. Optique **30** (1951), 174-184; *Ottica relativistica generalizzata*, Ottica (N. S.) **5** (1951), 49-62.

da cui, applicando le trasformazioni di LORENTZ ed indicando con b la velocità di fase e con U la velocità di gruppo ($U = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$), si deducono le seguenti relazioni:

$$(31) \qquad \omega' = \omega \frac{1-(v/b)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}, \qquad (32) \qquad b' = \frac{b-v}{1-(vb/c^2)},$$

$$(33) \qquad k' = k \frac{1-(vb/c^2)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}, \qquad (34) \qquad U' = \frac{U-v}{1-(vU/c^2)}.$$

Si tenga inoltre presente la definizione di U la quale conduce alla formula

$$(35) \qquad U = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}(bk)}{\mathrm{d}k} = b + k\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k},$$

da cui la notevole equazione differenziale:

$$(35') \qquad 1 - \frac{\omega}{b}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\omega} = \frac{b}{U}.$$

Nella formula (34) U' è il trasformato di U e si ottiene dalle formule (31) e (33), considerando in queste ω' e k' come funzioni di k. Insomma si pone:

$$U' = \frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'} = \frac{\mathrm{d}\omega'/\mathrm{d}k}{\mathrm{d}k'/\mathrm{d}k}.$$

Ma, per l'invarianza richiesta dal postulato dianzi enunciato, si può anche scrivere:

$$(34') \qquad U' = \frac{\mathrm{d}\omega'/\mathrm{d}v}{\mathrm{d}k'/\mathrm{d}v}.$$

Esegu te le derivazioni a partire dalle (31) e (33) e dopo ovvie semplificazioni, si ottiene

$$34'') \qquad \frac{\mathrm{d}\omega'/\mathrm{d}v}{\mathrm{d}k'/\mathrm{d}v} = \frac{c^2 - vb}{b-v},$$

espressione che deve coincidere con quella fornita dalla (34); deve cioè sussistere la relazione

$$\frac{c^2 - vb}{b-v} = \frac{U-v}{1-(Uv/c^2)},$$

da cui

$$(c^2 - vb)\left\{1 - (Uv/c^2)\right\} = (U - v)(b - v)\,.$$

Infine, semplificando e riducendo,

$$Ub = c^2. \tag{36}$$

Nella precedente dimostrazione si è fatto uso del principio di relatività, delle trasformazioni di LORENTZ, e del principio che, come abbiamo prima fatto osservare, può essere riguardato come la naturale estensione del principio della costanza della velocità della luce.

Ma noi già sappiamo che il solo principio di relatività, se non conduce alle trasformazioni di LORENTZ, conduce tuttavia a trasformazioni che sono molto affini ad esse, differendone semplicemente per il fatto che in luogo della costante $1/c^2$ vi compare la costante indeterminata α.

È chiaro che, ripetendo il ragionamento precedente, potremmo giungere a qualcosa di simile alla formula (36) anche partendo dalle trasformazioni di IGNATOWSKI anzichè da quelle di LORENTZ. Così facendo si trova effettivamente invece della (36) la seguente:

$$U(\omega)\cdot b(\omega) = 1/\alpha\,. \tag{36'}$$

Questa relazione perde significato per $\alpha = 0$ (trasformazioni galileiane). È chiaro peraltro che in questo caso (premessa cioè la validità delle trasformazioni galileiane) le equazioni corrispondenti alle (31) e (32) diventerebbero le seguenti:

$$\omega' = \omega\cdot\left\{1 - (v/b)\right\}, \tag{37}$$ $$b' = b - v, \tag{37'}$$

da cui $b' = b\omega'/\omega$, ossia

$$b = \gamma\omega \qquad (\gamma = \text{cost.}). \tag{38}$$

Utilizzando la (36') si avrebbe inoltre $U = \infty$. Se vogliamo, com'è senz'altro implicito nell'ipotesi, che entrambi $b(\omega)$ ed $U(\omega)$ siano grandezze finite, dobbiamo escludere tale supposizione. Oltre a ciò è evidente che l'equazione (38) è troppo in contrasto con l'esperienza. Questa non ci garantisce in modo assoluto che debba essere rigorosamente $b =$ cost., ma ci assicura che questa relazione deve essere per lo meno molto approssimata, non rappresentabile assolutamente con la formula (38).

Rimangono quindi le possibilità $\alpha > 0$, $\alpha < 0$. Ma il fare negativa la costante α contrasta, come abbiamo visto dianzi, con l'ordine naturale di successione di causa ed effetto. Rimane quindi la unica alternativa $\alpha > 0$, ossia le trasformazioni di LORENTZ.

Naturalmente in questo procedimento la costante c non è legata alla velocità della luce nel modo consueto. Sussiste però un legame che possiamo subito precisare. Dalla (35'), indicando con h una opportuna costante, si deduce

$$(39)\qquad b = \frac{c}{\sqrt{1-(h^2/\omega^2)}}\,, \qquad\qquad (39')\qquad U = c\sqrt{1-(h^2/\omega^2)}\,.$$

Come si vede, dando alla costante h un valore sufficientemente piccolo, solo per frequenze molto basse si avrebbe un apprezzabile divario dalla costanza. Comunque, al limite per frequenze molto alte si avrebbe

$$(40)\qquad b = c, \qquad\qquad U = c\,.$$

Ossia, in questa sistemazione, c rappresenta il limite a cui tendono le velocità di fase e di gruppo quando la frequenza tende ad infinito.

§ 9. – Le trasformazioni di Lorentz dedotte dall'invarianza delle equazioni di Maxwell.

EINSTEIN, nella sua Memoria fondamentale del 1905, prima stabilisce le trasformazioni di LORENTZ, e in seguito, mediante l'applicazione sistematica del principio di relatività, in virtù del quale le equazioni di MAXWELL devono essere invarianti rispetto a tali trasformazioni, stabilisce la legge secondo la quale si trasformano il campo elettrico ed il campo magnetico.

Peraltro si può dimostrare che l'invarianza delle equazioni di MAXWELL rispetto alle trasformazioni spazio-temporali legittime definisce anche queste in modo univoco (41). Per dimostrarlo poniamo, come al solito,

$$(41)\qquad x' = ax + bt, \qquad\qquad t' = px + qt,$$

(41) H. BATEMAN, *The transformation of the electrodynamical equations*, Proc. London Math. Soc. (2) **8** (1910), p. 233; PH. FRANK, *Das Verhalten der elektromagnetischen Feldgleichungen gegenüber linearen Transformationen*, Ann. Physik (4) **35** (1911), 599-607.

Il procedimento sopra adottato è affine, ma non identico, a quello di FRANK. Può invece essere considerato quasi identico a quello con cui originariamente EINSTEIN dove a, b, p, q sono funzioni incognite di v, da determinare. Per il principio di relatività, se le equazioni di MAXWELL rappresentano adeguatamente i fenomeni elettromagnetici nel sistema $Oxyz$, esse devono conservare invariata la loro forma quando si passa al sistema $O'x'y'z'$ mediante le (41).

Scrivendo le equazioni di MAXWELL nella forma scalare, abbiamo:

$$(42)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_x}{\partial t} = \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_y}{\partial t} = \dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_z}{\partial t} = \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{dH_x}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H_x}{\partial t} = \dfrac{\partial E_y}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H_y}{\partial t} = \dfrac{\partial E_z}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H_z}{\partial t} = \dfrac{\partial E_x}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial H_x}{\partial x} + \dfrac{\partial H_y}{\partial y} + \dfrac{\partial H_z}{\partial z} = 0; \end{cases}$$

se ora φ è una funzione generica di x, y, z, t, le derivate di φ rispetto ad x ed a t si possono esprimere mediante le derivate rispetto ad x' ed a t' nel modo seguente:

$$(43)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = a\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + p\frac{\partial\varphi}{\partial t'},$$

$$(44)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = b\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + q\frac{\partial\varphi}{\partial t'}.$$

Avremo invece ovviamente:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z'}.$$

Applicando queste formule all'espressione delle derivate delle componenti di E e di H che compariscono nelle (42) si ottiene, dopo un congruo riordina-

---

dedusse le relazioni tra i vettori del campo elettromagnetico, misurati rispettivamente nei sistemi $Oxyz$ ed $O'x'y'z'$. La differenza consiste nel sostituire alle trasformazioni di LORENTZ le relazioni lineari (41) con i coefficienti indeterminati. I risultati finali implicano, oltre a delle relazioni tra i vettori del campo, anche delle relazioni tra questi stessi coefficienti indeterminati, le quali permettono così di determinarli.

mento dei termini,

$$
(45)\quad \begin{cases}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}[(aq-bp)E_x] = \frac{\partial}{\partial y'}[aH_z+(b/c)E_y] - \frac{\partial}{\partial z'}[aH_y-(b/c)E_z] \\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}[qE_y+cpH_z] = \frac{\partial}{\partial z'}H_x - \frac{\partial}{\partial x'}[aH_z+(b/c)E_y] \\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}[\,qE_z-pH_y] = \frac{\partial}{\partial x'}[aH_y-(b/c)E_z] - \frac{\partial}{\partial y'}H_z \\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}[(aq-bp)H_x] = \frac{\partial}{\partial z'}[aE_y+(b/c)H_z] - \frac{\partial}{\partial y'}[aE_z-(b/c)H_y] \\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}[qH_y-cpE_z] = \frac{\partial}{\partial x'}[aE_z-(b/c)H_y] - \frac{\partial}{\partial z'}E_x \\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}[qH_z+pcE_y] = \frac{\partial}{\partial y'}E_x - \frac{\partial}{\partial x'}[aE_y+(b/c)H_z].
\end{cases}
$$

Ma dovendo parimenti valere le equazioni:

$$
(42')\quad \begin{cases}
\frac{1}{c}\frac{\partial E_{x'}}{\partial t'} = \frac{\partial H_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial H_{y'}}{\partial z'} \\
\frac{1}{c}\frac{\partial E_{y'}}{\partial t'} = \frac{\partial H_{x'}}{\partial z'} - \frac{\partial H_{z'}}{\partial x'} \\
\frac{1}{c}\frac{\partial E_{z'}}{\partial t'} = \frac{\partial H_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial H_{x'}}{\partial y'},
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\frac{1}{c}\frac{\partial H_{x'}}{\partial t'} = \frac{\partial E_{y'}}{\partial z'} - \frac{\partial E_{z'}}{\partial y'} \\
\frac{1}{c}\frac{\partial H_{y'}}{\partial t'} = \frac{\partial E_{z'}}{\partial x'} - \frac{\partial E_{x'}}{\partial z'} \\
\frac{1}{c}\frac{\partial H_{z'}}{\partial t'} = \frac{\partial E_{x'}}{\partial y'} - \frac{\partial E_{y'}}{\partial x'};
\end{cases}
$$

confrontando si ricava:

$$
(46)\quad \begin{cases}
E_{x'} = (aq-bp)E_x = E_x \\
E_{y'} = qE_y + pcH_z = aE_y + (b/c)H_z \\
E_{z'} = qE_z + pcH_y = aE_z + (b/c)H_y \\
H_{x'} = H_x = (aq-pb)H_x \\
H_{y'} = aH_y - (b/c)E_z = qH_y - cpE_z \\
H_{z'} = aH_z + (b/c)E_y = qH_z + pcE_y .
\end{cases}
$$

È ovvio che, affinchè queste siano compatibili, devono valere le relazioni seguenti (nel quadro a sinistra):

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} aq - bp &= 1 \\ a &= q \\ &\ \dots\dots \\ p &= b/c^2, \end{aligned}\right. \qquad\qquad \left\{\begin{aligned} aq - bp &= 1 \\ a &= q \\ b &= -av \\ p &= b/c^2. \end{aligned}\right.$$

Qui, nel quadro a destra, abbiamo posto le relazioni (18) messe a confronto con quelle ora dedotte. La conformità è sorprendente. Le equazioni ricavate da considerazioni puramente cinematiche coincidono con quelle che si ricavano prescrivendo che i coefficienti delle (41) salvino l'invarianza delle equazioni di MAXWELL, come richiede il principio di relatività. Manca la relazione corrispondente alla $b = -av$. Ciò è peraltro comprensibile, poichè nelle equazioni di MAXWELL non è contenuto il parametro v. Tuttavia l'equazione mancante è la semplice espressione matematica del fatto che il sistema $O'x'y'z'$ si muove rispetto al sistema $Oxyz$ con velocità v, così che essa può ritenersi acquisita anche prima di avere applicato l'attuale procedimento.

Questa dimostrazione, pur essendo rigorosa, non può essere considerata la migliore. Essa è infatti troppo esigente. La validità universale delle equazioni di MAXWELL per tutti i fenomeni elettrodinamici è più difficile a dimostrarsi (da un punto di vista empirico) che non una proposizione particolare in esse implicita, come è, ad esempio, il principio della velocità della luce. D'altra parte, come abbiamo visto precedentemente, basta un solo fatto apportunamente scelto tra quelli appartenenti al dominio dell'elettromagnetismo, per fissare il valore della costante α che compare nelle (18) e quindi giustificare le trasformazioni di LORENTZ.

Le equazioni di MAXWELL potrebbero essere solo approssimate. Niente ci può garantire *a priori* che le eventuali equazioni esatte che dovrebbero sostituirle richiedano, per essere invarianti, che valgano le trasformazioni di LORENTZ, a meno che la validità di queste non risulti da altri argomenti. È invece desiderabile svincolare la validità delle equazioni ricercate da situazioni problematiche.

Il pregio del metodo che conduce alle equazioni (19) e (20) consiste essenzialmente nell'esimerci dalla necessità di insistere nella giustificazione di una determinata proposizione per giungere alle trasformazioni spazio-temporali legittime. Possiamo fare uso del principio della costanza della velocità della luce, come pure di qualunque altra proposizione che ci riesca più comodo giustificare empiricamente. Anzi, in molti casi almeno, basta che l'esperienza ci garantisca la validità approssimata di qualche proposizione, perchè si giunga alla necessità di accettare le trasformazioni di LORENTZ come le trasformazioni spazio-temporali legittime.

§ 10. – Le trasformazioni di Lorentz dedotte dalle rispettive proprietà gruppali ([42]).

Che le trasformazioni di LORENTZ formino un gruppo è cosa ben nota e facilmente constatabile ([43]). A dire il vero, recentemente c'è stata al riguardo qualche contestazione di cui tra breve diremo. Ma non occorre anticipare la discussione su questo punto, poichè la contestazione ha fondamento solo qualora si voglia dare un significato diverso dall'usuale alle trasformazioni cinematiche che si vogliono stabilire.

Alcuni autori hanno tentato di stabilire le trasformazioni di LORENTZ fondandosi sulle proprietà gruppali che le trasformazioni spazio-temporali legittime dovrebbero possedere. Questa attribuzione può essere dedotta dal postulato della relatività ovvero postulata indipendentemente da esso.

Per semplicità considereremo i due sistemi lineari Ox ed $O'x'$. Il secondo si muova con velocità v. Sarà in generale:

$$x' = x'(x, t, u), \qquad (48) \qquad\qquad t' = t'(x, t, u). \qquad (49)$$

Si tratta di determinare le due funzioni incognite $x'(x, t, u)$ e $t'(x, t, u)$; u è un parametro ([44]).

Consideriamo a tale scopo un altro sistema $O''x''$ mobile rispetto al sistema $O'x'$ con velocità $\mathrm{d}u$. Ammettiamo che, essendo $\mathrm{d}u$ infinitesimo, siano valide le relazioni

$$x'' = x' - (\mathrm{d}u)t', \qquad (48') \qquad\qquad t'' = t' - \alpha\cdot(\mathrm{d}u)x'. \qquad (49')$$

([42]) La prima giustificazione delle trasformazioni di LORENTZ a partire dalle proprietà gruppali che le trasformazioni spazio-temporali legittime dovrebbero possedere, si deve a FRANK e ROTHE [PH. FRANK und H. ROTHE, *Über die Transformation der Raumzeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme*, Ann. Physik (4) **34** (1911), 825-855].

La dimostrazione di FRANK e ROTHE fa a meno di qualche ipotesi di cui si fa uso nella dimostrazione qui data. Questa è affine ad un procedimento con il quale taluni hanno recentemente tentato di risolvere il problema del disco rotante, ed è stata preferita per ragioni di semplicità.

([43]) Che le trasformazioni di LORENTZ costituiscano un gruppo è assai agevolmente constatabile nel caso unidimensionale. Per il caso più generale vedasi: T. LEVI-CIVITA, **Fondamenti di meccanica relativistica**, N. Zanichelli, Bologna 1925 (cfr. pp. 30-32).

([44]) Si faccia bene attenzione al fatto che il parametro u, sebbene dipendente dalla velocità v, non è a priori identificabile con essa. Vedremo anzi che tale non è il caso, a meno che u non sia infinitesimo [cfr. formula (56)].

Si sa dalla teoria dei gruppi che basta la cognizione della trasformazione infinitesima per determinare la trasformazione più generale. Ma è pure:

$$x'' = x'(x,\ t,\ u + \mathrm{d}u) = x'(x,\ t,\ u) + (\partial x'/\partial u)\mathrm{d}u,$$

$$t'' = t'(x,\ t,\ u + \mathrm{d}u) = t'(x,\ t,\ u) + (\partial t'/\partial u)\mathrm{d}u\,.$$

Paragonando con le precedenti, si ha:

$$\mathrm{d}x'/\mathrm{d}u = -t', \qquad \mathrm{d}t'/\mathrm{d}u = -\alpha x'.$$

Differenziando queste e paragonando tra loro, otteniamo:

$$(50) \qquad \mathrm{d}^2x'/\mathrm{d}u^2 = \alpha x', \qquad (51) \qquad \mathrm{d}^2t'/\mathrm{d}u^2 = \alpha t'.$$

Da queste risulta per integrazione:

$$(52) \qquad x' = A\cdot\cosh(\sqrt{\alpha}\ u) + B\cdot\operatorname{senh}(\sqrt{\alpha}\ u),$$

$$(53) \qquad t' = M\cdot\cosh(\sqrt{\alpha}\ u) + N\cdot\operatorname{senh}(\sqrt{\alpha}\ u)\,.$$

Le condizioni ai limiti sono, per $u = 0$,

$$x' = x, \qquad t' = t, \qquad \mathrm{d}x'/\mathrm{d}u = -t, \qquad \mathrm{d}t'/\mathrm{d}u = -\alpha x,$$

da cui segue

$$A = x, \qquad B = -t/\sqrt{\alpha}, \qquad M = t, \qquad N = -\sqrt{\alpha}\,x\,.$$

Quindi

$$(54) \qquad x' = x\cdot\cosh(\sqrt{\alpha}\ u) - (t/\sqrt{\alpha})\cdot\operatorname{senh}(\sqrt{\alpha}\ u),$$

$$(55) \qquad t' = t\cdot\cosh(\sqrt{\alpha}\ u) - \sqrt{\alpha}\ x\cdot\operatorname{senh}(\sqrt{\alpha}\ u)\,.$$

Consideriamo il punto O, origine del sistema Ox, per il quale si ha quindi $x = 0$. Facendo il rapporto tra la (54) e la (55) si vede subito che x'/t' rappresenta la velocità $-v$ con la quale il punto O si allontana da O'. Per conseguenza

$$(56) \qquad -v = -(1/\sqrt{\alpha})\cdot\operatorname{tgh}(\sqrt{\alpha}\ u)$$

da cui

$$\operatorname{tgh}(\sqrt{\alpha}\, u) = \sqrt{\alpha}\, v, \quad \cosh(\sqrt{\alpha}\, u) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha v^2}}, \quad \operatorname{senh}(\sqrt{\alpha}\, v) = \frac{\sqrt{\alpha}\, v}{\sqrt{1-\alpha v^2}},$$

ed infine:

$$(57) \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\alpha v^2}}, \qquad (58) \qquad t' = \frac{1 - \alpha v x}{\sqrt{1-\alpha v^2}}.$$

Se si pone $\alpha = 1/c^2$ si ottiene infine:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}, \qquad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}.$$

Nel ragionamento fatto si poteva supporre α uguale ad una costante negativa e diversa da zero in valore assoluto, ottenendo:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1+(v^2/c^2)}}, \qquad t' = \frac{t + (v/c^2)x}{\sqrt{1+(v^2/c^2)}}.$$

Abbiamo così riottenuto con un metodo diverso le equazioni di IGNATOWSKI (45).

Recentemente (46) è stato messo in dubbio che le trasformazioni di LORENTZ costituiscano un gruppo. Se questo fosse vero o anche avesse una qualche

---

(45) È ovvio che, ponendo $\alpha = 0$, si ricadrebbe nelle trasformazioni galileiane.

FRANK e ROTHE deducono, dall'ammissione fondamentale della proprietà gruppale, anche le seguenti equazioni:

$$(1^*) \qquad x' = x - vt, \qquad (2^*) \qquad t = \{1 - (v/c)\}\, t.$$

Queste sono da essi denominate traformazioni di DOPPLER.

Il significato fisico di queste (in un universo fittizio, ben inteso!) sarebbe il seguente. Si supponga che nel sistema Ox un segnale luminoso si propaghi con velocità costante c in entrambe le direzioni. Allora nel sistema $O'x'$ si avrebbe ancora c nella direzione positiva, mentre si avrebbe $c.(c+v)/(c-v)$ nella direzione negativa. Gli orologi del sistema $O'x'$ rallenterebbero, giudicati dall'osservatore K, mentre gli orologi del sistema Ox apparirebbero marciare con ritmo accelerato all'osservatore K'. Non vi è contrazione dei corpi rigidi in moto.

Sebbene le relazioni (1*) e (2*) costituiscano un gruppo, tuttavia esse non si conformano al principio di relatività, poichè esse implicitamente esprimono una dissimetria tra i due sistemi Ox ed $O'x'$ che a tale principio ripugna.

(46) V. LALAN: *Les transformations de Lorentz forment-elles un groupe?* Ann. Phisique (12) **8** (1953), 653-661; *Sur les postulats qui sont à la base des cinématiques,* Bull. Soc. Math. France **65** (1937), 83-99 (cfr. p. 94).

probabilità, è evidente che sarebbe addirittura assurdo assumere la gruppalità come punto di partenza per la deduzione di esse ([47]). Riteniamo perciò utile occuparci di questo dissenso.

L'articolo di LALAN incomincia in questo modo: « La nozione matematica di gruppo occupa un posto ristretto nella fisica. Molti dei fisici effettivamente non la conoscono che per il gruppo di LORENTZ ».

Il titolo dell'articolo ha una forma interrogativa: « Le trasformazioni di LORENTZ costituiscono un gruppo? »

Di fronte alla solidità degli argomenti che sostengono la risposta affermativa, è chiaro che la risposta negativa non può giustificarsi che in un modo solo: definendo le trasformazioni in modo diverso, anche se non molto diverso.

Effettivamente LALAN riconosce che nel caso unidimensionale la risposta al quesito è senza alcun dubbio affermativa. Quando poi si passa al caso tridimensionale tutto dipende dal significato che annettiamo alla locuzione: trasformazioni di LORENTZ.

LALAN riconosce che, quando definiamo le trasformazioni di LORENTZ come quelle trasformazioni che rispettano l'invarianza della forma quadratica $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$, la cosa è vera.

Ma questa definizione sembra al LALAN troppo lata. Effettivamente, accettandola, bisognerebbe dire che anche le trasformazioni puramente spaziali, consistenti in una semplice rotazione dei triedri $Oxyz$ ovvero $O'x'y'z'$, sarebbero trasformazioni di LORENTZ. Sembra molto più conveniente, così almeno pensa il LALAN, riservare il nome trasformazioni di LORENTZ a quelle trasformazioni che implicano una operazione cinematica.

Quando si accetta questo criterio, allora la gruppalità non sussiste più. Per vederlo meglio, riferiamoci per semplicità allo spazio a due dimensioni. Consideriamo cioè i due sistemi Oxy ed $O'x'y'$, mobili l'uno rispetto all'altro con velocità relativa v. Ammettiamo che le origini coincidano quando gli orologi ivi collocati segnano entrambi zero.

Secondo LALAN, le trasformazioni di LORENTZ sono le relazioni che si hanno tra le variabili x, y, t ed x', y', t' quando l'orientazione della velocità relativa è identica rispetto ai due osservatori.

Ossia, se, rispetto a K, il sistema $O'x'y'$ si muove con velocità v e questa forma con gli assi Ox ed Oy gli angoli α e β, parimenti per l'osservatore K' il sistema Oxy si muove con velocità $-v$ e la direzione della velocità forma con gli assi $O'x'$ ed $O'y'$ gli angoli α' e β', essendo $\alpha' = -\alpha$ e $\beta' = -\beta$.

Se si accetta questa definizione restrittiva è facile vedere che trasforma-

---

([47]) La validità del principio di relatività implica che le trasformazioni spazio-temporali costituiscono un gruppo, ma non vale il reciproco.

zioni così fatte non costituiscono un gruppo. Consideriamo, infatti, un sistema che si muove rispetto al sistema Oxy con velocità v e disposto nel modo solito (ossia con l'asse $O'x'$ scorrevole sull'asse Ox). Valgono allora le trasformazioni speciali di LORENTZ

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}, \qquad y' = y, \qquad t' = \frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}. \tag{58}$$

Ciò posto, sia dato un altro sistema $O''x''y''$ mobile rispetto al sistema $O'x'y'$ con velocità u, ed in modo tale che l'asse $O''y''$ scorra sull'asse $O'y'$. Ne consegue allora:

$$x'' = x', \qquad y'' = \frac{y' - ut'}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}, \qquad t'' = \frac{t'-(u/c^2)y'}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}. \tag{58'}$$

Sostituendo in queste i valori forniti dalle (58) si ottiene:

$$\left\{\begin{aligned} x'' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}, \qquad y'' = \frac{y - u.\{t-(v/c^2)x\}/\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}, \\ t'' &= \frac{t-(v/c^2)x-(u/c^2)\sqrt{1-(v^2/c^2)}\,y}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}\ \sqrt{1-(u^2/c^2)}}. \end{aligned}\right. \tag{58''}$$

È facile vedere che, accettando la definizione sopra data, le relazioni che vincolano le variabili x'', y'' t'' alle variabili x, y, t ora trovate non possono essere considerate trasformazioni di LORENTZ. Ed infatti la velocità di O rispetto a K' ammette per componenti

$$-v\cdot\sqrt{1-(u^2/c^2)}, \qquad -u. \tag{59}$$

La velocità di O' rispetto a K ammette per componenti

$$v, \qquad u\sqrt{1-(v^2/c^2)}. \tag{60}$$

Queste non si identificano con le precedenti, neppure cambiandole di segno. Però il valore assoluto della velocità relativa è identico in entrambi i casi.

Tutto questo è vero, e si potrebbe conseguire una ulteriore chiarificazione con altri procedimenti di calcolo ([48]).

Ma non riteniamo opportuno entrare in tali dettagli. Possiamo facilmente concedere che, accettando la definizione restrittiva sopra data, le trasformazioni di LORENTZ non costituiscono un gruppo.

Ma questa concessione non equivale a riconoscere che in tutto quello che precede vi sia molto o qualche cosa di costruttivo. Per giungere a questo riconoscimento bisognerebbe indicare le ragioni che suggeriscono l'opportunità della nuova definizione.

È chiaro infatti che generalmente, quando una data classe di trasformazioni costituiscono un gruppo, questa proprietà si perde se restringiamo la classe. Ad esempio, anche nel caso delle trasformazioni speciali di LORENTZ, cioè le (58), se si convenisse di restringere la classe, convenendo di includervi solo quegli elementi in cui il parametro v varia tra 0 e $c/2$, non avremo più un gruppo.

Per conseguire un risultato di questo genere non occorre davvero una grande sottigliezza d'ingegno. Non si vede quindi che cosa si possa guadagnare con la proposta innovazione.

Senza dubbio nella definizione consueta di trasformazioni di LORENTZ (nel caso più generale) sono incluse anche trasformazioni puramente spaziali, le quali ben poco hanno a che vedere con operazioni cinematiche.

Se però si volesse semplicemente escludere trasformazioni puramente spaziali, basterebbe definire come trasformazioni di LORENTZ quelle che fanno passare da un triedro di riferimento ad un altro mobile con velocità costante, qualunque sia l'orientamento degli assi mobili rispetto al vettore velocità.

Se poi si vuole la semplicità a qualunque costo, allora è più conveniente orientare gli assi come si fa comunemente, limitandoci alle trasformazioni speciali di LORENTZ.

Ma c'è una grave ragione che milita piuttosto contro che in favore della proposta innovazione. È vero che la gruppalità non è un requisito essenziale

---

([48]) Affinchè le relazioni sussistenti tra le coordinate spazio-temporali dei sistemi Oxy ed $O''x''y''$ possano essere considerate trasformazioni di LORENTZ (nell'accezione di LALAN), bisognerebbe rotare il sistema $O''x''y''$ di un angolo φ di cui egli calcola il valore.

Questa cosa però era nota da molto tempo. Di un problema identico a questo si era già occupato (senza per questo volere cambiare la definizione di trasformazioni di LORENTZ) L. H. THOMAS: *The kinematics of an electron with an axis*, Philos. Mag. (7) **3** (1927), 1-22. Un sunto di questo articolo si può trovare nel recente trattato di C. MOLLER: **The theory of relativity**, Oxford 1952 (cfr. pp. 53-56).

Per le trasformazioni di LORENTZ nel caso più generale e per la conseguente espressione vettoriale si può consultare utilmente anche J. FRENKEL, **Lehrbuch der Elektrodynamik**, Bd. I: **Allegemeine Mechanik der Elektrizität**, J. Springer, Berlin 1926 (cfr. pp. 286-288).

perchè una certa classe di trasformazioni possano essere utili in fisica o in matematica. E chi lo nega? Ad esempio, per servirci dell'esempio di LALAN stesso, le trasformazioni per raggi vettori reciproci non formano un gruppo, eppure esse sono utili in fisica-matematica.

Ci permettiamo però di segnalare che in fisica si impone spesso la necessità di accertare se date equazioni sono invarianti per trasformazioni di LORENTZ. È anzi questa una questione di grande interesse. Ma in ordine a questo scopo la gruppalità è una proprietà molto comoda. Quando infatti le trasformazioni costituiscono un gruppo, basta dimostrare l'invarianza rispetto alla trasformazione infinitesima, il che può essere in taluni casi molto più facile a conseguire (49).

Tuttavia, sebbene non siamo affatto convinti della opportunità dell'innovazione, resta il fatto che è possibile, restringendo alquanto la classe, fare sì che le trasformazioni di LORENTZ non costituiscano più un gruppo.

Come può questo accordarsi con il principio di relatività? Abbiamo infatti dianzi asserito che dal principio di relatività consegue che le trasformazioni spazio-temporali legittime devono costituire un gruppo, sebbene non sia vero il contrario.

Per chiarire questo dubbio, riferiamoci a sistemi piani, come abbiamo fatto dianzi. Il principio di relatività richiede che, se il sistema $O''x''y''$ si muove allo stesso modo rispetto ai due sistemi Oxy ed $O'x'y'$, le trasformazioni che fanno passare dalle variabili x, y, t alle variabili x'', y'', t'', ovvero dalle variabili x', y', t' alle variabili x'', y'', t'', devono avere la stessa struttura. Ma il principio non dice che quando facciamo delle restrizioni circa il moto di $O''x''y''$ rispetto al sistema $O'x'y'$, o circa il moto di $O'x'y'$ rispetto al sistema Oxy, queste restrizioni si mantengono quando consideriamo il moto del sistema $O''x''y''$ rispetto al sistema Oxy.

Però gli studi di LALAN possono mostrare che, essendo possibile senza gravi inconvenienti definire le trasformazioni di LORENTZ in modo che queste non costituiscano un gruppo, non è forse molto saggio volere assumere questa proprietà come punto di partenza per la deduzione di esse.

Se la gruppalità si considera come conseguenza del principio di relatività, allora è molto più conveniente prendere le mosse direttamente da questo principio per stabilire le trasformazioni spazio-temporali legittime, come abbiamo fatto nel § **4**. Ma se poi si considera la gruppalità come proprietà a se stante, non ci sono ragioni fisiche che la rendano particolarmente raccomandabile.

---

(49) Vedasi, ad esempio, E. PERSICO, **Fondamenti di Meccanica atomica**, N. Zanichelli, Bologna 1936 (cfr. pp. 444-447).

§ 11. – Le trasformazioni di Lorentz dedotte dalle leggi fondamentali della dinamica.

Tra gli oppositori della relatività si devono annoverare taluni che di essa hanno respinto solo la cinematica, pur accettandone la dinamica (50). Non vogliamo qui discutere questa opinione, poichè la discussione ci condurrebbe troppo lontano. Ci limiteremo a mostrare che questa opinione è assolutamente insostenibile qualora si ammetta il principio di relatività, al quale per lo più i partigiani di questa opinione dicono di volere aderire. Infatti dal principio di relatività e dalla legge fondamentale della dinamica è possibile dedurre logicamente le trasformazioni di Lorentz, poichè solo rispetto a queste (e non rispetto a quelle di Galileo) la legge fondamentale della dinamica relativistica si comporta come invariante.

Bisogna però segnalare che la legge della dinamica implica anche le forze, e queste si trasformano in modo piuttosto complicato quando si passa da un sistema di riferimento ad un altro (51). Ma questa difficoltà non sussiste nel caso unidimensionale e di questo precisamente ci vogliamo occupare (51).

Nel caso unidimensionale la legge fondamentale della dinamica del punto, con riferimento al sistema Ox, si può porre in questa forma:

$$\frac{m_0}{[1-(1/c^2)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2]^{3/2}}\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F\,. \tag{61}$$

Se ammettiamo il principio di relatività deve essere parimenti, nel sistema mobile,

$$\frac{m_0}{[1-(1/c^2)(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t')^2]^{3/2}}\,\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'^2}=F'\,. \tag{62}$$

Poniamo:

$$x=ax'+bt', \qquad t=px'+qt'\,. \tag{63}$$

I coefficienti a, b, p, q sono funzioni indeterminate della velocità. Per quanto abbiamo detto nel § 4 valgono le relazioni $q=a$, $b=av$. Queste sono sem-

---

(50) Questa opinione si spiega, ma non si giustifica, mediante ragioni di carattere psicologico. Effettivamente i postulati della cinematica classica apparvero a moltissimi come necessari ed evidenti, quindi assolutamente irreformabili (ad es., il postulato galileiano della composizione delle velocità); mentre i principi della dinamica classica erano riguardati comunemente come esprimenti dati di osservazione.

(51) Vedasi: R. C. Tolman, **Relativity, thermodynamics and cosmology**, Clarendon Press, Oxford 1934 (cfr. p. 46).

plici espressioni del fatto che la velocità relativa dei due sistemi è v. Per conseguenza le (63) si riducono alle seguenti:

$$x = ax' + avt', \qquad t = px' + at'. \tag{64}$$

Differenziando e dividendo abbiamo:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{a.(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t') + av}{p.(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t') + a}, \tag{65}$$

e differenziando ulteriormente:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{(a^2 - apv)(\mathrm{d}^2x'/\mathrm{d}t'^2)}{[p.(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t') + a]^3}. \tag{66}$$

Sostituendo nella (61) otteniamo:

$$\frac{m_0.(a^2 - apv)(\mathrm{d}^2x'/\mathrm{d}t'^2)}{\{1 - (1/c^2)[\{a.(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t') + av\}/\{p.(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t') + a\}]^2\}^{3/2}\{p.(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t') + a\}^3} = F,$$

ovvero, semplificando il denominatore,

$$\frac{m_0.(a^2 - apv)(\mathrm{d}^2x'/\mathrm{d}t'^2)}{\{(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t')^2[p^2 - (a^2/c^2)] + 2(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t')[ap - (a^2v/c^2)] + a^2 - (a^2v^2/c^2)\}^{3/2}} = F; \tag{67}$$

perchè questa si riduca alla (62) occorre fare sparire al denominatore il termine contenente $\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$, il che ci obbliga a porre:

$$p = av/c^2; \tag{68}$$

con ciò l'equazione (67) diventa (dopo congrue semplificazioni):

$$\frac{m_0}{a(1 - \beta^2)^{1/2}[1 - (1/c^2)(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t')^2]^{3/2}} = F, \tag{67'}$$

la quale si identifica con la (62) ponendo:

$$a\sqrt{1 - \beta^2} = 1, \qquad F = F', \tag{69}$$

da cui

$$(70)\qquad \begin{cases} a = 1/\sqrt{1-\beta^2}, & b = v/\sqrt{1-\beta^2} \\ p = (v^2/c^2)/\sqrt{1-\beta^2}, & q = 1/\sqrt{1-\beta^2}. \end{cases}$$

Si sono riottenute cioè le trasformazioni di Lorentz.

Questa dimostrazione può apparire alquanto imperfetta, poichè le posizioni (69) e (70) non sono le uniche che salvano l'invarianza della (61). Si potrebbe anche porre:

$$(71)\qquad a = 1, \qquad\qquad (72)\qquad F\sqrt{1-\beta^2} = F'.$$

In questo modo però si otterebbero trasformazioni cinematiche che non costituiscono un gruppo, ciò che ripugna al principio di relatività. Sappiamo inoltre dal § 4 che le trasformazioni spazio-temporali legittime devono avere la forma espressa dalle (19) e (20), col quale risultato le posizioni (71) e (72) sono manifestamente incompatibili.

§ 12. – Conclusioni comparative. Sulla possibilità di un superamento delle trasformazioni di Lorentz.

Giunti alla fine di questa esposizione si presenta molto naturale la richiesta di una valutazione comparativa delle varie vie che si possono percorrere per giungere alle trasformazioni di Lorentz (52).

A noi sembra che una preferenza troppo esclusiva verso l'una o l'altra dimostrazione non sia da approvarsi. Al contrario pensiamo che ciascuna via sia preferibile quando si vogliano mettere in risalto speciali aspetti della questione.

Per quanto concerne il procedimento originario di Einstein non si potrebbe sostenere con sicurezza che sia il migliore, ma è certo peraltro che nulla di serio si può obbiettare contro di esso. Se qualcuno pensa diversamente, le obbiezioni non possono poggiare altro che su malintesi (53).

---

(52) Non pretendiamo che l'esposizione sia completa, tuttavia abbiamo segnalato i procedimenti più notevoli. Ci siamo astenuti dal riportare il procedimento di Milne, sebbene lo riteniamo molto originale ed interessante, per le ragioni dette nell'introduzione.

(53) Qualche dubbio a questo riguardo è stato espresso anche recentemente, ma non suffragato da seri motivi.

Crediamo tuttavia che in un trattato generale di relatività, esposto il metodo tradizionale, convenga integrarlo con una sommaria esposizione dei metodi esposti nei §§ **4**, **5**. Il primo di questi ha il grandissimo vantaggio di mettere nel massimo risalto il principio di relatività. Sebbene questo non sia sufficiente, come abbiamo visto, per determinare le trasformazioni spazio-temporali in modo univoco, tuttavia restano poche alternative.

Per chi ammette il principio di relatività in tutta la sua estensione è impossibile evadere la conclusione che le trasformazioni di LORENTZ siano vere. Al più può restare oscura la relazione che esiste tra la costante caratteristica delle trasformazioni ottenute e la velocità della luce.

Non bisogna poi dimenticare che le trasformazioni di LORENTZ potrebbero essere vere pur non essendo valido in generale il principio di relatività. Ma se questo fosse il caso diminuirebbe enormemente l'importanza di esse.

La dimostrazione che abbiamo chiamato induttiva, sebbene sia particolarmente raccomandabile a chi aderisce al punto di vista lorentziano, è nondimeno sostanzialmente legittima. Essa ha poi il vantaggio innegabile di mostrare nel modo più convincente l'insussistenza dei cosiddetti paradossi della cinematica relativistica.

Le precedenti considerazioni presuppongono che le trasformazioni di LORENTZ siano vere. Si può muovere qualche ragionevole obiezione contro tale presupposizione?

A questo riguardo occorre qualche precisazione preliminare. Parlando di possibile revisione, non si vuole affatto prendere in seria considerazione la possibilità di fare dei passi indietro. L'impossibilità di un ritorno puro e semplice alle trasformazioni di GALILEO è dimostrata in modo esauriente. Ma qualcuno potrebbe porre la questione in modo alquanto diverso.

Non sarebbe lecito pensare che le trasformazioni di LORENTZ siano semplici approssimazioni di equazioni ancora ignote?

Così prospettata la questione non è indegna di considerazione, specialmente se si tiene presente l'opinione oggi più comune circa la certezza delle leggi di natura. Occorre però un'ulteriore precisazione.

Il compito di generalizzare le trasformazioni di LORENTZ così da includere anche i moti vari non è affatto nuovo. Ma questo compito appartiene alla relatività generale. Non è di questo che vogliamo occuparci.

La domanda si può formulare così: Sempre restando nei sistemi inerziali, è possibile riguardare le trasformazioni di LORENTZ come una semplice approssimazione?

Se la risposta fosse positiva sembrerebbe senz'altro conveniente iniziarne la revisione, per facilitare la soluzione di importantissimi problemi posti all'ordine del giorno.

Ed infatti, quando oggi si vuole giudicare la plausibilità di una data teoria (anche quantistica), si suole richiedere tra l'altro che essa sia invariante per trasformazioni di LORENTZ. Ne facciamo una « conditio sine qua non » per l'accettazione anche provvisoria della teoria in discussione. Ora è chiaro che, se le trasformazioni di LORENTZ dovessero essere sostituite, le nuove leggi, di cui si vuole discutere la plausibilità, dovrebbero essere invarianti rispetto alle nuove trasformazioni cinematiche. Nessuno può escludere che questa nuova invarianza sia più facilmente ostensibile.

La questione posta è quindi, in linea di principio, certo ragionevole. Eppure una risposta positiva è molto meno naturale di quanto apparisca a prima vista. Il che è confermato dallo scarsissimo numero di tentativi del genere [54].

Una revisione delle trasformazioni di LORENTZ è inseparabile da un revisione dei principi dai quali esse sono dedotte.

Dal complesso della precedente esposizione emerge chiaramente che, anche se vogliamo permetterci qualche critica al principio della costanza della velocità della luce, ammesso il principio di relatività, le trasformazioni di LORENTZ sono ineluttabili.

Ma allora è possibile gettare qualche ombra di dubbio sul principio di relatività? A noi non sembra.

Sebbene da un punto di vista puramente logico non vi sia nulla in contrario, tuttavia la posizione di questo principio rispetto alla quasi totalità delle altre leggi di natura è addirittura eccezionale. Esso è assimilabile ai due principi fondamentali dalla termodinamica.

Questa associazione è perfettamente giustificata sia dal punto di vista della forma sia dal punto di vista della certezza. Come i principi della termodinamica asseriscono l'impossibilità di qualche cosa — precisamente la realizzazione del « perpetuum mobile » di prima e di seconda specie — così pure il principio di relatività asserisce l'impossibilità di rivelare il moto assoluto, qualunque sia l'espediente che l'umana sottigliezza potrebbe a tale scopo escogitare.

Tanto il principio di relatività quanto i principi della termodinamica sono certi in quanto la totalità delle esperienze finora eseguite è ad essi favorevole.

Per la forma con cui essi sono enunciati è impossibile riguardarli come approssimazione di proposizioni ancora da trovare. O essi continueranno a valere o crolleranno del tutto. Non può esistere alcuna similitudine tra possibilità

---

[54] Un tentativo molto interessante è dovuto al compianto Prof. L. FANTAPPIÈ: *Su una nuova teoria di « relatività finale »*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **17** (1954), 158-165; cfr. anche G. ARCIDIACONO: *Sull'importanza del « gruppo base » nel problema della unificazione dei campi fisici*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **18** (1955), 386-391.

ed impossibilità. Poco importa che la possibilità negata da tali principi possa essere conseguita più o meno facilmente.

Con questo non vogliamo dire che al principio di relatività, come pure ai principi della termodinamica, competa una certezza assoluta di carattere logico. Ma nessun fisico al momento presente è disposto a prendere in seria considerazione una revisione di essi. E di questo occorre tenere conto.

Per conseguenza, se vogliamo sostituire le trasformazioni di LORENTZ con qualche cosa di diverso, non possiamo non fare i conti col principio di relatività. Bisogna dichiarare francamente se si vuole conservarlo o abbandonarlo. Bisogna assumere le proprie responsabilità.

Volendo conservarlo e nello stesso tempo sostituire le trasformazioni di LORENTZ, si dovrebbe sottoporre a critica il procedimento esposto nel § **4**. Se il ragionamento riportato è esatto, si vede subito che esso non tollera altre alternative.

Salvo meliori iudicio, a noi non sembra che sia possibile conservare il principio di relatività e nello stesso tempo sostituire le trasformazioni di LORENTZ con qualche cosa di meglio.