

MARCO CUGIANI (*)

**Variazioni di segno condizionate,
tratto ridotto e teorema di Fabry-Pólya. (**)**

§ 1. - Introduzione.

Il nostro lavoro è rivolto allo studio delle singolarità di una funzione analitica $w = w(z)$, rappresentata, per $|z| < 1$, dalla serie di potenze

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

il cui raggio di convergenza supporremo uguale ad 1, ipotesi quest'ultima equivalente alla condizione

$$(2) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

È ben noto come questa condizione sia sufficiente a garantire l'esistenza di una singolarità della w sulla circonferenza $|z| = 1$.

Più precise informazioni circa la posizione di una singolarità della w si possono eventualmente dedurre da un più accurato esame dei coefficienti della (1). È superfluo ricordare classiche proposizioni, dal teorema di VIVANTI-

(*) Indirizzo: Istituto Matematico F. ENRIQUES, Università, Via C. Saldini 50, Milano, Italia.

(**) Ricevuto il 22-5-1957.

PRINGSHEIM al primo teorema di FABRY ⁽¹⁾ che forniscono condizioni sufficienti, più o meno restrittive, per l'esistenza di una singolarità in $z = 1$.

Accanto a queste esistono altre proposizioni tendenti più in generale a garantire l'esistenza di una singolarità della w sopra un arco della circonferenza $|z| = 1$, simmetrico rispetto al punto $z = 1$, di ampiezza opportunamente limitata, e fra esse ricordiamo in primo luogo quello che chiameremo il secondo teorema di FABRY ⁽²⁾.

Fondamentale in questo ordine d'idee è il teorema di PÓLYA ⁽³⁾, di cui riteniamo di dovere riportare per esteso l'enunciato, visto l'importanza che esso riveste ai fini della nostra esposizione.

Crediamo opportuno richiamare previamente, in modo succinto, una certa terminologia relativa alla densità delle successioni, che ci servirà anche nel seguito e che ricorre già nell'enunciato di questo teorema. Data una successione crescente di numeri positivi

$$\{s_k\} \qquad s_1, s_2, \dots, s_k, \dots,$$

tali che $s_n - s_{n-1} > l$ (l fisso, > 0), indichiamo con $N(r)$ il numero dei termini della $\{s_k\}$ che non superano un assegnato numero reale r . Se esiste finito il limite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{r},$$

ed è uguale a D , diremo che $\{s_k\}$ è *misurabile* di densità D .

In ogni caso esisterà $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \{N(r)/r\} = D^+$ che chiameremo la *densità superiore* di $\{s_k\}$, e più in generale esisterà, per ogni numero fisso ξ reale e con $0 \leq \xi < 1$,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r) - N(r\xi)}{r \cdot (1 - \xi)} = D(\xi).$$

⁽¹⁾ Per una veduta globale su questo ordine di questioni si rinvia il lettore a « L. BIEBERBACH, **Analytische Fortsetzung**, *Ergebn. d. Math.*, Bd. 3, J. Springer, Berlin 1955 », opera che si presta inoltre per una ampia informazione bibliografica. Interessano più specialmente la nostra questione i §§ 1, 2. Quello che noi abbiamo chiamato il primo teorema di FABRY figura in tale opera sotto la sigla (2, 1, II), pag. 44.

⁽²⁾ Si veda: L. BIEBERBACH, op. cit. in ⁽¹⁾, teorema (2, 1, I), pag. 43.

⁽³⁾ Si veda: L. BIEBERBACH, op. cit. in ⁽¹⁾, teorema (2, 1, III), pag. 51.

Si può inoltre dimostrare che esiste il limite

$$\lim_{\xi \rightarrow 1^-} D(\xi) = D(1);$$

ed al valore $D(1)$ si attribuisce il nome di *densità massima* della $\{s_k\}$. Risulta:

$$0 \leq D^+ = D(0) \leq D(\xi) \leq D(1),$$

relazioni dalle quali non si deve però dedurre l'erronea impressione che $D(\xi)$ sia in generale una funzione monotona di ξ .

È chiaro poi che se esiste il limite D risulterà:

$$D = D(0) = D^+ = D(\xi) = D(1).$$

Chiudiamo questo breve cenno ricordando che la densità massima si può anche identificare con la densità di quelle successioni misurabili che hanno la minima densità possibile e che ammettono la $\{s_k\}$ come sotto successione (4).

Passiamo dunque a enunciare il

Teorema di PÓLYA. « Data la funzione w e la relativa serie (1) colla condizione (2), se è possibile determinare:

- 1°) una successione crescente $\{n_n\}$ di indici,
- 2°) una successione $\{\beta_n\}$ di numeri reali,
- 3°) un numero reale $\theta > 0$,

tali che siano soddisfatte le condizioni:

$$(a) \quad \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h}) > 0, \quad \left\{ \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h}) \right\}^{1/n_h} \rightarrow 1 \quad \text{per} \quad h \rightarrow \infty;$$

(b) considerata, per ciascun intervallo $I_h \equiv (n_h \cdot (1 - \theta), n_h \cdot (1 + \theta))$, la successione (finita) di numeri reali

$$(3) \quad \operatorname{Re}(a_m \cdot e^{i\beta_h}), \quad m \in I_h,$$

(4) Sulle densità delle successioni si veda: G. PÓLYA, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen*, Math. Z. **29** (1929), 549-640 (cfr. Capitolo I).

la totalità degli interi m (appartenenti ai vari I_h), tali che i corrispondenti $\operatorname{Re}(a_m \cdot e^{i\beta_h})$ introducano variazioni di segno⁽⁵⁾ della relativa successione (3), costituisca una successione di densità massimale Δ ;

allora la w ammette una singolarità sull'arco:

$$|z| = 1, \quad -\pi \Delta \leq \arg z \leq \pi \Delta . »$$

Desideriamo far rilevare dall'enunciato di questo teorema la circostanza, presentata in generale dalle proposizioni di questo tipo, le quali impegnano nelle ipotesi il comportamento della successione $\{a_n\}$ in tratti di ampiezza relativa non infinitesima; tale circostanza si ripresenta in modo perfettamente analogo nei ricordati teoremi di FABRY, che del resto possono essere riguardati come casi particolari del teorema di PÓLYA. Verò è che l'ampiezza dei tratti I_h su cui si fanno ipotesi è misurata da un numero reale θ , il quale può essere impicciolito a piacer nostro, nel senso che se le ipotesi valgono per un certo θ , valgono anche (e a maggior ragione) per ogni θ più piccolo del precedente; è tuttavia essenziale che il numero θ sia una costante prefissata.

Recentemente G. RICCI⁽⁶⁾ ha mostrato come si possa modificare il primo teorema di FABRY e giungere a garantire l'esistenza di una singolarità della w in $z = 1$ sulla base di condizioni che interessano, per quanto si riferisce alle variazioni di segno, solo tratti di ampiezza relativa infinitesima degli intervalli I_h ; per i tratti rimanenti di tali intervalli si pongono delle condizioni di tipo diverso che interessano invece i moduli dei coefficienti i cui indici appartengono a tali tratti⁽⁷⁾.

Noi ci siamo proposto come scopo di fare qualcosa di analogo nei riguardi del teorema di PÓLYA.

Per dare subito un'idea del tipo di risultati a cui siamo pervenuti, anticiperemo qui due teoremi, di formulazione abbastanza semplice ed espressiva, che otterremo poi come corollari di risultati più generali esposti nel § successivo,

⁽⁵⁾ Diremo, qui e nel seguito, che un elemento s_k di una successione $\{s_k\}$ introduce una variazione di segno di $\{s_k\}$ quando è il primo termine di una variazione di segno in $\{s_k\}$; quando cioè esiste un s_{k+m} ($m \geq 1$) tale che $s_{k+i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$), $s_k s_{k+m} < 0$.

⁽⁶⁾ Si veda: G. RICCI, *Variazioni di segno condizionate e teorema di Fabry*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **38** (1955), 1-31.

⁽⁷⁾ Su tale questione converrà vedere pure: G. RICCI, *Emisimmetria di tratti e teorema di Vivanti-Pringsheim-Hadamard-Fabry relativo ai punti critici*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **9** (1954), 126-135, ove si troveranno anche riferimenti ai lavori di F. LÖSCH e H. CLAUS che precedentemente affrontarono il problema del tratto ridotto nella questione affine della non prolungabilità delle serie di potenze.

dai quali ultimi, come vedremo, si potrà dedurre in particolare anche il teorema di PÓLYA.

E veniamo così a formulare i seguenti teoremi:

Teorema A. *Data la w e la relativa (1), colla condizione (2), se è possibile determinare due successioni $\{n_h\}$ e $\{\beta_h\}$ tali da soddisfare alla (a), ed un numero $\theta > 0$ in modo che inoltre:*

1°) *ricoperto l'intervallo $I_h^* \equiv (n_h - n_h^{3/4} \cdot \log^{4/3} n_h, n_h + n_h^{3/4} \cdot \log^{4/3} n_h)$ con tratti $J_r \equiv ((1 + n_h^{-3/4} \cdot \log n_h)^r n_h, (1 + n_h^{-3/4} \cdot \log n_h)^{r+1} n_h)$, essendo r intero ≥ 0 , di ampiezza $j_r = (1 + n_h^{-3/4} \cdot \log n_h)^r \cdot n_h^{1/4} \cdot \log n_h$, il numero $N_{h,r}$, degli interi $m \in J_r$, tali che il corrispondente termine della successione*

$$(3') \quad \operatorname{Re}(a_m \cdot e^{i\beta_h}), \quad m \in I_h^*$$

introduce una variazione di segno della (3'), soddisfi alla limitazione $N_{h,r} \leq \{\Delta + (n_h^{-1} \cdot \log n_h)^{1/4}\} j_r$;

2°) *per i valori di m che cadono nei tratti laterali $I_h' \equiv ((1 - \theta)n_h, n_h - n_h^{3/4} \cdot \log^{4/3} n_h)$, $I_h'' \equiv (n_h + n_h^{3/4} \cdot \log^{4/3} n_h, (1 + \theta)n_h)$ risulti*

$$|\operatorname{Re}(a_m \cdot e^{i\beta_h})| \leq \exp\{n_h^{1/2} \cdot (\log^{8/3} n_h)/2\} \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h});$$

allora la $w(z)$ possiede un punto singolare sull'arco:

$$|z| = 1, \quad -\pi\Delta \leq \arg z \leq \pi\Delta.$$

Teorema B. *Data la w e la relativa (1), colla condizione (2), si possano determinare le successioni $\{n_h\}$ e $\{\beta_h\}$ in modo da soddisfare la (a) e un numero $\theta > 0$ tali che inoltre:*

1°) *ricoperto l'intervallo $I_h^* \equiv (n_h - n_h^{7/8} \cdot \log^{4/3} n_h, n_h + n_h^{7/8} \cdot \log^{4/3} n_h)$ con tratti $J_r \equiv ((1 + n_h^{-3/8} \cdot \log n_h)^r n_h, (1 + n_h^{-3/8} \cdot \log n_h)^{r+1} n_h)$, essendo r intero ≥ 0 , di ampiezza $j_r = (1 + n_h^{-3/8} \cdot \log n_h)^r \cdot n_h^{5/8} \cdot \log n_h$, il numero delle variazioni di segno della successione*

$$(3') \quad \operatorname{Re}(a_m \cdot e^{i\beta_h}), \quad m \in I_h^*$$

introdotte da termini corrispondenti a valori $m \in J_r$, non superiori $\{\Delta + (n_h^{-1/2} \cdot \log n_h)^{1/4}\} j_r$;

2°) per i valori di m che cadono nei tratti laterali $I'_h \equiv ((1 - \theta)n_h, n_h - n_h^{7/8} \cdot \log^{4/3} n_h)$, $I''_h \equiv (n_h + n_h^{7/8} \cdot \log^{4/3} n_h, (1 + \theta)n_h)$ risulti:

$$|\operatorname{Re}(a_m \cdot e^{i\beta_h})| \leq \exp\{n_h^{3/4} \cdot (\log^{5/3} n_h)/2\} \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h});$$

allora la $w(z)$ possiede una singolarità sull'arco:

$$|z| = 1, \quad -\pi\Delta \leq \arg z \leq \pi\Delta.$$

Si osservi in questi due teoremi una sorta di complementarità di condizioni.

Nel primo il tratto I_h^* è notevolmente più ristretto (ha l'ampiezza $2n_h^{3/4} \cdot \log^{4/3} n_h$) che nel secondo (dove ha l'ampiezza $2n_h^{7/8} \cdot \log^{4/3} n_h$), in compenso il Teorema A presenta condizioni molto più restrittive per quanto si riferisce:

all'ampiezza dei tratti parziali J_r da « esplorare », che è dell'ordine di $n^{1/4} \cdot \log n_h$ nel primo caso e dell'ordine di $n_h^{5/8} \cdot \log n_h$ nel secondo caso;

alla limitazione del rapporto tra numero di variazioni di segno in ogni tratto J_r e ampiezza j_r del tratto stesso, che non deve superare $\Delta + n_h^{-1/4} \cdot \log^{1/4} n_h$ nel primo caso e può spingersi fino a $\Delta + n_h^{-1/8} \cdot \log^{1/4} n_h$ nel secondo caso;

alla limitazione dei moduli nei tratti laterali I'_h, I''_h , evidentemente più vantaggiosa nel secondo caso che nel primo.

§ 2. - Risultati.

Nel seguito ci serviremo largamente del concetto di *variazioni di segno condizionate*, che noi desumiamo dal RICCI⁽⁸⁾ e che richiamiamo qui brevemente per comodità del lettore.

Data una successione $\{s_k\}$, finita o infinita, di numeri reali e una funzione $\psi(k)$, definita e non negativa per valori interi positivi di k , diremo che l'elemento s_r della successione introduce una variazione di segno della $\{s_k\}$, condizionata dalla ψ , o più brevemente una ψ -variazione di segno, se esiste un successivo elemento s_{r+m} ($m \geq 1$) per cui risulti:

$$\begin{aligned} |s_r| > \psi(r), & & |s_{r+i}| \leq \psi(r+i) & \quad (i = 1, 2, \dots, m-1), \\ |s_{r+m}| > \psi(r+m), & & s_r \cdot s_{r+m} < 0. \end{aligned}$$

(8) Si veda: G. RICCI, op. cit. in (6), cfr. pag. 2.

È chiaro che le variazioni di segno ordinarie si possono riguardare come ψ -variazioni, essendo ψ la funzione identicamente nulla, ed è chiaro inoltre che: se $\psi_1(k) \leq \psi_2(k)$ per ogni k , allora il numero delle ψ_2 -variazioni non è maggiore di quello delle ψ_1 -variazioni.

Ciò premesso, passiamo ad enunciare un lemma la cui dimostrazione costituirà il principale scopo del presente lavoro e da cui dedurremo come corollari varie proposizioni di più semplice formulazione e di più perspicuo contenuto, tra cui i teoremi A e B enunciati nel § precedente.

Lemma A. Sia assegnata una funzione $w(z)$, col relativo sviluppo (1), soddisfacente alla (2).

La $w(z)$ ha un punto singolare sull'arco

$$|z| = 1, \quad -\pi\Delta \leq \arg z \leq \pi\Delta$$

se è possibile determinare:

1°) una successione crescente $\{n_h\}$ di numeri interi positivi e una successione $\{\beta_h\}$ di numeri reali in modo che risulti

$$(a) \quad \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h}) > 0, \quad \left\{ \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h}) \right\}^{1/n_h} \rightarrow 1 \quad \text{per } h \rightarrow \infty;$$

2°) due successioni $\{\gamma_h\}$ ed $\{\varepsilon_h\}$, di numeri reali positivi decrescenti e tendenti a zero, e due costanti reali $\theta > 0$ e K in modo che

$$(a') \quad n_h \cdot \gamma_h^{1/3} \rightarrow \infty \quad \text{per } h \rightarrow \infty;$$

(b) ricoperto l'intervallo $I_h \equiv ((1 - \theta)n_h, (1 + \theta)n_h)$ con tratti $J_v \equiv ((1 + \gamma_h)^v n_h, (1 + \gamma_h)^{v+1} n_h)$ (essendo v intero ≥ 0) di ampiezza $j_v = (1 + \gamma_h)^v \gamma_h n_h$, e detto $N_{\psi_h, v}$ il numero delle ψ_h variazioni della successione

$$(3) \quad \operatorname{Re}(a_m \cdot e^{i\beta_h}), \quad m \in I_h,$$

introdotte da elementi corrispondenti a valori $m \in J_v$, risulti

$$N_{\psi_h, v} \leq (\Delta + \varepsilon_h)j_v,$$

dove la funzione $\psi_h(u)$ condizionatrice delle variazioni di segno è definita, per ogni u con $m = n \pm u$ (u intero, $0 \leq u \leq \theta n_h$) e in ciascun intervallo I_h , dalle relazioni (dove si è posto $\mu = u/n_h$):

$$\begin{cases} \psi(u) = 0 & \text{per } \mu < \sqrt{\gamma_h} \\ \psi_h(u) = \frac{K \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h})}{n_h} \cdot \exp\{n_h \cdot (\mu^2 - \Phi(\mu, \gamma_h, \varepsilon_h))\} & \text{per } \mu \geq \sqrt{\gamma_h}, \end{cases}$$

essendo

$$\Phi = \{ \gamma_h^{2/3} |\log \gamma_h|^{1/3} + \mu \cdot (6\varepsilon_h + (1/4)\gamma_h^{1/3}) \} \cdot |\log \gamma_h|.$$

Osserviamo subito che se le ipotesi del lemma sono soddisfatte per una certa successione $\{n_h\}$ esse sono certo soddisfatte per ogni sottosuccessione della $\{n_h\}$. Sarà dunque lecito, come ci occorrerà di fare nella dimostrazione, e come noi faremo senz'altro tacitamente, sopprimere un numero finito di termini, od anche un numero infinito di essi (si parlerà allora di *diradamento della successione*) purchè naturalmente la sottosuccessione residua sia ancora infinita.

Ciò premesso, passiamo ad illustrare alcuni corollari attraverso i quali riesca meglio chiarito il significato del nostro lemma.

In primo luogo vogliamo far vedere come da esso si deduca quasi immediatamente il teorema di PÓLYA.

Mettendoci nelle ipotesi di quest'ultimo possiamo senz'altro supporre fissata la successione degli I_h in modo che sia soddisfatta la (a).

Fissato un numero γ ($0 < \gamma \leq \theta$) e un indice h , possiamo ad essi associare l'estremo inferiore $\bar{\varepsilon}_h(\gamma)$ dei numeri ε tali che il numero $N_{h,\gamma}(y)$ delle variazioni di segno ordinarie in ogni intervallo $J \equiv (y, (1+\gamma)y)$ non superi $(\Delta + \varepsilon)\gamma y$.

Inoltre, per l'ipotesi che Δ sia la densità massimale delle variazioni, avremo:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \bar{\varepsilon}_h(\gamma) \leq 0, \quad \text{essendo } \gamma \text{ fisso.}$$

Fissata una qualunque successione decrescente $\{\gamma_s\}$ con $\gamma_s \rightarrow 0$ per $s \rightarrow \infty$, consideriamo la doppia successione

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1(\gamma_1), & \varepsilon_1(\gamma_2), & \varepsilon_1(\gamma_3), & \dots \\ \varepsilon_2(\gamma_1), & \varepsilon_2(\gamma_2), & \varepsilon_2(\gamma_3), & \dots \\ \varepsilon_3(\gamma_1), & \varepsilon_3(\gamma_2), & \varepsilon_3(\gamma_3), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

dove porremo $\varepsilon_h(\gamma_i) = \max(2\bar{\varepsilon}_h(\gamma_i), 1/h)$.

Sia h_1 il minimo intero positivo per cui $\gamma_1^{4/3} > 1/n_{h_1}$ e sia in generale h_s il minimo intero positivo per cui risultino soddisfatte le condizioni:

$$h_s > h_{s-1}, \quad \varepsilon_{h_s}(\gamma_s) < \min\{\varepsilon_{h_{s-1}}(\gamma_{s-1}), \gamma_s\}, \quad \gamma_s^{4/3} > s/n_{h_s}.$$

Diradiamo la successione $\{n_h\}$ fino a ridurla alla successione $\{n_{h_s}\}$ e associamo ad ogni n_{h_s} il relativo γ_s e il relativo ε_{h_s} . Chiamiamo poi $\{n_h\}$, $\{\gamma_h\}$, $\{\varepsilon_h\}$ le successioni così ottenute ed avremo: $\varepsilon_h < \varepsilon_{h-1}$, $\varepsilon_h < \gamma_h$, $\gamma_h^{4/3} n_h > h$, e quindi sarà la $\{\varepsilon_h\}$ decrescente e tendente a zero e sarà soddisfatta la (a').

Comunque fissiamo adesso $K > 0$, risulterà $\psi_h \geq 0$ e quindi il numero delle ψ_h -variazioni soddisferà a maggior ragione la condizione (b); il teorema di PÓLYA è così dimostrato.

Volendo passare adesso ad altre conseguenze del Lemma A, cominceremo coll'osservare che il lemma stesso assume una forma più espressiva se è possibile scegliere le successioni $\{\gamma_h\}$ ed $\{\varepsilon_h\}$ in guisa che risulti soddisfatta una relazione del tipo

$$(4) \quad \varepsilon_h = o(\gamma_h^{1/3}),$$

in tal caso infatti risulta:

$$\Phi(\mu, \gamma_h, \varepsilon_h) \leq O(\gamma_h^{2/3} \cdot |\log \gamma_h|^{4/3}) + (1/3) (\mu \gamma_h^{1/3} \cdot |\log \gamma_h|)$$

e perciò il fattore esponenziale della $\psi_h(u)$ assume valori dell'ordine di $\exp(cu^2/n_h)$ quando u sia abbastanza grande, per esempio quando $\mu = u/n_h$ soddisfi alla disuguaglianza

$$(5) \quad \mu \geq \gamma_h^{1/3} \cdot \log |\gamma_h|.$$

A conclusioni analoghe si potrebbe ovviamente anche giungere imponendo alla successione $\{\varepsilon_h\}$ e alla variabile u di soddisfare condizioni meno restrittive delle (4) e (5). Tuttavia noi qui, uniformandoci ad un principio che abbiamo seguito anche altrove nel presente lavoro, ci riferiremo a queste ultime come a condizioni semplici e dotate tuttavia di una generalità sufficiente ad illustrare casi particolari di un certo interesse.

Passiamo, su queste basi, a esporre un corollario del Lemma A, che fornisce appunto un criterio per l'esistenza di una singolarità su un certo arco, criterio che, secondo gli scopi dichiarati dalla nostra ricerca, impegna la distribuzione delle variazioni di segno solo in tratti di ampiezza relativa infinitesima, sosti-

tuendo nei tratti laterali residui, altre condizioni che riguardano invece i moduli dei coefficienti della (1). Si tratta precisamente del seguente

Teorema C. *Sia $w(z)$ una funzione analitica che ammette lo sviluppo (1) colla condizione (2).*

La $w(z)$ avrà un punto singolare sull'arco

$$|z| = 1, \quad -\pi\Delta \leq \arg z \leq \pi\Delta$$

se è possibile trovare le successioni $\{n_h\}$ crescente e $\{\beta_h\}$ in modo da soddisfare alla (a), ed in più due successioni $\{\gamma_h\}$, $\{\varepsilon_h\}$ decrescenti e tendenti a zero per $h \rightarrow \infty$, per cui risulti

$$(a') \quad \gamma_h^{4/3} n_h \rightarrow \infty, \quad (4) \quad \varepsilon_h = o(\gamma_h^{1/3}),$$

ed infine un numero reale $\theta > 0$, tali che inoltre:

1°) *ricoperto l'intervallo $I_h^* \equiv (n_h \cdot (1 + \gamma_h^{1/3} \cdot \log \gamma_h), n_h \cdot (1 - \gamma_h^{1/3} \cdot \log \gamma_h))$ con tratti parziali $J_v \equiv ((1 + \gamma_h)^v n_h, (1 + \gamma_h)^{v+1} n_h)$ di ampiezza $j_v = (1 + \gamma_h)^v \gamma_h n_h$ (v intero ≥ 0), il numero $N_{0,v}$ delle variazioni di segno ordinarie della successione*

$$(3') \quad \operatorname{Re}(a_m \cdot e^{i\beta_h}), \quad m \in I_h^*,$$

introdotte da elementi corrispondenti a valori $m \in J_v$, soddisfi alla limitazione $N_{0,v} \leq (\Delta + \varepsilon_h) j_v$;

2°) *i termini di indice m , con*

$$m \in I_h \equiv ((1 - \theta)n_h, (1 + \theta)n_h), \quad m \notin I_h^*,$$

siano tali da soddisfare alla limitazione

$$\operatorname{Re}(a_m \cdot e^{i\beta_h}) \leq \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h}) \cdot \exp\left\{(1/2)\gamma_h^{2/3} n_h \cdot \log^2 \gamma_h\right\}.$$

Questo teorema è una conseguenza immediata del Lemma A e delle considerazioni precedentemente svolte a proposito della (4) e della (5). Per chiarire meglio la cosa osserviamo che per la (a') risulterà $\gamma_h > n_h^{-3/4}$ e quindi, posto $\mu_h = -\gamma_h^{1/3} \cdot \log \gamma_h$, avremo

$$\mu_h > -(3/4)n_h^{-1/4} \cdot \log(1/n_h) = (3/4)n_h^{-1/4} \cdot \log n_h \quad (\text{almeno per } h \geq h_0).$$

Sarà dunque:

$$\psi_n(u) \geq 0 \quad \text{per } \mu < \mu_n,$$

$$\begin{aligned} \psi_n(u) = (K/n_n) \cdot \text{Re}(a_{n_n} \cdot e^{i\beta_n}) \cdot \exp\{n_n \cdot [\mu^2 - \gamma_n^{2/3} \cdot |\log \gamma_n|^{4/3} - \mu \cdot (6\varepsilon_n + \\ + (1/4)\gamma_n^{1/3} \cdot |\log \gamma_n|)]\} \geq \exp\{(1/2)\mu_n^2 n_n\} \cdot \text{Re}(a_{n_n} \cdot e^{i\beta_n}) \quad \text{per } \mu \geq \mu_n; \end{aligned}$$

infatti, come abbiamo già notato, l'espressione sotto il segno di esponenziale nella ψ è almeno

$$\begin{aligned} & \{ \mu^2 + O(\gamma_n^{2/3} \cdot |\log \gamma_n|^{4/3}) + (1/3)\mu\gamma_n^{1/3} \cdot \log \gamma_n \} n_n \geq \\ & \geq \{ \mu^2 + o(\mu_n^2) - (1/3)\mu\mu_n \} n_n = \{ \mu \cdot (\mu - \mu_n/3) + o(\mu_n^2) \} n_n \geq \\ & \geq \{ \mu_n \cdot (\mu_n - \mu_n/3) + o(\mu_n^2) \} n_n \geq \mu_n^2 n_n/2 = (1/2)\gamma_n^{2/3} n_n \cdot \log^2 n_n, \end{aligned}$$

dove nel termine $o(\mu_n^2 n_n)$, essendo $\mu_n^2 n_n > \sqrt{n_n}$, può essere assorbito anche un termine $-\log n_n$ proveniente dal coefficiente $1/n_n$ che precede l'esponenziale, mentre si può sempre supporre $K > 1$.

Dunque il numero delle ψ_n -variazioni che non supera quello delle variazioni ordinarie per $\mu < \mu_n$, si riduce a zero per $\mu \geq \mu_n$, ed il Teorema C è ricondotto al Lemma A.

È chiaro poi che il Teorema C è ancora valido se l'intervallo I_n^ viene scelto più ampio, cioè se più in generale esso viene definito come intervallo*

$$I_n^* \equiv ((1 - \mu_n)n_n, (1 + \mu_n)n_n)$$

con un qualunque $\mu_n \geq -\gamma_n^{1/3} \cdot \log \gamma_n$, ed in tal caso si potrà anche sostituire, nella condizione 2°), la espressione sotto segno di esponenziale con la seguente: $(1/2)\mu_n^2 n_n$.

Allora se noi scegliamo:

$$\gamma_n = n_n^{-3/4} \cdot \log n_n, \quad \mu_n = n_n^{-1/4} \cdot \log^{4/3} n_n, \quad \varepsilon_n = (n_n^{-1} \cdot \log n_n)^{1/4},$$

tutte le ipotesi del Teorema C sono soddisfatte e quest'ultimo assume esattamente la forma del Teorema A.

Se invece scegliamo:

$$\gamma_n = n_n^{-3/8} \cdot \log n_n, \quad \mu_n = n_n^{-1/8} \cdot \log^{4/3} n_n, \quad \varepsilon_n = n_n^{-1/8} \cdot \log^{1/4} n_n,$$

allora otteniamo immediatamente il Teorema B.

A complemento delle considerazioni sulla complementarità delle ipotesi fatte alla fine del § precedente, vogliamo qui ancora esaminare il caso seguente (con I_h^* molto ampio):

$$\gamma_h = (\log n_h)^{-3}, \quad \mu_h = 3 \log \log n_h \cdot (\log n_h)^{-1}, \quad \varepsilon_h = (\log n_h \cdot \log \log n_h)^{-1},$$

che ci porta a formulare il

Teorema D. *Data al solito la w e la relativa (1) con la condizione (2), si possano determinare $\{n_h\}$ e $\{\beta_h\}$ in modo da soddisfare alla (a), ed un numero $\theta > 0$, tali che inoltre:*

1°) ricoperto l'intervallo $I_h^* \equiv \left(n_h - \frac{3n_h \cdot \log \log n_h}{\log n_h}, n_h + \frac{3n_h \cdot \log \log n_h}{\log n_h} \right)$ con tratti $J_v \equiv ((1 + \log^{-3} n_h)^v n_h, (1 + \log^{-3} n_h)^{v+1} n_h)$ di ampiezza $j_v = (1 + \log^{-3} n_h)^v n_h \cdot \log^{-3} n_h$, il numero delle variazioni di segno della successione

$$(3') \quad \operatorname{Re} (a_m \cdot e^{i\beta_h}), \quad m \in I_h^*,$$

introdotte da elementi corrispondenti a valori $m \in J_v$, non superi $\{ \Delta + (\log n_h \cdot \log \log n_h)^{-1} \} j_v$;

2°) per i valori di m che cadono nei tratti laterali di $I_h \equiv ((1 - \theta)n_h, (1 + \theta)n_h)$ esterni ad I_h^* , si abbia:

$$\operatorname{Re} (a_m \cdot e^{i\beta_h}) \leq \operatorname{Re} (a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h}) \cdot \exp \left\{ \frac{9n_h}{2} \left(\frac{\log \log n_h}{\log n_h} \right)^2 \right\};$$

allora la w possiede una singolarità sull'arco

$$|z| = 1, \quad -\pi \Delta \leq \arg z \leq \pi \Delta.$$

È superfluo sottolineare ancora come i fenomeni già rilevati alla fine del § precedente si presentino qui anche più accentuati e riteniamo inutile illustrare altri esempi che si potrebbero ovviamente costruire scegliendo il γ_h di ordine ancora più basso [per esempio $\gamma_h = (\log \log n_h)^{-3}$] e definendo in conseguenza μ_h ed ε_h .

Vogliamo infine osservare che, benchè nella dimostrazione del Lemma A noi supporremo $\Delta > 0$, tuttavia esso vale anche per $\Delta = 0$. Infatti è chiaro che se vale la limitazione $N_{v,v} \leq \varepsilon_h j_v$, vale a maggior ragione ogni limitazione del tipo $N_{v,v} \leq (\Delta' + \varepsilon_h) j_v$, con $\Delta' > 0$ arbitrario.

Perciò un punto singolare della w dovrà trovarsi su ogni arco $\{|z| = 1, -\pi\Delta' \leq \arg z \leq \pi\Delta'\}$, con Δ' arbitrario, e quindi necessariamente in $z = 1$ essendo l'insieme dei punti singolari un insieme chiuso.

Analoga conclusione vale naturalmente anche per i teoremi che abbiamo dedotto dal Lemma A.

§ 3. - La funzione $g(z)$.

Divideremo la dimostrazione del Lemma A in quattro parti.

Questa prima parte sarà dedicata soprattutto alla costruzione di una funzione intera $g(z)$ di uso classico in questioni di questo genere, e successivamente ad un rapido studio della distribuzione degli zeri della $g(z)$ entro intervalli più ampi degli J_r in modo da poter assorbire le eventuali irregolarità di distribuzione.

In corrispondenza ad ogni numero m' , tale che il termine $\operatorname{Re}(a_{m'} \cdot e^{i\theta_h})$ introduca una ψ_h -variazione di segno della relativa successione (3), fissiamo un punto $\varrho' = m' + (1/2)$.

La successione dei ϱ' così fissata avrà una densità massimale uguale (al più) a Δ . Completiamo la successione dei ϱ' con altri punti ϱ'' in modo che la successione di tutti i ϱ sia misurabile ed abbia densità Δ .

Consideriamo l'intervallo I_h e la sua copertura mediante gli J_r . Prolunghiamo anzi la successione dei ν a destra di n_h fino al minimo intero ν_2 per cui risulti

$$1 + \theta'_h = (1 + \gamma_h)^{\nu_2} \geq 1 + \theta + \sqrt{\gamma_h}$$

scegliamo un altro intero ν_1 in modo da aversi

$$(1 + \gamma_h)^{-\nu_1 - 1} < 1 - \theta'_h \leq (1 + \gamma_h)^{-\nu_1}.$$

Siamo così condotti a considerare anzichè gli intervalli I_h degli intervalli ampliati I'_h di estremi $(1 - \theta'_h)n_h$ ed $(1 + \theta'_h)n_h$.

Operiamo ora il nostro completamento.

Negli intervalli esterni agli I'_h aggiungiamo numeri ϱ'' corrispondenti a ciascun valore s/Δ , con s intero per cui risulti $\varrho'' = s/\Delta \notin \bigcup_h I'_h$.

Consideriamo adesso le parti interne agli I'_h ; e in ciascun I'_h operiamo come segue.

Nell'eventuale intervallo $((1 - \theta'_h)n_h, (1 + \gamma_h)^{-\nu_1} n_h)$ non introduciamo alcun punto ϱ'' . Notiamo che questo intervallo non contiene nemmeno punti ϱ' poichè è tutto esterno a I_h . Si ha infatti

$$(1 - \theta)n_h - (1 - \theta'_h)n_h = (\theta'_h - \theta)n_h \geq n_h \sqrt{\gamma_h},$$

mentre, essendo

$$n_h \cdot (1 + \gamma_h)^{-r_1 - 1} < (1 - \theta'_h)n_h \leq (1 + \gamma_h)^{-r_1} n_h,$$

sarà

$$(1 + \gamma_h)^{-r_1} - (1 - \theta'_h) < (1 + \gamma_h)^{-r_1 - 1} \gamma_h < \gamma_h < \sqrt{\gamma_h}.$$

Per gli J_r , completamente contenuti in I'_h ci regoleremo come segue. Se il tratto J_r , considerato contiene punti ϱ' in numero almeno uguale a $\{ \Delta - (1/48)\sqrt[3]{\gamma_h} \} j_r$, non vi aggiungiamo alcun punto ϱ'' . Se invece esso contiene punti ϱ' in quantità inferiore a questa quota, aggiungeremo coppie di punti ϱ'' , ciascuna in un intervallo, vuoto di punti ϱ' , che abbia per estremi due interi consecutivi, collocando un punto ad $1/4$ e l'altro a $3/4$ di tale intervallino unitario, fino ad elevare il numero complessivo dei punti ϱ , contenuti nel tratto J_r , considerato, al di sopra di $\{ \Delta - (1/48)\gamma_h^{1/3} \} j_r$, superando questo numero del minimo possibile. Ne segue che, poichè $\gamma_h^{1/3} n_h \rightarrow \infty$, risulterà in ognuno degli intervalli J_r , anche dopo il riempimento, un numero di punti ϱ inferiore a Δj_r .

Nel compiere tale riempimento terremo presenti due avvertenze.

Avvertenza 1^a. Non introdurremo mai coppie di punti ϱ'' nei due eventuali tratti di intervalli unitari, che possono presentarsi al principio e alla fine di J_r , se gli estremi di questo ultimo non sono numeri interi. Questa esclusione sarà sempre possibile poichè, essendo $\Delta < 1$ e $\Delta j_r \rightarrow \infty$, il numero di intervalli unitari in cui introdurre una coppia di ϱ'' è minore della metà del numero degli intervalli vuoti di punti ϱ' , anzi differisce da tale metà di una quantità maggiore di una costante prefissata.

Avvertenza 2^a. L'operazione di riempimento in ciascun intervallo J_r , si penserà effettuata mediante successive aggiunte di coppie di punti ϱ'' in intervallini unitari, scegliendo ogni volta quell'intervallino, che risulterà più lontano da n_h , fra quelli naturalmente che non contengono ancora alcun punto ϱ . A causa della osservazione posta alla fine della precedente avvertenza, possiamo assicurare, grazie a questa seconda avvertenza, che ad ogni intervallo unitario che contiene una coppia di punti ϱ'' si può associare un altro intervallo unitario, più vicino al punto n_h , e vuoto di punti ϱ .

Risulta così fissato un insieme di numeri ϱ che differiscono fra loro a due a due almeno di $1/4$ e la cui successione $\{ \varrho_i \}$, quando si pensi ordinata per valori crescenti è misurabile e di densità Δ , e naturalmente si può supporre $\Delta < 1$.

Allora la funzione ⁽⁹⁾

$$(6) \quad g(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^3}{\varrho_i^3}\right)$$

è intera e al massimo del tipo medio di ordine 1, ed ha come diagramma indicatore il segmento di estremi $-i\pi\Delta$, $i\pi\Delta$; perciò la funzione $\varphi(z)$ definita dall'elemento analitico

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \cdot z^n$$

ammette punti singolari solo sull'arco $\{|z| = 1, |\arg z| \leq \Delta\pi\}$.

La $g(z)$ soddisfa inoltre alla relazione

$$(7) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \log |g(r)| \right\} = 0,$$

quando r tende a infinito per valori reali, stando discosto dai numeri ϱ_i , in modo da differire da ciascuno di essi per più di una quantità fissa.

Vediamo ora quello che accade quando si passi a considerare la distribuzione dei numeri ϱ entro tratti la cui ampiezza relativa è misurata dalla nuova successione $\{\sigma_n\}$ in luogo della precedente $\{\gamma_h\}$.

Fissiamo una successione crescente di numeri positivi $\{\omega_h\}$, tale che $\omega_h \rightarrow \infty$ per $h \rightarrow \infty$, $4\gamma_h \omega_h < \theta'_h$, e poniamo $\sigma'_h = 4\gamma_h \omega_h$.

Osserviamo che in ogni intervallo $J' \equiv (y, (1 + \sigma'_h)y)$, che supporremo tutto contenuto in I'_h , cadrà un certo numero di intervalli J_v completamente contenuti in J' ed al più due tratti parziali di intervalli J_v alle estremità di J' , e che quindi l'ampiezza complessiva degli intervalli J_v contenuti completamente in J' non è inferiore a

$$\sigma'_h y - 2(1 + \theta'_h)\gamma_h n_h$$

e l'ampiezza complessiva degli J_v che ricoprono interamente J' non supera

$$\sigma'_h y + 2(1 + \theta'_h)\gamma_h n_h.$$

⁽⁹⁾ Per le affermazioni che seguono si veda: L. BIEBERBACH, op. cit. in ⁽¹⁾, rispettivamente i teoremi (1, 3, VII), (1, 3, VI), (1, 3, VIII), pp. 12-13.

Osserviamo inoltre che il numero dei q in ogni J_r (e quindi in ogni loro riunione) è compreso fra $\Delta - 48^{-1} \gamma_h^{1/3}$ e $\Delta + \varepsilon_h$ per l'ampiezza dell'intervallo J_r (o della loro riunione). Perciò, detto N il numero dei $q \in J'$, avremo

$$(\Delta - 48^{-1} \gamma_h^{1/3}) \{ \sigma'_h y - 2(1 + \theta'_h) \gamma_h n_h \} \leq N \leq (\Delta + \varepsilon_h) \{ \sigma'_h y + 2(1 + \theta'_h) \gamma_h n_h \}.$$

Potremo supporre $1 + \theta'_h < 3/2$, e quindi

$$\begin{aligned} \sigma'_h y \cdot \left\{ \Delta - (\gamma_h^{1/3}/48) \right\} \left\{ 1 - (3\gamma_h n_h)/(4\gamma_h \omega_h y) \right\} &\leq N \leq \\ &\leq \sigma'_h y \cdot (\Delta + \varepsilon_h) \left\{ 1 + (3\gamma_h n_h)/(4\gamma_h \omega_h y) \right\}, \end{aligned}$$

e poichè $n_h/y < n_h/\{ (1 - \theta'_h)n_h \} = 1/(1 - \theta'_h) < 4/3$, avremo:

$$\sigma_h y \cdot \left\{ \Delta - \left(\frac{\gamma_h^{1/3}}{48} + \frac{1}{\omega_h} \right) \right\} \leq N \leq \sigma'_h y \cdot \left(\Delta + \varepsilon_h + \frac{1}{\omega_h} \right)$$

(per la seconda disuguaglianza si osservi che $\Delta + \varepsilon_h < 1$, come si può sempre supporre) e, posto $\delta_h = \varepsilon_h + 48^{-1} \gamma_h^{1/3} + \omega_h^{-1}$, potremo scrivere:

$$(\Delta - \delta_h) \sigma'_h y \leq N \leq (\Delta + \delta_h) \sigma'_h y.$$

Questo ragionamento vale per ogni $\{ \omega_h \}$ soddisfacente alle condizioni poste. In particolare, per

$$\omega_h \geq 48/\gamma_h^{1/3}, \quad 4 \cdot 48 \gamma_h^{2/3} \leq \sigma'_h < \theta'_h,$$

possiamo affermare:

La successione dei numeri q così costruita in ogni intervallo I'_h gode della seguente proprietà: il numero N dei punti q in ogni intervallo

$$J' \equiv (y, (1 + \sigma'_h)y) \subset I'_h \quad (192 \cdot \gamma_h^{2/3} \leq \sigma'_h < \theta'_h)$$

soddisfa alla limitazione

$$(\Delta - \delta_h) \sigma'_h y \leq N \leq (\Delta + \delta_h) \sigma'_h y,$$

con $\delta_h = \varepsilon_h + 48^{-1} \gamma_h^{1/3} + 48^{-1} \gamma_h^{1/3} = \varepsilon_h + 24^{-1} \gamma_h^{1/3}$.

D'ora in poi porremo sempre:

$$\delta_h = \varepsilon_h + 24^{-1} \gamma_h^{1/3} \quad \text{ed inoltre} \quad \sigma_h = 192 \cdot \gamma_h^{2/3}.$$

§ 4. - Un nuovo lemma.

Per intraprendere la dimostrazione del Lemma A abbiamo ancora bisogno di un altro elemento, che ci viene fornito dal seguente lemma, la cui dimostrazione occuperà da sola tutto il presente § ed il successivo.

Lemma B. *Fissato un numero m intero positivo, appartenente a uno dei due intervalli*

$$((1 - \theta)n_h, (1 - 3\sigma_h)n_h), \quad ((1 + 3\sigma_h)n_h, (1 + \theta)n_h)$$

e considerata l'espressione

$$|g(m)/g(n_h)| = \prod_{i=1}^{\infty} |(m^2 - \varrho_i^2)/(n_h^2 - \varrho_i^2)| = \prod_M,$$

risulterà (ricordando che è $\mu = |m - n_h| / n_h$):

$$\prod_M \leq \exp \{ [\gamma_h^{2/3} \cdot |\log \gamma_h|^{4/3} + \mu \cdot (6\varepsilon_h + 4^{-1} \gamma_h^{1/3}) |\log \gamma_h|] n_h \} = \exp \{ \Phi(\mu, \gamma_h, \varepsilon_h) \cdot n_h \}.$$

Divideremo la dimostrazione di questo lemma in due parti, di cui la prima, che verrà svolta in questo §, consisterà nel costruire una nuova successione di numeri $\bar{\varrho}$, dipendente dall' m prefissato, scelta in modo che risulti

$$\prod_{\bar{\varrho}} = \prod_{\bar{\varrho}} |(m^2 - \bar{\varrho}^2)/(n^2 - \bar{\varrho}^2)| = \prod_{\bar{\varrho}} \lambda(\bar{\varrho}) \geq \prod_M.$$

D'ora in poi porremo sempre $\lambda(x) = |(m^2 - x^2)/(n^2 - x^2)|$ ed ometteremo generalmente l'indice h , e quindi scriveremo n, σ, δ, \dots invece di $n_h, \sigma_h, \delta_h, \dots$.

La distribuzione dei numeri $\bar{\varrho}$ verrà effettuata in due modi analoghi e in certo senso simmetrici (rispetto a n) a seconda che $m < n$ oppure $m > n$.

Per comodità ci riferiremo al caso $m < n$ e accenneremo alla fine alle modificazioni, del resto ovvie, da introdurre nel caso $m > n$.

In primo luogo in tutto l'intervallo $(0, (1 + \theta'_{h-1})n_{h-1})$ non collocheremo alcun punto $\bar{\varrho}$. Osserviamo che in tale intervallo si ha sempre $\lambda(x) < 1$.

Nei due intervalli

$$((1 + \theta'_{h-1})n_{h-1}, (1 - \theta')n), \quad ((1 + \theta')n, (1 - \theta'_{h+1})n_{h+1})$$

sceghieremo i $\bar{\varrho}$ coincidenti coi ϱ già ivi esistenti.

Nell'intervallo $((1 - \theta'_{n+1}) n_{n+1}, +\infty)$ penseremo collocati due punti \bar{q} in ciascun intervallo unitario, rispettivamente all'inizio e a metà di ogni intervallino, lasciando vuoto l'eventuale intervallo compreso fra il punto $(1 - \theta'_{n+1}) n_{n+1}$ e il primo intero che non è superato da tale valore.

Ad ogni numero q dell'intervallo $((1 - \theta'_{n+1}) n_{n+1}, +\infty)$ viene così ad esser coordinato almeno un numero \bar{q} che non lo supera e pel quale pertanto si ha $\lambda(q) \leq \lambda(\bar{q})$.

La cosa è ovvia perchè in nessun intervallo unitario possono esistere più di due punti q , a distanza $1/2$ fra loro.

Dentro l'intervallo I'_n la distribuzione dei punti \bar{q} verrà effettuata nel modo seguente.

Osserviamo preliminarmente che, detto l il punto in cui $\lambda(l) = 1$, risulterà:

$$m \cdot (1 + \sigma) < l < n \cdot (1 - \sigma) \quad (m < n, \quad \mu > 3\sigma),$$

infatti avremo

$$\begin{aligned} (8) \quad l &= \sqrt{(m^2 + n^2)/2} = n \sqrt{\{(1 - \mu)^2 + 1\}/2} = n \sqrt{1 - \mu + (\mu^2/2)} = \\ &= n \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(-\mu + \frac{\mu^2}{2} \right) - \frac{1}{8} \left(-\mu + \frac{\mu^2}{2} \right)^2 + O(\mu^3) \right\} = n \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{8} \mu^2 + \dots \right), \end{aligned}$$

e quindi

$$(1 + \sigma)m = (1 - \mu)(1 + \sigma)n < n \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \mu + \dots \right) < n \cdot (1 - \sigma),$$

disuguaglianze certo soddisfatte se θ è abbastanza piccolo (si ricordi che $\mu \leq \theta$).

Ciò premesso, noi disporremo i numeri \bar{q} nel modo seguente:

- 1°) $\bar{q} = s + \frac{1}{2}$, per ogni s intero se $\bar{q} \in J_n \equiv ((1 - \sigma)n, (1 + \sigma)n)$;
- 2°) $\bar{q} = \frac{s}{A + \delta}$, per ogni s intero se \bar{q} cade in uno dei due intervalli $(l, (1 - \sigma)n)$, $((1 + \sigma)n, (1 + \theta')n)$;
- 3°) $\bar{q} = \frac{s}{A - \delta}$, per ogni s intero se \bar{q} cade in uno dei due intervalli $((1 - \theta')n, (1 - \sigma)m)$, $((1 + \sigma)m, l)$;

si osservi che nessun punto \bar{q} cade all'interno dell'intervallo

$$J_m \equiv ((1 - \sigma)m, (1 + \sigma)m).$$

Per dimostrare ora che $\prod_{\varrho \in I'_n} \lambda(\varrho) < \prod_{\bar{\varrho} \in I'_n} \lambda(\bar{\varrho})$ cominciamo a ordinare per livello decrescente dei corrispondenti fattori $\lambda(\varrho)$ e $\lambda(\bar{\varrho})$ i punti ϱ e $\bar{\varrho}$ che stanno a destra di n , e facciamo vedere che a ogni fattore $\lambda(\varrho)$ si può associare almeno un $\lambda(\bar{\varrho})$ che lo supera.

Consideriamo un qualunque $x > n$. Tutto si riduce a far vedere che il numero dei ϱ contenuti in $J_n^* \equiv (n, x)$ non supera mai il numero dei $\bar{\varrho}$ in J_n^* .

La cosa è ovvia se $n < x \leq (1 + \sigma)n$, poichè i numeri ϱ sono tali che ogni intervallo unitario ne contiene uno solo (al centro dell'intervallo) o se ne contiene due (a $1/4$ e a $3/4$ dell'intervallo), sia preceduto da almeno un intervallo che non ne contiene affatto, quindi il numero dei ϱ in J_n^* non supera $[x - n + (1/2)]$, che è appunto il numero dei $\bar{\varrho}$ in J_n^* .

Se poi $x > (1 + \sigma)n$ il numero dei $\bar{\varrho}$ in J_n^* non è inferiore a

$$[\sigma n + (1/2)] + (\Delta + \delta)(x - n - \sigma n) - 1.$$

Infatti, se s_0 ed s_r sono interi tali che

$$(s_0 - 1)/(\Delta + \delta) < (1 + \sigma)n \leq s_0/(\Delta + \delta) < s_r/(\Delta + \delta) \leq x < (s_r + 1)/(\Delta + \delta),$$

sarà $(s_r - s_0 + 2)/(\Delta + \delta) > x - n - \sigma n$ e quindi

$$s_r - s_0 + 1 > (x - n - \sigma n)(\Delta + \delta) - 1,$$

e il primo membro di questa disuguaglianza rappresenta appunto il numero dei $\bar{\varrho}$ nell'intervallo $((1 + \sigma)n, x)$.

D'altra parte il numero dei ϱ dell'intervallo J_n^* , per quanto osservato alla fine del § precedente, essendo l'ampiezza di J_n^* non inferiore a σn , non supera

$$(x - n)(\Delta + \delta),$$

ed abbiamo:

$$\begin{aligned} & [\sigma n + (1/2)] + (\Delta + \delta)(x - n - \sigma n) - 1 - (x - n)(\Delta + \delta) \geq \\ & \geq \sigma n - 1 - \sigma n \cdot (\Delta + \delta) - 1 = \sigma n \{1 - (\Delta + \delta)\} - 2 > 0, \end{aligned}$$

poichè si può supporre $\Delta + \delta < 1$.

Analogo ragionamento vale per i ϱ e i $\bar{\varrho}$ compresi fra l ed n .

Ordiniamo ora per livello crescente dei corrispondenti fattori $\lambda(\varrho)$ e $\lambda(\bar{\varrho})$ i numeri ϱ e $\bar{\varrho}$ compresi fra m ed l .

Fissiamo un x ($m < x \leq l$); dobbiamo adesso far vedere che il numero dei ϱ contenuti nell'intervallo $J_m^* \equiv (m, x)$ è maggiore o uguale al numero dei $\bar{\varrho}$, nello stesso intervallo.

La cosa è ovvia se x appartiene all'intervallo $(m, (1 + \sigma)m)$, che non contiene alcun punto $\bar{\varrho}$. Se è $x > (1 + \sigma)m$, il numero dei ϱ in J_m^* è almeno uguale a $(\Delta - \delta)(x - m)$, mentre il numero dei $\bar{\varrho}$ è al più $(x - m - \sigma m) \cdot (\Delta - \delta) + 1$, d'onde segue l'asserto.

Analogo ragionamento vale nell'intervallo $((1 - \theta')n, m)$.

Se poi fosse $m > n$, la distribuzione dei $\bar{\varrho}$ andrebbe fatta, per giungere alle stesse conclusioni, nel seguente modo, come è facile intuire:

nell'intervallo $(0, (1 + \theta'_{h-1})n_{h-1})$ punti $\bar{\varrho}$ in tutti i multipli di $1/2$;

negli intervalli $((1 + \theta'_{h-1})n_{h-1}, (1 - \theta')n)$, $((1 + \theta')n, (1 - \theta'_{h+1})n_{h+1})$ punti $\bar{\varrho}$ coincidenti coi preesistenti ϱ ;

nell'intervallo $((1 - \sigma)n, (1 + \sigma)n)$ punti $\bar{\varrho}$ di ascissa semiintera;

negli intervalli $((1 - \theta')n, (1 - \sigma)n)$, $((1 + \sigma)n, l)$ punti $\bar{\varrho}$ di ascissa $s/(\Delta + \delta)$;

negli intervalli $(l, (1 - \sigma)m)$, $((1 + \sigma)m, (1 + \theta')n)$ punti $\bar{\varrho}$ di ascissa $s/(\Delta - \delta)$;

nessun punto $\bar{\varrho}$ negli altri intervalli.

§ 5. - Dimostrazione del Lemma B.

La dimostrazione del Lemma B è così ricondotta a quella della disuguaglianza

$$\prod_{\bar{x}} = \prod_{\bar{\varrho}} \lambda(\bar{\varrho}) \leq \exp \{ \Phi(\mu, \gamma, \varepsilon) \cdot n \},$$

o della equivalente [qui poniamo $\Lambda(x) = \log \lambda(x)$]

$$(9) \quad \bar{\Sigma} = \sum_{\bar{\varrho}} \Lambda(\bar{\varrho}) \leq \Phi(\mu, \gamma, \varepsilon) \cdot n.$$

Decomporremo adesso la $\bar{\Sigma}$ in sommatorie parziali. Indicheremo con:

Y_0 l'intervallo $(0, (1 + \theta'_{h-1})n_{h-1})$;

Y_1 l'intervallo $((1 - \theta'_{h+1})n_{h+1}, +\infty)$;

Y_2 la riunione dei due intervalli

$$((1 + \theta'_{h-1}) n_{h-1}, (1 - \theta') n), \quad ((1 + \theta') n, (1 - \theta'_{h+1}) n_{h+1});$$

Y_3 l'intervallo I'_h privato dei due intervalli

$$J_n \equiv ((1 - \sigma) n, (1 + \sigma) n), \quad J_m \equiv ((1 - \sigma) m, (1 + \sigma) m);$$

e porremo $[\sum_{\bar{q} \in r_i} A(\bar{q}) = \sum_i \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad \sum_{\bar{q} \in J_n} A(\bar{q}) = \sum_n]$:

$$(9') \quad \bar{\Sigma} = \sum_{\bar{q} \in r_0} A(\bar{q}) + \sum_{\bar{q} \in r_1} A(\bar{q}) + \sum_{\bar{q} \in r_2} A(\bar{q}) + \sum_{\bar{q} \in r_3} A(\bar{q}) + \sum_{\bar{q} \in J_n} A(\bar{q}) = \\ = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_n.$$

Noi maggioreremo i termini della sommatoria singolarmente, o opportunamente raggruppati, servendoci essenzialmente di integrali del tipo

$$\int_{\alpha}^{\beta} A(x) dx = I(\alpha, \beta)$$

il cui valore è fornito dalla relazione, verificabile con calcoli ovvii,

$$(10) \quad I(\alpha, \beta) = m \cdot \log \left| \frac{m + \beta}{m - \beta} \frac{m - \alpha}{m + \alpha} \right| + n \cdot \log \left| \frac{n - \beta}{n + \beta} \frac{n + \alpha}{n - \alpha} \right| + \\ + \beta \cdot \log \left| \frac{m^2 - \beta^2}{n^2 - \beta^2} \right| + \alpha \cdot \log \left| \frac{n^2 - \alpha^2}{m^2 - \alpha^2} \right|.$$

5.A. - Maggiorazione di $\Sigma_0 + \Sigma_1$.

Σ_0 è nullo per $m < n$. In questo caso basterà dunque maggiorare Σ_1 , ed avremo [posto $\alpha = (1 - \theta'_{h+1}) n_{h+1}$]:

$$\Sigma_1 < 2I(\alpha, +\infty) + A(\alpha) = \\ = 2m \cdot \log \left| \frac{m - \alpha}{m + \alpha} \right| + 2n \cdot \log \left| \frac{n + \alpha}{n - \alpha} \right| + (2\alpha - 1) \cdot \log \left| \frac{n^2 - \alpha^2}{m^2 - \alpha^2} \right| = \\ = 2m \cdot \log \left(1 - \frac{2m}{m + \alpha} \right) + 2n \cdot \log \left(1 + \frac{2n}{\alpha - n} \right) + (2\alpha - 1) \cdot \log \frac{1 - (n^2/\alpha^2)}{1 - (m^2/\alpha^2)} =$$

$$\begin{aligned}
&= m \cdot O\left(\frac{m}{\alpha}\right) + n \cdot O\left(\frac{n}{\alpha}\right) - (2\alpha - 1) \cdot \log \left\{ \left(1 - \frac{m^2}{\alpha^2}\right) \left(1 + \frac{n^2}{\alpha^2} + O\left(\frac{n^4}{\alpha^4}\right)\right) \right\} = \\
&= O\left(\frac{m^2}{\alpha}\right) + O\left(\frac{n^2}{\alpha}\right) + (2\alpha - 1) \cdot O\left(\frac{n^2}{\alpha^2}\right) = O\left(\frac{n^2}{\alpha}\right);
\end{aligned}$$

possiamo supporre sempre, grazie a un eventuale diradamento, che risulti $n_h = o(\sigma_h n_{h+1})$, e quindi avremo

$$\sum_1 = o(\sigma n).$$

In quanto a \sum_0 che si presenta nel caso $m > n$, avremo $[\beta = (1 + \theta_{h-1}') n_{h-1}]$:

$$\begin{aligned}
\sum_0 &< 2I(0, \beta) + A(\beta) = \\
&= m \cdot O\left(\frac{\beta}{m}\right) + n \cdot O\left(\frac{\beta}{n}\right) + (2\beta + 1) \cdot \log \left| \frac{m^2 - \beta^2}{n^2 - \beta^2} \right| = \\
&= O(\beta) + (2\beta + 1) \cdot \log \left| \frac{m^2}{n^2} \frac{1 - (\beta^2/m^2)}{1 - (\beta^2/n^2)} \right| = O(\beta) + \beta \cdot O(1) = O(\beta) = O(n_{h-1}).
\end{aligned}$$

Ora noi possiamo anche supporre $n_{h-1} = o(\sqrt{n_h})$, ed essendo

$$\sigma = 192 \cdot \gamma^{2/3}, \quad \gamma^{1/3} \cdot n \rightarrow \infty, \quad \gamma > n^{-3/4}$$

e quindi

$$\sigma > 1/\sqrt{n}, \quad \sigma n > \sqrt{n}, \quad n_{h-1} = o(\sigma n),$$

abbiamo ancora

$$\sum_0 = o(\sigma n).$$

Possiamo dunque concludere:

$$(11) \quad \sum_0 + \sum_1 = o(\sigma n).$$

5.B. - Maggiorazione di $\sum_2 + \sum_3$.

Qui svolgeremo compiutamente il caso $m < n$. Per il caso $m > n$ basteranno lievi modificazioni per lo più ovvie. Noi tratteggeremo rapidamente tali modificazioni, nei loro aspetti essenziali, nel corso della nostra trattazione.

Consideriamo dunque l'ipotesi $m < n$ e poniamo:

$$\begin{aligned} (1 + \theta'_{n-1}) n_{n-1} &= \beta, & (1 - \theta'_{n+1}) n_{n+1} &= \alpha, \\ (1 - \theta') n &= \alpha_0, & (1 + \theta') n &= \beta_0, \\ (1 - \sigma) n &= \alpha_1, & (1 + \sigma) n &= \beta_1, \\ (1 - \sigma) m &= \alpha_2, & (1 + \sigma) m &= \beta_2, \end{aligned}$$

e ricordiamo che $l = \sqrt{(m^2 + n^2)/2}$, $A(l) = 0$.

Ci capiterà talvolta di considerare anzichè i punti α_2 e β_2 i punti

$$m - \sigma n = \bar{\alpha}_2, \quad m + \sigma n = \bar{\beta}_2,$$

e vogliamo subito maggiorare l'alterazione che verrà apportata negli integrali a causa di tale sostituzione. Tale alterazione T non supera la somma delle ampiezze dei due tratti moltiplicate rispettivamente per il massimo modulo della $A(x)$ in ciascuno di essi. Ora nel caso in esame ($m < n$) abbiamo $\bar{\alpha}_2 < \alpha_2$, $\beta_2 < \bar{\beta}_2$ ed inoltre $\alpha_2 - \bar{\alpha}_2 = \bar{\beta}_2 - \beta_2 = \sigma\mu n$ e i massimi moduli sono rispettivamente $-A(\alpha_2)$ e $-A(\beta_2)$, e perciò:

$$\begin{aligned} T &= -\{ I(\alpha'_2, \alpha_2) + I(\beta_2, \beta'_2) \} < \\ &< \sigma\mu n \cdot \log \left| \frac{n^2 - (1 - \sigma)^2 m^2}{m^2 - (1 - \sigma)^2 m^2} \right| + \sigma\mu n \cdot \log \left| \frac{n^2 - (1 + \sigma)^2 m^2}{m^2 - (1 + \sigma)^2 m^2} \right| = \\ &= \sigma\mu n \cdot \log \left| \frac{1 - (1 - \sigma)^2 (1 - \mu)^2}{(1 - \mu)^2 - (1 - \sigma)^2 (1 - \mu)^2} \frac{1 - (1 + \sigma)^2 (1 - \mu)^2}{(1 - \mu)^2 - (1 + \sigma)^2 (1 - \mu)^2} \right| = \\ &= \sigma\mu n \cdot \log \left| \frac{\mu + \sigma - \mu^2/2 + \mu \cdot O(\sigma)}{\sigma \cdot (1 - \mu)^2 + O(\sigma^2)} \frac{\mu - \sigma - \mu^2/2 + \mu \cdot O(\sigma)}{-\sigma \cdot (1 - \mu)^2 + O(\sigma^2)} \right| \leq \\ &\leq \sigma\mu n \cdot \log \left| \frac{2\mu}{\sigma/2} \frac{2\mu}{\sigma/2} \right|, \end{aligned}$$

e quindi l'alterazione considerata è maggiorata così:

$$(12) \quad T < 2\sigma\mu n \cdot \log \frac{\mu}{\sigma} + 4 \cdot \log 2 \cdot \sigma\mu n.$$

Un risultato del tutto uguale vale nel caso $m > n$, che si ottiene con procedimento analogo osservando che adesso i massimi moduli sono dati da $-A(\bar{\alpha}_2)$ e $-A(\bar{\beta}_2)$, essendo ancora $\sigma\mu n$ l'ampiezza di ciascun tratto, mentre $m = (1 + \mu)n$.

Ciò premesso passiamo a scrivere una prima maggiorazione della nostra somma, nella forma seguente:

$$(13') \quad \begin{aligned} \sum_2 + \sum_3 &< \Delta \cdot I(\beta, \alpha_0) - A(\alpha_0) + \\ &+ (\Delta - \delta) \cdot I(\alpha_0, \alpha_2) - A(\alpha_2) + (\Delta - \delta) \cdot I(\beta_2, l) - A(\beta_2) + \\ &+ (\Delta + \delta) \cdot I(l, \alpha_1) + A(\alpha_1) + (\Delta + \delta) \cdot I(\beta_1, \beta_0) + A(\beta_1) + \\ &+ \Delta \cdot I(\beta_0, \alpha) + A(\beta_0). \end{aligned}$$

Cominciamo col maggiorare i valori $A(x)$ che si presentano in questa espressione. Per ogni a (con $\theta' \geq |a| \geq \sigma$) abbiamo

$$\begin{aligned} |A((1+a)n)| &= \\ &= \left| \log \left| \frac{m^2 - (1+a)n^2}{n^2 - (1+a)n^2} \right| \right| = \left| \log \left| \frac{(1-\mu)^2 - (1+a)^2}{1 - (1+a)^2} \right| \right| = \\ &= \left| \log \left| \frac{-2a - 2\mu + \mu^2 - a^2}{-2a - a^2} \right| \right| = \left| \log \left| \frac{\mu + a}{a} \frac{2 + a - \mu}{2 + a} \right| \right| = \left| \log \left| \frac{\mu + a}{a} \right| \right| + O(1). \end{aligned}$$

Poichè noi dobbiamo maggiorare valori di $A(x)$ per i quali $|x - m| \geq \sigma m$, avremo in ogni caso $|a + \mu| \geq \sigma \cdot (1 - \mu)$ e quindi:

$$\log |\sigma \cdot (1 - \mu)/\theta'| \leq \log |(\mu + a)/a| < \log (2\theta'/\sigma)$$

e perciò

$$|\log |(\mu + a)/a|| \leq \log \{ (2\theta'n)/(\sigma n) \} \leq \log o(n) \leq \log n = o(\sigma n),$$

poichè, come abbiamo già rilevato $\sigma n > \sqrt{n}$. Potremo dunque scrivere:

$$(14) \quad A(x) = o(\sigma n), \quad x \in Y_3.$$

Questo risultato è indipendente dal segno di μ e vale quindi anche per $m > n$.

Possiamo allora scrivere:

$$(13'') \quad \begin{aligned} & \Sigma_2 + \Sigma_3 < \\ & < \Delta \cdot I(0, \infty) - \Delta \cdot \{ I(0, \beta) + I(\alpha, \infty) \} - \Delta \cdot \{ I(\alpha_2, \beta_2) + I(\alpha_1, \beta_1) \} - \\ & - \delta \cdot \{ I(\alpha_0, \alpha_2) + I(\beta_2, l) - I(l, \alpha_1) - I(\beta_1, \beta_0) \} + o(\sigma n), \end{aligned}$$

relazione che varrebbe evidentemente anche nel caso $m > n$, colla sola variante che il quarto termine del secondo membro assumerebbe la forma

$$\delta \cdot \{ I(\alpha_0, \alpha_1) + I(\beta_1, l) - I(l, \alpha_2) - I(\beta_2, \beta_0) \}.$$

Si constata immediatamente che il primo termine del secondo membro è nullo ed abbiamo visto, dimostrando la (11), che il secondo termine è maggiorato da una espressione del tipo $o(\sigma n)$ e pertanto può essere assorbito nell'ultimo.

Ci resta da maggiorare il terzo e il quarto termine. Poniamoli rispettivamente uguali ad H_1 e H_2 , ed avremo intanto:

$$(13) \quad \Sigma_2 + \Sigma_3 \leq H_1 + H_2 + o(\sigma n).$$

5.B₁. - Maggiorazione di H_1 .

Ricordando la (12) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} |H_1| &= \Delta \cdot |I(\alpha_2, \beta_2) + I(\alpha_1, \beta_1)| \leq \\ &\leq \Delta \cdot |I(\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2) + I(\alpha_1, \beta_1)| + 2\sigma \Delta \mu n \cdot \log(\mu/\sigma) + 4\Delta \cdot \log 2 \cdot \mu \sigma n. \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte [ricordando la (10)]:

$$\begin{aligned} H_1' &= I(\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2) + I(\alpha_1, \beta_1) = \\ &= m \cdot \log \left| \frac{m + \bar{\beta}_2}{m - \bar{\beta}_2} \frac{m - \bar{\alpha}_2}{m + \bar{\alpha}_2} \frac{m + \beta_1}{m - \beta_1} \frac{m - \alpha_1}{m + \alpha_1} \right| + n \cdot \log \left| \frac{n - \bar{\beta}_2}{n + \bar{\beta}_2} \frac{n + \bar{\alpha}_2}{n - \bar{\alpha}_2} \frac{n - \beta_1}{n + \beta_1} \frac{n + \alpha_1}{n - \alpha_1} \right| + \\ &+ \bar{\beta}_2 \cdot \log \left| \frac{m^2 - \bar{\beta}_2^2}{n^2 - \bar{\beta}_2^2} \right| + \bar{\alpha}_2 \cdot \log \left| \frac{n^2 - \bar{\alpha}_2^2}{m^2 - \bar{\alpha}_2^2} \right| + \beta_1 \cdot \log \left| \frac{m^2 - \beta_1^2}{n^2 - \beta_1^2} \right| + \alpha_1 \cdot \log \left| \frac{n^2 - \alpha_1^2}{m^2 - \alpha_1^2} \right|; \end{aligned}$$

ricordando che

$$\begin{aligned} m &= \bar{\alpha}_2 + \sigma n, & \bar{\beta}_2 &= \bar{\alpha}_2 + 2\sigma n, & \alpha_1 &= \bar{\alpha}_2 + \mu n, \\ n &= \bar{\alpha}_2 + (\mu + \sigma)n, & \beta_1 &= \bar{\alpha}_2 + (\mu + 2\sigma)n, \end{aligned}$$

otteniamo:

$$(15') \quad H_1' = \bar{\alpha}_2 \cdot \log \left| \frac{m + \bar{\beta}_2}{m + \bar{\alpha}_2} \frac{m + \beta_1}{m + \alpha_1} \frac{n + \bar{\alpha}_2}{n + \bar{\beta}_2} \frac{n + \alpha_1}{n + \beta_1} \right|^2 +$$

$$+ \mu n \cdot \log \left| \frac{n + \bar{\alpha}_2}{n + \bar{\beta}_2} \left(\frac{n + \alpha_1}{n + \beta_1} \right)^2 \frac{m + \beta_1}{m + \alpha_1} \right| + \sigma n \cdot \log \left| \left(\frac{m + \bar{\beta}_2}{n + \bar{\beta}_2} \right)^3 \left(\frac{m + \beta_1}{n + \beta_1} \right)^3 \frac{n + \alpha_1}{m + \alpha_1} \frac{n + \bar{\alpha}_2}{m + \bar{\alpha}_2} \right|.$$

Ora abbiamo:

$$\frac{m + \bar{\beta}_2}{m + \bar{\alpha}_2} = 1 + \frac{2\sigma}{2 - 2\mu - \sigma} = 1 + \sigma + \frac{2\mu\sigma + \sigma^2}{2 - 2\mu - \sigma} = 1 + \sigma + \mu \cdot O(\sigma),$$

$$\frac{m + \beta_1}{m + \alpha_1} = 1 + \frac{2\sigma}{2 - \mu - \sigma} = 1 + \sigma + \mu \cdot O(\sigma),$$

$$\frac{n + \bar{\alpha}_2}{n + \bar{\beta}_2} = 1 - \frac{2\sigma}{2 - \mu + \sigma} =$$

$$\frac{n + \alpha_1}{n + \beta_1} = 1 - \frac{2\sigma}{2 + \sigma} =$$

$$= 1 - \sigma + \mu \cdot O(\sigma),$$

$$= 1 - \sigma + O(\sigma^2),$$

$$\frac{m + \bar{\beta}_2}{n + \bar{\beta}_2} = 1 - \frac{\mu}{2 - \mu + \sigma} = 1 + O(\mu),$$

$$\frac{m + \beta_1}{n + \beta_1} = 1 + O(\mu),$$

$$\frac{n + \alpha_1}{m + \alpha_1} = 1 + O(\mu),$$

$$\frac{n + \bar{\alpha}_2}{m + \bar{\alpha}_2} = 1 + O(\mu),$$

e quindi:

$$\left(\frac{m + \bar{\beta}_2}{m + \bar{\alpha}_2} \right)^2 = 1 + 2\sigma + \mu \cdot O(\sigma),$$

$$\left(\frac{m + \beta_1}{m + \alpha_1} \right)^2 = 1 + 2\sigma + \mu \cdot O(\sigma),$$

$$\left(\frac{n + \bar{\alpha}_2}{n + \bar{\beta}_2} \right)^2 = 1 - 2\sigma + \mu \cdot O(\sigma),$$

$$\left(\frac{n + \alpha_1}{n + \beta_1} \right)^2 = 1 - 2\sigma + \mu \cdot O(\sigma),$$

onde potremo scrivere:

$$|H'_1| = \bar{\alpha}_2 \mu \cdot O(\sigma) + \mu n \cdot O(\sigma) + \sigma n \cdot O(\mu),$$

e quindi

$$|H'_1| = \mu n \cdot O(\sigma).$$

Se indichiamo con η una quantità positiva, dipendente da θ e tendente a zero per θ tendente a zero:

$$\eta = \eta(\theta) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \theta \rightarrow 0, \quad \eta = O(\theta),$$

ricordando che si ha sempre $\mu < \theta$, potremo scrivere $|H'_1| \leq \eta \sigma n$, e quindi

$$(15) \quad |H_1| \leq 2\sigma \Delta \mu n \cdot \log(\mu/\sigma) + 4\Delta \cdot \log 2 \cdot \mu \sigma n + \eta \sigma n \leq \\ \leq \eta \sigma n \cdot \log(\mu/\sigma) + 2\eta \sigma n \leq \eta \sigma n \{1 + \log(\mu/\sigma)\},$$

dove il valore di η non è naturalmente sempre lo stesso, ma risponde sempre alla definizione data.

Un ragionamento perfettamente analogo può essere svolto nel caso $m > n$, osservando che qui potremo porre:

$$n = \bar{\alpha}_2 - (\mu - \sigma)n, \quad \alpha_1 = \bar{\alpha}_2 - \mu n, \\ m = \bar{\alpha}_2 + \sigma n, \quad \beta_1 = \bar{\alpha}_2 - (\mu - 2\sigma)n, \\ \bar{\beta}_2 = \bar{\alpha}_2 + 2\sigma n,$$

e ci ritroveremo di fronte alla (15') colla sola variante del segno di μ .

5.B₂. - Maggiorazione di H_2 .

Ricordiamo che

$$|H_2| = \delta \cdot \{I(\alpha_2, \alpha_0) + I(l, \beta_2) + I(l, \alpha_1) + I(\beta_1, \beta_0)\}.$$

Ci converrà dapprima maggiorare

$$H'_2 = I(l, \alpha_0) + I(l, \beta_0) = \\ = m \cdot \log \left| \frac{m + \alpha_0}{m - \alpha_0} \frac{m + \beta_0}{m - \beta_0} \left(\frac{m - l}{m + l} \right)^2 \right| + n \cdot \log \left| \frac{n - \alpha_0}{n + \alpha_0} \frac{n - \beta_0}{n + \beta_0} \left(\frac{n + l}{n - l} \right)^2 \right| + \\ + \alpha_0 \cdot \log \left| \frac{m^2 - \alpha_0^2}{n^2 - \alpha_0^2} \right| + \beta_0 \cdot \log \left| \frac{m^2 - \beta_0^2}{n^2 - \beta_0^2} \right|.$$

Essendo

$$m = n - \mu n, \quad \alpha_0 = n - \theta' n, \quad \beta_0 = n + \theta' n,$$

si può scrivere:

$$(16') \quad H'_2 = n \cdot \log \left\{ \left(\frac{m + \alpha_0}{n + \alpha_0} \right)^2 \left(\frac{m + \beta_0}{n + \beta_0} \right)^2 \left(\frac{n + l}{m + l} \right)^2 \left(\frac{m - l}{n - l} \right)^2 \right\} - \\ - \mu n \cdot \log \left| \frac{(m + \alpha_0)(m + \beta_0)}{(m + l)^2} \frac{(m - l)^2}{(m - \alpha_0)(m - \beta_0)} \right| + \\ + \theta' n \cdot \log \left\{ \frac{m + \beta_0}{n + \beta_0} \frac{n + \alpha_0}{m + \alpha_0} \right\} + \theta' n \cdot \log \left| \frac{m - \beta_0}{m - \alpha_0} \right|.$$

Ora abbiamo:

$$\frac{m + \alpha_0}{n + \alpha_0} = 1 + O(\mu), \quad \frac{m + \beta_0}{n + \beta_0} = 1 + O(\mu), \quad \frac{n + l}{m + l} = 1 + O(\mu),$$

$$\left| \frac{m - l}{n - l} \right| = \left| \frac{1 - \mu - \{1 - \mu/2 + O(\mu^2)\}}{1 - \{1 - \mu/2 + O(\mu^2)\}} \right| = \\ = \left| \frac{-\mu + \mu/2 + O(\mu^2)}{\mu/2 + O(\mu^2)} \right| = \frac{1 + O(\mu)}{1 + O(\mu)} = 1 + O(\mu),$$

ed inoltre

$$\frac{n + \alpha_0}{m + \alpha_0} = 1 + O(\mu), \quad \frac{1}{2} < \frac{m + \alpha_0}{m + l} < \frac{m + \beta_0}{m + l} < 2,$$

$$\frac{\sigma}{\theta'} < \left| \frac{m - l}{m - \alpha_0} \right| < \frac{\theta'}{\sigma}, \quad \frac{\sigma}{2\theta'} < \frac{m - l}{m - \beta_0} < 1;$$

e abbiamo poi ancora:

$$\left| \frac{m - \beta_0}{m - \alpha_0} \right| = \frac{\theta' + \mu}{\theta' - \mu} = \frac{1 + \mu/\theta'}{1 - \mu/\theta'} = (1 + \mu/\theta') \{1 + \mu/\theta' + (\mu/\theta')^2 + \dots\},$$

se $\mu \leq \theta'/4$ potremo scrivere

$$\left| \frac{m - \beta_0}{m - \alpha_0} \right| \leq \left(1 + \frac{\mu}{\theta'} \right) \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\theta'} \right) \leq 1 + 3 \frac{\mu}{\theta'},$$

ed avremo perciò, per $\mu \leq \theta'/4$,

$$\theta' n \cdot \log \left| \frac{m - \beta_0}{m - \alpha_0} \right| \leq \theta' n \cdot 3 \frac{\mu}{\theta'} = 3\mu n,$$

e per $\mu > \theta'/4$ [essendo $|(m - \beta_0)/(m - \alpha_0)| < 2\theta'/\sigma$]:

$$\theta' n \cdot \log \left| \frac{m - \beta_0}{m - \alpha_0} \right| < 4\mu n \cdot \log \frac{2\theta'}{\sigma} < -4\mu n \cdot \log \sigma.$$

Concludendo avremo:

$$\begin{aligned} H'_2 &\leq O(\mu n) + \mu n \cdot \log \left(\frac{2\theta'}{\sigma} \right)^2 + \theta' n \cdot O(\mu) + 3\mu n + 4\mu n \cdot \log \frac{1}{\sigma} = \\ &= -6\mu n \cdot \log \sigma + O(\mu n), \end{aligned}$$

e quindi:

$$(16) \quad |H_2| < \delta H'_2 < -6\mu \delta n \cdot \log \sigma + O(\mu \delta n).$$

Questa formula vale identica anche nel caso $m > n$. Ci si perviene in modo analogo, anche tenendo conto della diversa espressione che in tal caso assume H_2 , essa però non influisce sulla forma di H'_2 , che cambiata di segno ci riporta alla (16') colla sola variante del segno di qualche termine.

Possiamo dunque concludere, tenendo conto di (13), (15) e (16), colla seguente relazione:

$$\begin{aligned} (17) \quad \sum_2 + \sum_3 &\leq \eta \sigma n \cdot \{ 1 + \log (\mu/\sigma) \} + \delta \cdot \{ -6\mu n \cdot \log \sigma + n \cdot O(\mu) \} = \\ &= \eta \sigma n \cdot \{ 1 + \log (\mu/\sigma) \} + \delta n \cdot \{ O(\mu) - 6\mu \cdot \log \sigma \} \leq \\ &\leq \eta \sigma n \cdot \{ 1 + \log (\mu/\sigma) \} + \mu \delta n \cdot (c - 6 \cdot \log \sigma) < \\ &< \eta \sigma n \cdot \{ 1 + \log (\mu/\sigma) \} - 7\mu \delta n \cdot \log \sigma. \end{aligned}$$

5.C. - Maggiorazione di \sum_n .

La funzione $A(x) = \log |(m^2 - x^2)/(n^2 - x^2)|$ è crescente e con derivata crescente nell'intervallo (α_1, n) , ed è decrescente e con derivata decrescente in valore assoluto nell'intervallo (n, β_1) . Si osservi che infatti, per $\alpha_1 \leq x \leq \beta_1$, è

$$A''(x) = -\frac{1}{(m-x)^2} - \frac{1}{(m+x)^2} + \frac{1}{(n-x)^2} + \frac{1}{(n+x)^2},$$

ed essendo $2|n-x| \leq |m-x|$, risulta

$$A''(x) > \frac{3}{4 \cdot (n-x)^2} - \frac{1}{(m+x)^2} > 0.$$

Perciò, per ogni intero $s \in J_n$ si ha:

$$A(s+1/2) < I(s, s+1),$$

e poichè i \bar{q} sono i punti medi degli intervalli unitari varrà la limitazione:

$$\sum_n \leq I(\alpha_1, \beta_1) + A(\alpha_1) + A(\beta_1)$$

e, ricordando la (14), potremo scrivere:

$$\sum_n \leq I(\alpha_1, \beta_1) + o(\sigma n).$$

Ora, tenendo presente la (10) e ponendo

$$n = m + \mu n, \quad \alpha_1 = m + \mu n - \sigma n, \quad \beta_1 = m + \mu n + \sigma n,$$

abbiamo:

$$I(\alpha_1, \beta_1) = m \cdot \log \left\{ \left(\frac{m + \beta_1}{m + \alpha_1} \right)^2 \left(\frac{n + \alpha_1}{n + \beta_1} \right)^2 \right\} + \\ + \mu n \cdot \log \left| \frac{m + \beta_1}{m + \alpha_1} \left(\frac{n + \alpha_1}{n + \beta_1} \right)^2 \frac{m - \beta_1}{m - \alpha_1} \right| + \sigma n \cdot \log \left| \frac{m - \beta_1}{n - \beta_1} \frac{m - \alpha_1}{n - \alpha_1} \frac{m + \beta_1}{n + \beta_1} \frac{m + \alpha_1}{n + \alpha_1} \right|.$$

Otteniamo poi subito:

$$\frac{m + \beta_1}{m + \alpha_1} = 1 + \frac{2\sigma}{2 - \mu - \sigma} = 1 + \sigma + \mu \cdot O(\sigma), \quad \frac{n + \alpha_1}{n + \beta_1} = 1 - \sigma + \mu \cdot O(\sigma),$$

$$\frac{m - \beta_1}{m - \alpha_1} = \frac{\mu + \sigma}{\mu - \sigma} = 1 + \frac{2\sigma}{\mu - \sigma} \leq 1 + 3 \frac{\sigma}{\mu} \leq 2,$$

$$1 < \frac{m - \beta_1}{n - \beta_1} = \frac{\mu + \sigma}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} + 1, \quad 1 < \frac{m - \alpha_1}{\alpha_1 - n} = \frac{\mu}{\sigma} - 1,$$

$$\frac{m + \beta_1}{n + \beta_1} = 1 + O(\mu), \quad \frac{m + \alpha_1}{n + \alpha_1} = 1 + O(\mu),$$

e quindi:

$$(18) \quad \sum_n < \mu n \cdot O(\sigma) + \mu n \cdot 3\sigma/\mu + \sigma n \cdot \log\{(\mu^2/\sigma^2) - 1\} + \sigma n \cdot O(\mu) + o(\sigma n) \leq \\ \leq O(\sigma n) + \sigma n \cdot \log(\mu/\sigma)^2 \leq \sigma n \cdot \{c + 2 \log(\mu/\sigma)\} \leq -(5/2)\sigma n \cdot \log \sigma.$$

La (18) vale anche nel caso $m > n$, e vi si perviene con calcoli del tutto analoghi tenendo conto del cambiamento del segno di μ .

Possiamo ora scrivere, in base alla (9'), alla (11), alla (17) e alla (18),

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} &< o(\sigma n) - 7\mu\delta n \cdot \log \sigma + \eta\sigma n \cdot \{1 + \log(\mu/\sigma)\} - (5/2)\sigma n \cdot \log \sigma \leq \\ &\leq -7\mu\delta n \cdot \log \sigma - (5/2)\sigma n \cdot \log \sigma + \eta\sigma n \cdot (1 - \log \sigma) \leq \\ &\leq -7\mu\delta n \cdot \log \sigma - 3\sigma n \cdot \log \sigma = -3n \cdot \log \sigma \cdot \{\sigma + (7/3)\mu\delta\} = \\ &= -3n_n \cdot \{192 \cdot \gamma_h^{2/3} + (7/3)\mu \cdot (\varepsilon_n + 24^{-1} \gamma_h^{1/3})\} \cdot \log(192 \cdot \gamma_h^{2/3}) \leq \\ &\leq -3n_n \cdot \{\gamma_h^{2/3} \cdot |\log \gamma_h|^{1/4} + 3\mu \cdot (\varepsilon_n + 24^{-1} \gamma_h^{1/3})\} \cdot \log \gamma_h^{2/3} < \\ &< -n_n \cdot \{\sqrt[3]{\gamma_h^2} \cdot |\log \gamma_h| + \mu \cdot (6\varepsilon_n + 4^{-1} \sqrt[3]{\gamma_h})\} \log \gamma_h. \end{aligned}$$

Con questo la (9) è dimostrata e con essa il Lemma B.

§ 6. - Dimostrazione del Lemma A.

Passiamo adesso alla dimostrazione del Lemma A.

Sappiamo che la serie (1) possiede una successione di indici $\{n_h\}$ tale che, al variare di m in ciascuno degli intervalli I_h , la successione corrispondente $\text{Re}(a_m \cdot e^{i\beta_h})$ presenta variazioni di segno condizionate dalla $\psi_h(u)$, quali sono fissate dalle ipotesi del Lemma.

Abbiamo inoltre costruito la funzione intera

$$(6) \quad g(z) = \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{z^2}{\varrho^2}\right),$$

e la funzione $\varphi(z)$ ad essa associata, la quale ammette eventuali punti singolari solo sull'arco C :

$$|z| = 1, \quad -\pi\Delta \leq \arg z \leq \pi\Delta;$$

mentre la (6) gode inoltre della proprietà (7).

Volendo adesso dimostrare che la $w(z)$ ammette un punto singolare sull'arco C , basterà far vedere che la funzione

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot g(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) \cdot z^n$$

ha come punto singolare il punto $z = 1$, e ne seguirà senz'altro il nostro asserito, per il ben noto teorema di moltiplicazione di HADAMARD ⁽¹⁰⁾.

D'altra parte sappiamo che, posto

$$c_{n,m} = \frac{n! n!}{(n-u)! (n+u)!}, \quad S_h(\theta) = \sum_{m \in I_h} c_{n_h, m} \cdot A(m),$$

se

$$(19) \quad \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} |A(n_h)|^{1/n_h} = 1, \quad \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} |S_h(\theta)|^{1/n_h} \geq 1,$$

allora $z = 1$ è un punto singolare ⁽¹¹⁾ per la $F(z)$.

⁽¹⁰⁾ Si veda, ad esempio, L. BIEBERBACH, op. cit. in ⁽¹⁾, teorema (1, 4, I), pag. 21 e seguenti.

⁽¹¹⁾ Poichè, ovviamente, $\overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} |A(n_h)|^{1/n_h} \leq 1$, questa asserzione è equivalente al teorema (1, 7, II), pag. 38. di op. cit. in ⁽¹⁾, ove si noti che il primo membro di (1. 7. 8) non può mai essere > 1 a causa di (1. 6. 1).

La prima della (19) segue da (2), (a) e (7); per dimostrare la seconda consideriamo la somma

$$S_h(\theta, \beta_h) = \sum_{m \in I_h} c_{n_h, m} \cdot \operatorname{Re} \{ a_m \cdot g(m) \cdot e^{i\beta_h} \},$$

che si può scrivere

$$g(n_h) \cdot \operatorname{Re} (a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h}) + \sum_{\substack{m \in I_h \\ m \neq n_h}} c_{n_h, m} \cdot g(m) \cdot \operatorname{Re} (a_m \cdot e^{i\beta_h}),$$

e distribuiamo i termini di quest'ultima sommatoria in due classi a seconda che

$$|\operatorname{Re}(a_m \cdot e^{i\beta_h})| > \psi_h(u), \quad |\operatorname{Re}(a_m \cdot e^{i\beta_h})| \leq \psi_h(u).$$

Le ψ_h -variazioni di segno possono essere introdotte esclusivamente da termini che presentano la prima circostanza, ed eventualmente dal termine di posto n_h .

Possiamo adesso scrivere

$$\begin{aligned} S_h(\theta, \beta_h) &= g(n_h) \cdot \{ \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h}) + \sum c_{n_h, m} \cdot [g(m)/g(n_h)] \cdot \operatorname{Re}(a_m \cdot e^{i\beta_h}) \} = \\ &= g(n_h) \cdot \{ \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h}) + \sum_1 + \sum_2 \}, \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con \sum_1 e \sum_2 rispettivamente le somme dei termini della prima classe e della seconda classe. È quindi:

$$|S_h(\theta, \beta_h)| \geq |g(n_h)| \cdot \{ |\operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h}) + \sum_1| - |\sum_2| \}.$$

Osservando che i termini di \sum_1 hanno tutti lo stesso segno positivo di $\operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h})$, per il modo con cui si è costruita la $g(z)$, potremo anche scrivere:

$$|S_h(\theta, \beta_h)| \geq |g(n_h)| \cdot \{ \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta_h}) - |\sum_2| \}.$$

Ora abbiamo:

$$\sum_2 = 0 \quad \text{se } \mu < \gamma_h^{1/2},$$

$$|\sum_2| \leq \sum c_{n_h, m} \cdot |g(m)/g(n_h)| \cdot \psi_h(u) \quad \text{in generale,}$$

ed inoltre ⁽¹²⁾

$$c_{n_h, m} < e^{-u^2/n_h} / \sqrt{1 - u^2/n_h^2} < 2e^{-u^2/n_h},$$

e quindi il termine generale della \sum_2 non supera, per il Lemma B (si osservi che quando è $\mu > \sqrt{\gamma_h}$ è anche $\mu > 3\sigma_h = 3 \cdot 192 \cdot \gamma_h^{2/3}$, almeno per $h \geq h_0$),

$$2e^{-u^2/n_h} \cdot e^{i\beta n_h} \cdot (K/n_h) \cdot e^{u^2/n_h - \phi n_h} \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta n_h}) \leq 2(K/n_h) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta n_h}).$$

Ora, poichè il numero dei termini di \sum_2 non supera evidentemente il numero complessivo degli interi in I_h , che a sua volta è minore di $2\theta n_h + 1$, avremo:

$$|\sum_2| < 2K \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta n_h}) \cdot (2\theta n_h + 1)/n_h.$$

Fissato comunque K , disponendo dell'arbitrarietà di θ , potremo fare in modo che risulti:

$$|\sum_2| < \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta n_h})/2,$$

e sarà quindi

$$S_h(\theta, \beta_n) \geq |g(n_h)| \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta n_h})/2.$$

Ora abbiamo, per la (7) e per le ipotesi del Lemma,

$$|g(n_h)|^{1/n_h} \rightarrow 1, \quad \{\operatorname{Re}(a_{n_h} \cdot e^{i\beta n_h})\}^{1/n_h} \rightarrow 1, \quad \text{per } h \rightarrow \infty,$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} |S_h(\theta)|^{1/n_h} &= \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \left| \sum_{m \in I_h} c_{n_h, m} \cdot A(m) \right|^{1/n_h} = \\ &= \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \left| \sum_{m \in I_h} c_{n_h, m} \cdot A(m) \cdot e^{i\beta n_h} \right|^{1/n_h} \geq \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} |S_h(\theta, \beta_n)|^{1/n_h} \geq 1, \end{aligned}$$

e con ciò il Lemma A è completamente dimostrato.

⁽¹²⁾ Si veda: G. RICCI, op. cit. in (7), pp. 133-134.