Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 43-47

ROBERTO CONTI (*)

Sulla t_∞-similitudine tra matrici e l'equivalenza asintotica dei sistemi differenziali lineari. (**)

1. – In una recente Nota (1) ho introdotto il concetto di t_∞-similitudine tra matrici, nel seguente modo.

Indichiamo con $\mathfrak{M}$ l'insieme delle matrici $n \times n$, reali o complesse, $M(t)$, funzioni della variabile reale t, misurabili e sommabili in ogni intervallo finito del semiasse $t_0 \leqslant t < +\infty$.

Indichiamo poi con $\mathfrak{T}$ l'insieme delle matrici $T(t)$, reali o complesse, $n \times n$, funzioni di t, assolutamente continue in ogni intervallo finito del semiasse $t_0 \leqslant t$, limitate per $t_0 \leqslant t < +\infty$, dotate di inversa $T^{-1}(t)$ pure limitata per $t_0 \leqslant t < +\infty$.

Diciamo che una matrice $A(t) \in \mathfrak{M}$ è t_∞-*simile* ad una matrice $B(t) \in \mathfrak{M}$ se esiste una $T(t) \in \mathfrak{T}$ per cui valga la disuguaglianza

$$\int_{t_0}^{+\infty} \| \dot{T}(t) + T(t) \cdot A(t) - B(t) \cdot T(t) \| \, \mathrm{d}t < +\infty, \tag{1}$$

dove $\| \ \|$ sta ad indicare la norma della matrice $\dot{T} + TA - BT$, cioè la somma dei moduli degli elementi di tale matrice, e dove $\dot{T}(t)$ sta per $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$.

(*) Professore str. dell'Università di Catania. Indirizzo: Seminario Matematico dell'Università, Palazzo delle Scienze, Catania, Italia.

(**) Ricevuto il 4-III-1957.

(1) R. CONTI, *Sulla t-similitudine tra matrici e la stabilità dei sistemi differenziali lineari*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **19** (1955), 247-250; cfr. p. 250. Indicherò nel seguito con [N] questa Nota.

La relazione di t_∞-similitudine è riflessiva, simmetrica e transitiva (cfr. [N]); l'ordinaria relazione di similitudine tra matrici rientra in quella di t_∞-similitudine come caso particolare, corrispondente ad A, B, T costanti e $TA - BT = 0$ (matrice nulla $n \times n$).

Come ho mostrato in [N] la relazione di t_∞-similitudine è utile nello studio della stabilità dei sistemi differenziali lineari, poichè si ha che se due sistemi

$$\text{(A)} \qquad \dot{y} = A(t) \cdot y,$$

$$\text{(B)} \qquad \dot{x} = B(t) \cdot x$$

(y, x matrici $n \times 1$) sono t_∞-simili [vale a dire sono t_∞-simili le rispettive matrici $A(t)$, $B(t)$] ed uno di essi è stabile uniformemente oppure stabile in senso stretto (²) anche l'altro è stabile uniformemente oppure stabile in senso stretto, rispettivamente (³).

Altre applicazioni della t_∞-similitudine allo studio della stabilità sono contenute in un recente lavoro di U. Barbuti (⁴).

(²) Per la nomenclatura si veda ad esempio: G. Sansone e R. Conti, **Equazioni differenziali non lineari** (Monografie Matematiche del C.N.R., n. **3**), Ediz. Cremonese, Roma 1956; cfr. Cap. IX. Indicherò nel seguito con [M] questa Monografia.

(³) La matrice T, che lega la A e la B mediante la (1) potrà coincidere in particolare con una di queste, ad esempio la A. Si ha allora il Teorema 9 della mia Memoria: *Sulla stabilità dei sistemi di equazioni differenziali lineari*, Riv. Mat. Univ. Parma **6** (1955), 3-35.

In tal caso però non potrà essere simultaneamente $B = 0$ (matrice nulla) poichè, come mi ha fatto recentemente notare il prof. Aurel Wintner, che qui desidero ringraziare, *non* esistono matrici $A(t) \in \mathfrak{C}$ tali che

$$(*) \qquad \int_{t_0}^{+\infty} \| \dot{A}(t) + A^2(t) \| \, dt < +\infty .$$

Infatti se A soddisfacesse la $(*)$, stante la supposta limitatezza di A^{-1} anche la

$$A^{-1}(\dot{A} + A^2)A^{-1} = A^{-1}\dot{A}A^{-1} + I = \mathrm{d}(-A^{-1})/\mathrm{d}t + I \qquad (I \text{ matrice unitaria})$$

dovrebbe soddisfare $(*)$ e quindi essere integrabile in $(t_0, +\infty)$. Ma allora $-A^{-1} + tI$ dovrebbe tendere ad un limite finito per $t \to +\infty$ e la A^{-1} non potrebbe restare limitata.

Da questa osservazione segue che il Teorema 6 della Memoria ora citata (p. 21) ed il «simmetrico» Teorema 6′ non sono mai applicabili. Ciò non invalida tuttavia il resto della Memoria, dal quale detti teoremi sono indipendenti.

(⁴) U. Barbuti, *Sulla nozione di t_∞-similitudine e sulla stabilità dei sistemi differenziali lineari*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **12** (1957), 61-66.

Con questa Nota mostro come la t_∞-similitudine può essere utilmente impiegata anche in connessione con il concetto di equivalenza asintotica fra sistemi lineari.

2. – Ricordo perciò (cfr. ad esempio [M], Cap. XI, § 4) che i due sistemi (A) e (B) si dicono *asintoticamente equivalenti* se è possibile stabilire una corrispondenza bicontinua del piano $t = t_0$ in sè tale che, detti y_0, x_0 due punti omologhi in questa e dette $y(t)$, $x(t)$ le soluzioni di (A), (B), rispettivamente, con $y(t_0) = y_0$, $x(t_0) = x_0$, si abbia

$$\lim_{t \to +\infty} \| x(t) - y(t) \| = 0.$$

Possiamo allora dimostrare il

Teorema 1. *Se $A(t) = A$ è costante ed il sistema* (A) *è* (*uniformemente*) *stabile, se* (A) *e* (B) *sono t_∞-simili e se la* (1) *vale per una $T(t)$ per la quale esista e sia non degenere*

$$T(+\infty) \equiv \lim_{t \to +\infty} T(t), \qquad \det T(+\infty) \neq 0, \tag{2}$$

allora, (A) *e* (B) *sono asintoticamente equivalenti.*

Mediante la $T(t)$ ora detta effettuiamo per ciascun $t \geqslant t_0$ la trasformazione

$$x = T(t) \cdot z$$

la quale muta ogni $y(t)$ soluzione di (A) in una $z(t)$ soluzione del sistema

$$\dot{z} = A\,z - T^{-1}(\dot{T} + TA - BT)z\,. \tag{C}$$

Poichè T^{-1} è limitata e vale la (1) si conclude, in virtù di un teorema di H. WEYL (cfr. ad esempio [M], p. 637), che (A) e (C) sono asintoticamente equivalenti, ed inoltre (C) è uniformemente stabile, come (A).

D'altronde se $z(t)$ è una qualunque soluzione di (C), anche $T(+\infty) \cdot z$ è una soluzione di (C) e poichè $x = T(t) \cdot z$ è una soluzione di (B) si ha

$$x - T(+\infty) \cdot z = [T(t) - T(+\infty)]\, z$$

e, per essere z limitata, da (2) segue che anche (B) e (C) sono asintoticamente equivalenti.

Poichè l'equivalenza asintotica è una relazione transitiva, l'asserto è provato.

3. – Nell'enunciato precedente la $A(t)$ è supposta costante, ma più in generale si ha il

Teorema 2. *Se, restando inalterate le altre ipotesi del Teorema* 1, *il sistema* (A) *è riducibile e* (*uniformemente*) *stabile, allora* (A) *e* (B) *sono ancora asintoticamente equivalenti.*

Basta per questo osservare che l'essere (A) riducibile (cfr. [M], p. 556) significa che esso è t_∞-simile ad un sistema $\dot{z} = Cz$ con matrice C costante, e per la già ricordata transitività della relazione di t_∞-similitudine segue l'asserto in virtù del Teorema 1.

4. – Il Teorema 2 include un risultato di A. Wintner contenuto nel lavoro *On Criteria for Linear Stability* (in corso di stampa nel « J. Math. Mech. »), lavoro del quale ho potuto vedere le bozze di stampa grazie alla cortesia del suo Autore. Detto risultato si ottiene dal Teorema 2 supponendo [A(t) reale ed inoltre] (A) stabile e tale che

$$-\infty < \liminf_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds \leqslant +\infty \tag{3}$$

ed ammettendo che esista una $T(t) \in \mathfrak{T}$ tale che

$$T(t) \cdot A(t) - B(t) \cdot T(t) = 0, \qquad \int_{t_0}^{+\infty} \| \dot{T}(t) \|\, dt < +\infty. \tag{4}$$

Infatti la supposta stabilità di (A) unita alla (3) implica che il sistema (A) è uniformemente stabile (anzi addirittura stabile in senso stretto, cfr. [M], p. 598), mentre le (4) sono ovviamente un caso particolare della (1).

Il seguente esempio fa poi vedere che esistono coppie di sistemi (A), (B) ai quali è applicabile il Teorema 2, ma non il risultato di Wintner ora ricordato. Se si prende ($n = 2$)

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\operatorname{sen} t}{t} + \dfrac{\cos t \cdot \operatorname{sen}^2 t}{t^2} & \dfrac{\operatorname{sen}^3 t}{t^2} \\[2ex] \dfrac{\cos t}{t} - \dfrac{\cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t}{t^2} & -\dfrac{\cos t \cdot \operatorname{sen}^2 t}{t^2} \end{pmatrix}, \qquad B(t) = 0,$$

si verifica senza difficoltà che i corrispondenti sistemi (A), (B) sono t_∞-simili per mezzo della matrice

$$T(t) = A(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cosicchè (A) è stabile in senso stretto ed asintoticamente equivalente al sistema $\dot{x} = 0$; inoltre vale la (3) poichè $\mathrm{tr}\, A(t) = -(\mathrm{sen}\, t)/t$, ma non valgono nè la prima nè la seconda delle (4).

5. – Infine, un caso in cui la $A(t)$ non è costante e neppure, necessariamente, riducibile è offerto dal

Teorema 3. *Le altre ipotesi del Teorema* 1 *restando inalterate, sia* $A(t) \in \mathfrak{S}$ *e sia*

$$\int_{t_0}^{+\infty} \| \dot{A}(t) \| \, dt < +\infty .$$

Se p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ *delle radici caratteristiche di* $A(t)$ *restano semplici e mantengono parte reale nulla per* $t_0 \leqslant t < \infty$ *mentre le rimanenti* $n - p$ *radici mantengono parte reale* $\leqslant -a^2 < 0$, *allora* (A) *e* (B) *sono asintoticamente equivalenti.*

La dimostrazione si fa come per il Teorema 1, salvo adoperare in luogo del teorema di H. Weyl un precedente mio risultato (5).

Summary.

Some criteria for asymptotic equivalence between linear differential systems are given, based upon the concept of «t_∞-similarity».

---

(5) R. Conti, *Sulla equivalenza asintotica dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **41** (1955), 95-103.