Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 27-41

Al Prof. BRUTO CALDONAZZO

DEMORE QUILGHINI (*)

Sull'equilibrio spontaneo di una massa fluida soggetta alla propria gravitazione. (**)

1. - Introduzione.

Una massa stellare, con opportune schematizzazioni, può essere assimilata ad un sistema materiale fluido isolato nello spazio e quindi con pressione necessariamente nulla sulla superficie che lo limita. Ha perciò interesse nell'astrofisica teorica determinare i tipi di fluido per i quali è possibile, una volta assegnate le forze di massa agenti, una configurazione di equilibrio in assenza di pressione sulla superficie limitante le masse fluide.

In questo lavoro, nell'ipotesi che le forze di massa agenti sulle particelle fluide siano le mutue attrazioni gravitazionali di tipo newtoniamo e che il fluido sia barotropico, indicate con ϱ la densità e con p la pressione in un generico punto della massa fluida, determineremo le condizioni da imporre alla funzione

$$p = p(\varrho) \qquad \text{(equazione di stato)} \tag{1}$$

affinchè sia possibile una tale configurazione di equilibrio. Per particolari determinazioni della (1) il problema è stato largamente studiato.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico U. DINI della Università, via Alfani 81, Firenze, Italia.

(**) Ricevuto il 12-IV-1957.

H. LEMKE [1] (¹), assumendo la (1) nella forma

$$p = k\varrho \qquad (k \text{ costante positiva}),$$

dopo aver osservato che per masse fluide di questo tipo (gas perfetti in condizioni isoterme) non è possibile una configurazione di equilibrio con pressione nulla sulla superficie che le limita, studia l'andamento della pressione e della densità nell'ipotesi che la massa fluida possa invadere tutto lo spazio. Più recentemente R. EMDEN [2], assumendo la (1) nella forma

$$p = k\,\varrho^{1+(1/n)} \qquad (k \text{ ed } n \text{ costanti positive}),$$

trova che condizione necessaria e sufficiente affinchè una massa fluida di questo tipo (gas politropici nell'ipotesi che non vi sia scambio di calore tra la massa gassosa e l'ambiente esterno) stia in equilibrio isolata nello spazio è che risulti $n < 5$.

Generalizzando il problema di EMDEN, dimostreremo (n. **4**) che condizione necessaria ad una tale configurazione di equilibrio per una massa di fluido barotropico, sotto l'azione della propria gravitazione, è che si possa determinare, nell'intervallo in cui è definita la (1), almeno un sotto intervallo I_ϱ tale che per $\varrho \in I_\varrho$ risulti:

$$p(\varrho) < \frac{5}{6}\,\varrho\,\frac{\mathrm{d}p(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho}\,. \tag{2}$$

Questa, come vedremo (n. **4**), implica la seguente limitazione per la pressione:

$$p < \frac{p(\varrho_1)}{\varrho_1^{6/5}}\,\varrho^{6/5} \qquad (\varrho_1 = \max \varrho, \qquad \varrho \in I_\varrho)\,.$$

Dimostreremo inoltre (n. **5**) che, se la (2) è verificata per tutti i valori di ϱ per cui è definita la (1), allora la condizione è anche sufficiente (²). Come applicazione dei risultati ottenuti esamineremo (n. **6**) il caso di un fluido reale retto dall'equazione di stato di VAN DER WAALS e passeremo infine (n. **7**) a considerare il problema per una distribuzione stratiforme della materia.

(¹) I numeri in neretto e in parentisi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

(²) Come immediatamente si vede, il caso di EMDEN rientra nelle nostre condizioni; in questa ipotesi, infatti, la (2) si scrive $n/(n+1) < 5/6$, e quindi $n < 5$ per ogni valore di ϱ.

2. – Posizione del problema.

Qui e per il seguito diremo che un sistema materiale fluido sta in una *configurazione di equilibrio spontaneo*, per effetto di assegnate forze di massa, quando sta in equilibrio totalmente distribuito al finito con pressione nulla sulla superficie che lo limita.

Una massa fluida in equilibrio per effetto della propria gravitazione e di una pressione costante (necessariamente nulla se il sistema è isolato) sulla superficie che la limita assume necessariamente una configurazione sferica [**3**]. Perciò nell'ipotesi dell'equilibrio, spontaneo o no, la distribuzione con simmetria sferica è caratteristica per il potenziale specifico gravitazionale $U(P)$, per la pressione $p(P)$ e per la densità $\varrho(P)$ che risultano quindi funzioni della distanza r del punto P dal centro O della sfera fluida. Così, tenuto conto della simmetria sferica, l'equazione di Poisson, l'equazione di stato e l'equazione dell'idrostatica nella forma

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$$

permettono di scrivere, indicata con f la costante gravitazionale, l'equazione differenziale del 2° ordine, nell'incognito potenziale $U(r)$,

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi f\cdot\varrho(U),$$

con le condizioni

$$U(0) = U_0 \quad (0 < U_0 < +\infty), \qquad \lim_{r\to 0}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = 0 \text{ (}^3\text{)}.$$

Noti teoremi della teoria del potenziale gravitazionale [**4**] assicurano la esistenza e l'unicità dell'integrale della (I), partendo dalle condizioni assegnate, comunque sia $\varrho(U)$ funzione limitata ed integrabile di U.

Così la (I), l'equazione di stato e quella dell'idrostatica permettono di determinare U, p e ϱ in funzione di r.

---

(3) Quest'ultima condizione, come ha fatto osservare G. Sansone [**5**], segue direttamente dalla (I) e dalla condizione $U(0) = U_0$ $(0 < U_0 < +\infty)$.

Dal teorema di LICHTENSTEIN [**3**] si ha poi

$$\frac{dU}{dr} \leqslant 0, \qquad \frac{d\varrho}{dr} \leqslant 0$$

e dall'equazione dell'idrostatica segue

$$\frac{dp}{dr} \leqslant 0,$$

cioè le funzioni $U(r)$, $\varrho(r)$ e $p(r)$ crescono verso l'interno della sfera e raggiungono l'unico loro massimo nel centro. Inoltre, poichè dal teorema di derivazione delle funzioni composte si ha

$$\frac{dp}{dr} = \frac{dp}{d\varrho}\,\frac{d\varrho}{dr},$$

segue che, in condizioni di equilibrio, deve aversi

$$\frac{dp}{d\varrho} > 0,$$

cioè $p(\varrho)$ deve essere una funzione crescente della densità.

Nel caso di EMDEN la (I), posto $\Phi(r) = (n+1)k^{n/(n+1)}\,p^{1/(n+1)}$, può essere scritta:

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{d\Phi}{dr}\right) = -\,\frac{4\pi f}{\{(n+1)k\}^n}\,\Phi^n,$$

con le condizioni

$$\Phi(0) = \Phi_0 \qquad (0 < \Phi < +\infty), \qquad\qquad \lim_{r\to 0}\frac{d\Phi}{dr} = 0\,.$$

Poichè, in questo caso, $\Phi(r)$ è proporzionale ad una potenza ad esponente positivo di p, un eventuale zero di $\Phi(r)$ (per r finito) corrisponde all'equilibrio spontaneo. Nel caso generale, posto $\Phi = \int \frac{dp}{\varrho} + c$ (con c costante), la (I_1) si scrive [**6**]:

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{d\Phi}{dr}\right) = -\,4\pi f\cdot\varrho(\Phi),$$

con le solite condizioni.

Giova osservare però che un eventuale zero di $\Phi(r)$ a distanza finita può non corrispondere all'equilibrio spontaneo. Per rendercene conto basta pensare al caso dei gas perfetti in condizioni isotermiche. In questa ipotesi si ha, infatti,

$$\Phi(r) = \log\{p(r)/p_\Sigma\}^k,$$

essendo p_Σ la pressione sulla superficie Σ limitante la massa fluida. Un eventuale zero a distanza finita per $\Phi(r)$ fa corrispondere a $p(r)$ il valore p_Σ che, come ho fatto notare in un precedente lavoro [7] e come del resto segue dai citati lavori di LEMKE e di EMDEN, non può essere nulla, con che l'impossibilità di una configurazione di equilibrio spontaneo nonostante l'annullarsi di Φ sulla superficie Σ (4).

3. – Una identità integrale.

Pensiamo ad una sfera fluida in equilibrio, spontaneo o no. Indichiamo con Σ_r una generica superficie (sferica) di centro O e raggio r, con $\mathrm{d}M_r = 4\pi\varrho r^2\cdot\mathrm{d}r$ la massa contenuta nello strato sferico di spessore $\mathrm{d}r$ e limitato dalle superficie sferiche concentriche Σ_r e Σ_{r+dr}, e con M_r la massa contenuta all'interno di Σ_r. Con queste posizioni, poichè la forza specifica di massa agente a distanza r da O è il gradiente del potenziale specifico gravitazionale, si ha:

$$f\frac{M_r}{r^2} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$$

e quindi, tenuto conto della equazione dell'idrostatica in forma differenziale,

$$f\frac{M_r}{r^2} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}. \tag{3}$$

Moltiplicando ambo i membri per $4\pi\varrho r^3\cdot\mathrm{d}r$, tenuto conto dell'espressione del $\mathrm{d}M_r$, otteniamo

$$f\frac{M_r\cdot\mathrm{d}M_r}{r} = -4\pi r^3\cdot\mathrm{d}p,$$

---

(4) Noti risultati assicurano che la $\Phi(r)$ non può avere zeri internamente a Σ.

ed anche

$$\frac{1}{2} f \frac{\mathrm{d} M_r^2}{r} = -4\pi r^3 \cdot \mathrm{d}p \,.$$

Da questa, integrando ambo i membri tra R_1 ed R_2, con R_1 ed R_2 minori o al più eguali al raggio R della superficie Σ che limita la massa fluida, si ha

$$\frac{1}{2} f \frac{M_{R_2}^2}{R_2} - \frac{1}{2} f \frac{M_{R_1}^2}{R_1} + \frac{1}{2} f \int_{R_1}^{R_2} \frac{M_r^2}{r^2} \mathrm{d}r = -4\pi R_2^3 \cdot p(R_2) + 4\pi R_1^3 \cdot p(R_1) + 12\pi \int_{R_1}^{R_2} p r^2 \,\mathrm{d}r,$$

ed anche, tenuto nuovamente conto della (3) e dell'espressione del $\mathrm{d}M_r$,

$$\frac{1}{2} f \frac{M_{R_2}^2}{R_2} - \frac{1}{2} f \frac{M_{R_1}^2}{R_1} - \int_{R_1}^{R_2} M_r \frac{1}{\varrho} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho} \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r = \tag{4}$$

$$= -4\pi R_2^3 \cdot p(R_2) + 4\pi R_1^3 \cdot p(R_1) + 3 \int_{R_1}^{R_2} \frac{p}{\varrho} \,\mathrm{d}M_r \,.$$

Avendosi poi

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{p}{\varrho} \,\mathrm{d}M_r = M_{R_2} \frac{p(R_2)}{\varrho(R_2)} - M_{R_1} \frac{p(R_1)}{\varrho(R_1)} - \int_{R_1}^{R_2} M_r \frac{1}{\varrho} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho} \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r + \int_{R_1}^{R_2} M_r \frac{p}{\varrho^2} \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r,$$

sostituendo nella (4), otteniamo l'identità integrale cercata:

$$\frac{1}{2} f \frac{M_{R_2}^2}{R_2} - \frac{1}{2} f \frac{M_{R_1}^2}{R_1} + 4\pi \left\{ R_2^3 \cdot p(R_2) - R_1^3 \cdot p(R_1) \right\} - \tag{II}$$

$$- 3 \left\{ M_{R_2} \frac{p(R_2)}{\varrho(R_2)} - M_{R_1} \frac{p(R_1)}{\varrho(R_1)} \right\} = 3 \int_{R_1}^{R_2} M_r \cdot \left(\frac{p}{\varrho^2} - \frac{5}{6} \frac{1}{\varrho} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho} \right) \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r \,.$$

4. – **Teorema I.**

Condizione necessaria perchè una massa di fluido barotropico sia in equilibrio spontaneo per effetto della propria gravitazione è che si possa determinare, nell'intervallo in cui è definita $p(\varrho)$ come funzione di ϱ, un sottointervallo I_ϱ tale che per $\varrho \in I_\varrho$ risulti

$$p(\varrho) < \frac{5}{6} \varrho \frac{\mathrm{d}p(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} \,. \tag{2}$$

Osserviamo che l'equazione dell'idrostatica $U - U_0 = \int\limits_{\varrho_0}^{\varrho} (1/\varrho)\, \mathrm{d}p$ dà una prima condizione necessaria all'equilibrio spontaneo. Infatti, in questa ipotesi, la massa M è totalmente distribuita al finito e perciò il potenziale specifico gravitazionale U è ovunque finito, esiste quindi una costante positiva k per la quale si ha

$$(5) \qquad \left| \int\limits_{\varrho_0}^{\varrho} (1/\varrho)\, \mathrm{d}p \right| < k\,.$$

Perciò, indicando con ϱ_Σ il valore della densità in superficie, tenuto conto che in condizioni di equilibrio spontaneo si ha $p(\varrho_\Sigma) = 0$, dalla (5) e dal criterio per l'esistenza degli integrali impropri [**9**, p. 210] otteniamo, anche per $\varrho_\Sigma = 0$, $\lim\limits_{\varrho \to \varrho_\Sigma} \{ p(\varrho)/\varrho \} = 0$. Tenendo conto di quanto ora osservato e che $M_r = O(r^3)$, posto $R_1 = 0$ e $R_2 = R$ nella (II), la (II) stessa si scrive:

$$\frac{1}{2} f \frac{M^2}{R} = 3 \int\limits_0^R M_r \cdot \left(\frac{p}{\varrho^2} - \frac{5}{6} \frac{1}{\varrho} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho} \right) \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r}\, \mathrm{d}r\,.$$

Poichè il primo membro di quest'ultima è positivo, tale deve essere il secondo membro, e poichè $\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}r$, per $r \neq 0$, è sempre negativa, deve esistere un intervallo (r_1, r_2) tale che per $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ si abbia

$$(6) \qquad \frac{p}{\varrho^2} - \frac{5}{6} \frac{1}{\varrho} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho} < 0\,.$$

Posto ora $\varrho_1 = \varrho(r_1)$ e $\varrho_2 = \varrho(r_2)$, $\varrho_1 > \varrho_2$, essendo $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\varrho > 0$, resta provata l'esistenza di un sottointervallo I_ϱ tale che per ogni $\varrho \in I_\varrho$ valga la (2).

Corollario. *In condizioni di equilibrio spontaneo per ogni $\varrho \in I_\varrho$ si ha per la pressione p la limitazione*:

$$p < \frac{p_1}{\varrho_1^{6/5}} \varrho^{6/5} \qquad [p_1 = p(\varrho_1), \qquad \varrho_1 = \max_{\varrho \in I_\varrho} \varrho]\,.$$

Dalla (2) si ha infatti

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} > \frac{6}{5} \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho}$$

ed integrando rispetto a ϱ in I_ϱ, tenuto conto della (1), della definizione di ϱ_1 e che $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\varrho > 0$, segue il corollario.

5. – Teorema II.

Condizione sufficiente affinchè una massa fluida M (finita) costituita da un fluido barotropico stia in equilibrio spontaneo per effetto della propria gravitazione è che, per ogni valore di ϱ per cui è definita $p(\varrho)$, risulti:

$$(2) \qquad p(\varrho) < \frac{5}{6}\,\varrho\,\frac{\mathrm{d}p(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}p(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} > 0\right).$$

Pensiamo ad una massa fluida in equilibrio per effetto della propria gravitazione ed, eventualmente, di una pressione $p(R)$, sulla superficie Σ di raggio R che la limita. In questa ipotesi la (II), valida in condizioni di equilibrio spontaneo o no, posto $R_1 = 0$, $R_2 = R$, si scrive:

$$(\mathrm{II}_1) \qquad \frac{1}{2}\,f\,\frac{M^2}{R} + p(R)\left\{4\pi R^3 - \frac{3M}{\varrho(R)}\right\} = 3\int_0^R M_r\cdot\left(\frac{p}{\varrho^2} - \frac{5}{6}\,\frac{1}{\varrho}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho}\right)\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r\,.$$

Il teorema sarà provato se dimostreremo che, nelle ipotesi fatte, fra tutte le configurazioni sferiche di equilibrio, corrispondenti alla coppia $[R,\ p(R)]$, ne esiste una $[R_0,\ p(R_0)]$ per cui risulta $p(R_0) = 0$, con R_0 finito. La configurazione sferica di raggio R_0 è pertanto la ricercata configurazione di equilibrio spontaneo.

Dimostriamo preliminarmente che la funzione

$$F(R) = 3\int_0^R M_r\cdot\left(\frac{p}{\varrho^2} - \frac{5}{6}\,\frac{1}{\varrho}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho}\right)\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r$$

è sempre positiva per $R > 0$.

Per le ipotesi fatte si ha

$$\frac{p}{\varrho^2} - \frac{5}{6}\,\frac{1}{\varrho}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho} < 0,$$

e poichè in condizioni di equilibrio è $\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}r < 0$, per $r \neq 0$, segue

$$\left(\frac{p}{\varrho^2} - \frac{5}{6}\,\frac{1}{\varrho}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho}\right)\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r} = \left|\frac{p}{\varrho^2} - \frac{5}{6}\,\frac{1}{\varrho}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho}\right|\left|\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r}\right|.$$

Da questa, indicato con $\varepsilon > 0$ l'estremo inferiore di $\left| \frac{p}{\varrho^2} - \frac{5}{6}\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{d\varrho} \right|$, per il teorema della media [**9**, Cap. IV, n. 13, e), p. 151] si ha

$$F(R) = 3\overline{M}\int_0^R \left| \frac{p}{\varrho^2} - \frac{5}{6}\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{d\varrho} \right| \left| \frac{d\varrho}{dr} \right| dr >$$

$$> 3\overline{M}\varepsilon \int_0^R \left| \frac{d\varrho}{dr} \right| dr = 3\overline{M}\varepsilon \cdot \{ \varrho(0) - \varrho(R) \} > 0,$$

essendo $\overline{M} > 0$ un opportuno valore minore di M.

Proviamo inoltre che qualunque sia R si ha

$$\varphi(R) = \frac{3M}{\varrho(R)} - 4\pi R^3 > 0 .$$

Dal teorema della media [**9**, p. 151], poichè $M = 4\pi \int_0^R \varrho^2 \, dr$, otteniamo $M = (4/3)\pi R^3 \bar{\varrho}$, essendo $\bar{\varrho}$ un conveniente valore tale che $\varrho(0) > \bar{\varrho} > \varrho(R)$, e perciò

$$\varphi(R) = 4\pi R^3 \left\{ \frac{\bar{\varrho}}{\varrho(R)} - 1 \right\} > 0 .$$

Ciò premesso proviamo l'esistenza di un valore R_0, finito, per il quale si ha $p(R_0) = 0$. Dalla (II$_1$), posto $\psi(R) = \frac{1}{2} f \frac{M^2}{R} - F(R)$, otteniamo

$$p(R) = \psi(R)/\varphi(R) . \tag{7}$$

Da questa, a causa della continuità del numeratore e del denominatore del secondo membro e tenuto conto che il denominatore è sempre diverso da zero, segue la continuità di $p(R)$. Sia R_1 un valore di R tale che $\psi(R_1) > 0$ [che se fosse $\psi(R_1) = 0$ il teorema sarebbe verificato]. Indichiamo con $I > 0$ l'estremo inferiore di $F(R)$ per $R \geqslant R_1$. Avendosi manifestamente $\psi(fM^2/(2I)) \leqslant 0$, dal teorema di WEIERSTRASS [**8**, Cap. II, n. 21, p. 177] sulle funzioni continue segue l'esistenza di un valore finito R_0, con $R_1 < R_0 \leqslant fM^2/(2I)$, tale che $p(R_0) = 0$, e quindi il teorema da dimostrare.

6. – Una applicazione ai fluidi reali.

Come applicazione dei risultati trovati, vogliamo esaminare il caso in cui la massa M è costituita da un fluido reale retto da una equazione di stato del tipo di VAN DER WAALS.

Come è noto l'equazione di stato di VAN DER WAALS per fluidi reali, con riferimento alla grammomolecola e in condizioni isoterme, si scrive **[10]**

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=k, \tag{8}$$

essendo a la forza di coesione, b il covolume della grammomolecola e k una costante positiva proporzionale alla temperatura assoluta e indipendente dalla natura del fluido.

Sia ora Δv l'elemento di volume in cui supponiamo concentrata la massa Δm, misurata in grammomolecole del fluido in questione, in queste ipotesi per il generico elemento Δv la (8) si scrive:

$$\left[p+a\cdot\left(\frac{\Delta m}{\Delta v}\right)^2\right]\left[\frac{\Delta v}{\Delta m}-b\right]=k\,. \tag{9}$$

Passando al limite per $\Delta v\to 0$, facendo intervenire la densità ϱ, la (9) può scriversi:

$$p=\varrho\cdot(ab\varrho^2-a\varrho+k)/(1-b\varrho)\,. \tag{1_1}$$

Poichè deve aversi $p\geqslant 0$, l'essere $\varrho<1/b$ implica

$$ab\varrho^2-a\varrho+k\geqslant 0\,. \tag{10}$$

Distinguiamo i due casi: $a^2-4kab>0$, $a^2-4kab<0$.

Sia $k<a/(4b)$ e siano ϱ_1 e ϱ_2, con $\varrho_1<\varrho_2$, i due zeri (reali) del trinomio a primo membro della (10).

Per ϱ variabile nell'intervallo $(0,\ \varrho_1)$ la $p(\varrho)$ cresce dal valore zero ad un massimo che raggiunge per $\varrho=\varrho_0$, con $0<\varrho_0<\varrho_1$, e quindi nuovamente decresce fino allo zero per $\varrho=\varrho_1$; la possibilità di equilibrio spontaneo è quindi da ricercarsi soltanto nel sottointervallo $(0,\ \varrho_0)$ ove $p(\varrho)$ è crescente. Per ϱ variabile nell'intervallo $(\varrho_1,\ \varrho_2)$ la $p(\varrho)$ risulta negativa, fatto questo incompatibile col suo significato fisico. Per ϱ variabile, infine, nell'intervallo $(\varrho_2,\ 1/b)$ la $p(\varrho)$ è crescente e tende all'infinito per $\varrho\to 1/b$.

Dimostriamo adesso che per fluidi retti dalla (1_1) è possibile una configurazione di equilibrio spontaneo per ϱ variabile nell'intervallo $(\varrho_2,\ 1/b)$, mentre l'equilibrio spontaneo non è possibile nell'intervallo $(0,\ \varrho_0)$.

Dalla (1_1) segue:

$$\frac{\mathrm{d}p(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} = \frac{-2ab^2\varrho^3 + 4ab\varrho^2 - 2a\varrho + k}{(1 - b\varrho)^2}, \tag{11}$$

da cui, poichè in ambedue gli intervalli $(0,\ \varrho_0)$ e $(\varrho_2,\ 1/b)$ la $p(\varrho)$ è crescente, in questi intervalli si ha anche

$$-2ab^2\varrho^3 + 4ab\varrho^2 - 2a\varrho > -k\,. \tag{12}$$

Tenuto conto di quest'ultima e delle espressioni di $p(\varrho)$ e di $\mathrm{d}p(\varrho)/\mathrm{d}\varrho$ date dalla (1_1) e dalla (12), con facili calcoli otteniamo, per gli intervalli in questione,

$$p(\varrho) < \frac{5}{6}\,\varrho\,\frac{\mathrm{d}p(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} \qquad \text{per} \qquad f(\varrho) = 6bk\varrho - 4ab^2\varrho^3 + 8ab\varrho^2 - 4a\varrho > 0\,. \tag{13}$$

Supponiamo, dapprima, che ϱ vari nell'intervallo $(\varrho_2,\ 1/b)$. Allora, essendo $\varrho > 1/(2b) = (\varrho_1 + \varrho_2)/2$, avremo anche $-2k > k - 6kb\varrho$; quindi, poichè è verificata la (12), a maggior ragione avremo $f(\varrho) > 0$ e dalla (13) perciò $p(\varrho) < \frac{5}{6}\,\frac{1}{\varrho}\,\frac{\mathrm{d}p(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho}$, il che, per il Teorema II, assicura la possibilità di equilibrio spontaneo.

Esaminiamo adesso il caso di ϱ variabile nell'intervallo $(0,\ \varrho_0)$. In questa ipotesi l'equilibrio spontaneo è impossibile. Supponiamo, per assurdo, che questo si verifichi. In superficie avremo $p_\Sigma = 0$, e, a causa della (1_1) per l'intervallo in questione, $\varrho_\Sigma = 0$. Da qui, per il teorema di L'Hospital [**8**, Cap. IX, n. 9, p. 236] e tenuto conto della (11), si ha:

$$\lim_{\varrho\to\varrho_\Sigma}\{\,p(\varrho)/\varrho\,\} = \lim_{\varrho\to 0}\,(\mathrm{d}p/\mathrm{d}\varrho) = k > 0, \tag{14}$$

conclusione in contrasto con l'ipotesi fatta, infatti, come abbiamo notato al n. **4**, una condizione necessaria all'equilibrio spontaneo è che risulti $\lim_{\varrho\to\varrho_\Sigma}\{\,p(\varrho)/\varrho\,\} = 0$.

Esaminiamo adesso il caso $k > a/(4b)$. Poichè il discriminante del trinomio $ab\varrho^2 - a\varrho + k$ è negativo e il coefficiente del termine di 2° grado è positivo, il trinomio stesso è sempre positivo, perciò la (1_1) definisce p positiva in tutto l'intervallo $(0,\ 1/b)$ ed è $p = 0$ per $\varrho = 0$. Si ha perciò ancora la (14) e quindi l'impossibilità di equilibrio spontaneo.

7. – Caso di una distribuzione stratiforme della materia.

Le considerazioni svolte fin qui sono state fatte nella ipotesi implicita che in ogni punto della massa il fluido sia retto dalla medesima equazione di stato. Supporremo adesso che la massa fluida sia costituita da diversi strati di fluido non mescolabili tra di loro; per semplicità limiteremo la nostra indagine al caso in cui la massa M sia costituita da due soli fluidi F_1 e F_2. Come si vedrà le considerazioni che faremo valgono manifestamente per un mezzo composto di quanti si voglia tipi di fluido in analoghe condizioni.

Supporremo che attraverso la superficie Σ^* (sferica e di raggio R^*) che separa F_1 da F_2 si raccordi con continuità, oltre alla pressione, il che deve necessariamente accadere in condizioni di equilibrio, anche la densità (5). Senza alterare le generalità, supponiamo che la massa M_1 formante il nucleo centrale sia costituita dal fluido F_1 retto dall'equazione di stato $p = p_1(\varrho)$, mentre il fluido F_2, retto dall'equazione di stato $p = p_2(\varrho)$, costituisca una atmosfera esterna di massa complessiva M_2. In generale attraverso Σ^*, pur essendo continue sia la pressione che la densità, sarà discontinua, per la supposta non mescolabilità dei due fluidi, la derivata della pressione rispetto alla densità. Adesso, fatto nella (II) le posizioni $R_1 = 0$ ed $R_2 = R^*$, si ha:

$$\frac{1}{2} f \frac{M_1^2}{R^*} + p(R^*)\cdot\left\{4\pi R^{*3} - \frac{3M_1}{\varrho(R^*)}\right\} = 3\int_0^{R^*} M_r\cdot\left(\frac{p_1}{\varrho^2} - \frac{5}{6}\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}\varrho}\right)\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r\,.$$

Indicando con R il raggio della superficie che limita tutta la massa ed estendendo la (II) all'intervallo (R^*, R), otteniamo:

$$\frac{1}{2} f \frac{M^2}{R} + p(R)\cdot\left\{4\pi R^3 - \frac{3M}{\varrho(R)}\right\} - \frac{1}{2} f \frac{M_1^2}{R^*} - p(R^*)\cdot\left\{4\pi R^{*3} - \frac{3M_1}{\varrho(R^*)}\right\} =$$

$$= 3\int_{R^*}^{R} M_r\cdot\left(\frac{p_2}{\varrho^2} - \frac{5}{6}\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}\varrho}\right)\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r\,.$$

---

(5) Mi riservo di tornare in altro lavoro a trattare il caso che vi siano superficie di discontinuità per ϱ.

Sommando membro a membro queste due relazioni abbiamo infine:

$$(\mathrm{II}_2) \qquad \frac{1}{2} f \frac{M^2}{R} + p(R) \cdot \left\{ 4\pi R^3 - \frac{3M}{\varrho(R)} \right\} =$$

$$= 3 \int_0^{R^*} M_r \cdot \left(\frac{p_1}{\varrho^2} - \frac{5}{6} \frac{1}{\varrho} \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}\varrho} \right) \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r + 3 \int_{R^*}^{R} M_r \cdot \left(\frac{p_2}{\varrho^2} - \frac{5}{6} \frac{1}{\varrho} \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}\varrho} \right) \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r \,.$$

Da questa immediatamente si vede, ragionando come nel Teorema I, che condizione necessaria per l'equilibrio spontaneo è che per uno almeno dei fluidi si verifichi la condizione di cui al Teorema I. Da quanto detto segue inoltre che affinchè sia possibile una configurazione di equilibrio spontaneo per un sistema materiale fluido costituito da due fluidi F_1 e F_2, ordinatamente retti dalle equazioni di stato $p = p_1(\varrho)$ e $p = p_2(\varrho)$, è sufficiente siano verificate le condizioni seguenti:

a) *Se* $I_1(\varrho)$ *ed* $I_2(\varrho)$ *sono gli intervalli di variabilità di* ϱ *in cui sono definite* $p_1(\varrho)$ *e* $p_2(\varrho)$, *esiste almeno un valore* ϱ^* *di* ϱ *appartenente sia ad* $I_1(\varrho)$ *che ad* $I_2(\varrho)$ *per cui risulta* $p_1(\varrho^*) = p_2(\varrho^*) = p^*$.

b) *Se il fluido* F_1 *costituisce il nucleo interno e il fluido* F_2 *l'atmosfera esterna, è* (cfr. n. **2**):

$$p_1(\varrho) > p^* \quad per \quad \varrho > \varrho^*, \qquad p_2(\varrho) < p^* \quad per \quad \varrho < \varrho^* .$$

c) *Per* ϱ *appartenente ad* $I_1(\varrho)$ *si ha*

$$p_1(\varrho) < \frac{5}{6} \varrho \frac{\mathrm{d}p_1(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}p_1(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} > 0 \right),$$

per ϱ *appartenente ad* $I_2(\varrho)$ *si ha*

$$p_2(\varrho) < \frac{5}{6} \varrho \frac{\mathrm{d}p_2(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}p_2(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} > 0 \right).$$

Infatti, in queste condizioni la massa fluida M_1, costituita col fluido F_1, può pensarsi in equilibrio, entro una opportuna superficie sferica Σ^* di raggio R^*, per effetto della propria gravitazione e di una pressione $p^* = p_1(\varrho^*)$ esercitata su Σ^* da una opportuna massa fluida M_2 costituita col fluido F_2. Poichè, in condizioni di equilibrio, attraverso Σ^* si raccorda, necessariamente, con continuità la pressione e a causa della a) è $p_1(\varrho^*) = p^* = p_2(\varrho^*)$, segue che attraverso Σ^* si raccorda con continuità anche ϱ. Essendo infine verificate dalla c), per ambedue i fluidi, le condizioni del Teorema II, ragionando sulla (II_2) come si è fatto nel citato teorema per la (II_1), segue la possibilità dell'equilibrio spontaneo per il sistema fluido $F = F_1 + F_2$.

Nell'ordine di idee del n. **6** costruiamo qui un altro esempio. Il sistema fluido F sia così costituito: un fluido reale F_1, come nucleo, retto dalla equazione di stato

$$p = p_1(\varrho) = \varrho \, \frac{ab\varrho^2 - a\varrho + k}{1 - b\varrho}, \qquad \varrho \in I_1(\varrho) = (\alpha, \ 1/b),$$

con k costante positiva minore di $a/(4b)$ ed $\alpha = (a + \sqrt{a^2 - 4abk})/(2ab)$; l'atmosfera esterna sia formata da un gas F_2 del tipo di EMDEN retto dalla equazione di stato

$$p = p_2(\varrho) = \bar{k} \cdot \varrho^{1+(1/n)}, \qquad \varrho \in I_2(\varrho) = (0, \ +\infty),$$

essendo $\bar{k}$ ed n costanti positive ed $n < 5$. Immediatamente si verificano per i fluidi F_1 ed F_2 le condizioni a), b) e c). Per verificare la a) si consideri la funzione

$$F(\varrho) = \bar{k}\varrho^{1+(1/n)} - \varrho \, \frac{ab\varrho^2 - a\varrho + k}{1 - b\varrho}.$$

Essa è una funzione continua di ϱ nell'intervallo aperto a destra $(\alpha, \ 1/b)$, e si ha

$$F(\alpha) = \bar{k} \cdot \alpha^{1+(1/n)}, \qquad \lim_{\varrho \to 1/b} F(\varrho) = -\infty.$$

Perciò, per il teorema di WEIERSTRASS [**8**, p. 151], esiste internamente all'intervallo $(\alpha, \ 1/b)$ almeno una radice dell'equazione $F(\varrho) = 0$ (facilmente si potrebbe dimostrare che ne esiste una sola); e da questo segue la a). La b) è immediatamente verificata, tenuto conto che è:

$$\mathrm{d}p_1(\varrho)/\mathrm{d}\varrho > 0, \qquad \varrho \in I_1(\varrho); \qquad \mathrm{d}p_2(\varrho)/\mathrm{d}\varrho > 0, \qquad \varrho \in I_2(\varrho).$$

La c) è stata verificata per la funzione $p_1(\varrho)$ al n. **6**, mentre per la funzione $p_2(\varrho)$ è stata verificata al n. **1**. È quindi dimostrata la possibilità di una configurazione di equilibrio spontaneo per questo sistema materiale fluido. L'interesse di questo esempio va principalmente ricercato nel fatto che riproduce un caso analogo a quello di EMDEN, non supponendo però nell'interno delle masse una omogeneità di condizioni.

Bibliografia.

[1] H. LEMKE: *Über das Gleichgewicht kosmischer Gasmassen*, J. Reine Angew. Math. **124** (1901), 143-152.

[2] R. EMDEN: **Gaskugeln. Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme.** B. G. Teubner, Leipzig 1907. Cfr. p. 40 e Capitoli X e XIII.

[3] L. LICHTENSTEIN: **Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.** J. Springer, Berlin 1933. Cfr. Cap. II, n. 5, pp. 22-28.

[4] E. PERSICO: **Introduzione alla Fisica matematica** (2ª ediz.). N. Zanichelli, Bologna 1945. Cfr. Cap. II, § 18, p. 35; Cap. III, § 43, p. 82 e § 44, p. 85.

[5] G. SANSONE: *Sulle soluzioni di Emden dell'equazione di Fowler*, Rend. Mat. e Appl. Roma (5) **1** (1940), 163-176.

[6] M. CIMINO: *Sulle soluzioni dell'equazione generale del potenziale newtoniano di una sfera fluida in equilibrio*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **8** (1953), 164-172.

[7] D. QUILGHINI: *Il potenziale gravitazionale di una massa di gas perfetto in equilibrio e in condizioni isotermiche*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **11** (1956), 422-426.

[8] G. SANSONE: **Lezioni di Analisi matematica**, Vol. **I** (10ª ediz.). Cedam, Padova 1952.

[9] G. SANSONE: **Lezioni di Analisi matematica**, Vol. **II** (8ª ediz.). Cedam, Padova 1954.

[10] E. PERUCCA: **Fisica generale e sperimentale**, Vol. **I** (4ª ediz.). Unione Tipografico-Editrice Torinese, Torino 1941. Cfr. Parte IV: Cap. I, n. 293, p. 598; Cap. IV, n. 353, p. 710.