Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 15-25

Al Prof. BRUTO CALDONAZZO

TRISTANO MANACORDA (*)

Sul comportamento meccanico di una classe di corpi naturali. (**)

1. – Nella presente Nota mi occuperò del comportamento meccanico dei solidi di KELVIN-VOIGT (1) soggetti a trasformazioni finite (2).

Le ricerche sul comportamento meccanico dei più diversi mezzi continui hanno messo in evidenza che lo stato di ogni particella del mezzo è generalmente individuato (oltre che da un certo numero di scalari, quali la temperatura, l'entropia, ecc.) dalla determinazione, particella per particella, di quattro tensori. Questi, nel caso di trasformazioni infinitesime, sono:

a) il tensore linearizzato di deformazione, e;

b) il suo derivato rispetto al tempo, $\dot{e}$;

c) il tensore euleriano degli sforzi, β;

d) il suo derivato rispetto al tempo, $\dot{\beta}$.

(*) Professore str. della Università di Parma. Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 25-XI-1956.

(1) Per la definizione nell'ambito della teoria delle deformazioni infinitesime, e per alcuni esempi di corpi naturali il cui comportamento meccanico è convenientemente rappresentato dallo schema dei mezzi di KELVIN-VOIGT, cfr. M. REINER, **Twelve Lectures on theoretical Rheology**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1949, Lect. VIII. Cfr. anche C. TRUESDELL, *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, J. Rat. Mech. Anal. **1** (1952), 125-300, Cap. VI, anche per la bibliografia.

(2) Per quanto riguarda le trasformazioni finite di un mezzo continuo, oltre al lavoro di TRUESDELL già citato, rimando alla fondamentale Memoria di A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite* (Mem. I), Ann. Mat. Pura Appl. (4) **22** (1943), 33-143.

Volendo passare alle trasformazioni finite, non si può trascurare, ad esempio, la rotazione locale. Ai quattro tensori sopra indicati si possono allora sostituire i seguenti:

a′) il tensore di trasformazione, α;

b′) il tensore di velocità di deformazione definito, in funzione della velocità euleriana della generica particella P nella configurazione attuale, da

$$d = D\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}P}\,; \tag{1.1}$$

c′) il tensore euleriano degli sforzi, β;

d′) un tensore, $\tilde{\beta}$, formato con β, $\dot{\beta}$ e con l'intervento delle compon nti di $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}P$ (3).

Questi quattro tensori devono intendersi, sia nel caso di trasformazioni infinitesime che finite, legati tra di loro da una relazione che può dirsi brevemente *equazione reologica di stato* (4). Non è escluso, naturalmente, che in tale equazione figuri soltanto qualcuno dei tensori sopra indicati, come accade ad esempio per i solidi elastici o per i fluidi perfettamente viscosi. Comunque, l'equazione reologica di stato, insieme a qualche conveniente ipotesi sullo stato di riferimento, riesce a rendere determinato il problema, almeno per vaste classi di trasformazioni.

Disgraziatamente nella maggior parte dei casi, la forma di tale equazione non può essere dedotta in modo rigoroso da principi generali, ma è suggerita da considerazioni empiriche.

È anche per tale ragione che ricorrerò qui a considerazioni di carattere intuitivo per stabilire la forma della equazione reologica di stato per i mezzi di KELVIN-VOIGT, volendo indicare, con tale denominazione abbreviata, quei mezzi continui il cui stato meccanico resti individuato, particella per particella, oltre che da un certo numero di scalari, dai valori attuali dei tre tensori α (misurato a partire da una conveniente configurazione di riferimento), d e β. Mi limiterò anzi (cfr. n. seguente) a mezzi isotropi e che soddisfano ad un principio di sovrapposizione.

---

(3) Cfr.: C. TRUESDELL, *Corrections and Additions to the Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, J. Rat. Mech. Anal. **2** (1953), 593-612; n. 55 bis.

(4) Cfr.: M. REINER, loc. cit. in (1), Lect. II.

Prescelta una terna ortogonale di riferimento $\mathfrak{C} \equiv O$, $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$, nel seguito indicherò sempre, com'è ormai abituale, con C_* e C rispettivamente la configurazione di riferimento e quella assunta nel generico istante dal mezzo, con $P_* \equiv (y_1, y_2, y_3)$ un punto di C_*, e con $P \equiv (x_1, x_2, x_3)$ il suo corrispondente in C. Sarà inoltre indicata con α_ϱ la rotazione locale, ponendo

$$\alpha = \alpha_\varrho \, \alpha_\delta, \qquad \alpha_\delta^2 = K\alpha \cdot \alpha, \tag{1.2}$$

e con $\boldsymbol{s}$ lo spostamento,

$$\boldsymbol{s} = P - P_* . \tag{1.3}$$

2. – Per determinare la forma dell'equazione reologica di stato per i mezzi di Kelvin-Voigt, comincerò con l'adottare le due ipotesi seguenti:

I) il tensore degli sforzi, β, si possa intendere somma di due tensori β_1 e β_2, dei quali il primo resti univocamente determinato quale funzione di α, e il secondo quale funzione di d;

II) il mezzo sia isotropo, col che intendo che l'immagine sulla configurazione attuale della terna principale di deformazione sia terna principale di β_1, ed insieme che le terne principali di β_2 e di d coincidano.

Converrà nel seguito introdurre, al posto dei tensori β_1 e β_2, d ed $\varepsilon = (K\alpha \cdot \alpha - 1)/2$ i rispettivi deviatori ponendo, in corripondenza ad ogni scelta degli scalari q_1, q_2, d_0 e ε_0,

$$\beta_1 = q_1 + \tau_1, \qquad \beta_2 = q_2 + \tau_2, \qquad d = d_0 + \delta, \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 + \eta \tag{2.1}$$

e perciò

$$\beta = q + \tau \qquad (q = q_1 + q_2, \ \tau = \tau_1 + \tau_2) . \tag{2.2}$$

Naturalmente non è detto che q_1, q_2, d_0 e ε_0 debbano necessariamente coincidere con $(1/3)I_1\beta_1$, $(1/3)I_1\beta_2$, $(1/3)I_1 d$, $(1/3)I_1\varepsilon$ rispettivamente. Conviene anzi lasciar loro la più completa arbitrarietà.

3. – Per precisare la forma della relazione tra β_1 ed α, e di quella tra β_2 e d, svolgerò qui delle considerazioni di carattere meccanico-geometrico che mi sembra suggeriscano delle ipotesi di carattere fisicamente intuitivo.

Quanto alla relazione tra β_1 ed α, le considerazioni svolte in altro lavoro ([5]) permettono anche qui di concludere, indipendentemente da ogni ipotesi di reversibilità della trasformazione, che, sfruttando eventualmente l'arbitrarietà di q_1 (o di ε_0), si può ammettere sia del tipo

$$\tau_1 = A\eta_\varrho + B\eta_\varrho^2, \tag{3.1}$$

con

$$\eta_\varrho = \alpha_\varrho\, \eta\, \alpha_\varrho^{-1}, \tag{3.2}$$

ed A e B funzioni, per ogni particella, degli invarianti principali di deformazione.

Per stabilire la relazione tra β_2 e d, comincio con l'osservare che in corrispondenza ad ogni versore $\boldsymbol{u}$ uscente dal generico punto P del mezzo nella configurazione attuale, la velocità normale di deformazione $\boldsymbol{u}\times d\boldsymbol{u}$ è indipendente da $\boldsymbol{u}$ quando e solo quando $\boldsymbol{u}$ appartiene ad una delle sezioni cicliche Σ_d della quadrica indicatrice E_d di d relativa a P. In corrispondenza a tutti questi versori, anzi, $d\boldsymbol{u}$ appartiene al piano di $\boldsymbol{u}$ e della normale a Σ_d in P.

Si consideri poi la trasformazione $C \to C'$ che porta dalla configurazione C assunta dal mezzo all'istante t a quella assunta in un generico istante $t' > t$. Siano allora $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ due versori ortogonali uscenti da P e $\mathrm{d}\varphi$ l'angolo infinitesimo formato da $\boldsymbol{a}$ col vettore $\boldsymbol{a} + \mathrm{d}\varphi\cdot\boldsymbol{b}$, ed infine $\mathrm{d}\varphi'$ l'angolo formato dai vettori corrispondenti in C'. Indico per un momento con ε' il tensore di deformazione inerente alla trasformazione $C \to C'$. Per lo *scorrimento mutuo specifico* ([6]) relativo ad $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, ed alla trasformazione $C \to C'$ si ha allora:

$$\sigma_{ab} = [1 + 2\varepsilon'_{aa} + 2\varepsilon'_{bb} + 4(\varepsilon'_{aa}\,\varepsilon'_{bb} - \varepsilon'^2_{ab})]^{1/2}\ (1 + 2\varepsilon_{aa})^{-1} \tag{3.3}$$

$$(\varepsilon_{aa} = \boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{a}, \qquad \varepsilon_{ab} = \boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{b}),$$

per cui la derivata rispetto al tempo di σ_{ab}, calcolata nell'istante t, resta semplicemente espressa da

$$\dot\sigma_{ab} = \dot\varepsilon'_{bb} - \dot\varepsilon'_{aa}.$$

D'altra parte nelle condizioni attuali è $\dot\varepsilon'_{aa} = d_{aa}$, $\dot\varepsilon'_{bb} = d_{bb}$, onde si ottiene per la *velocità di scorrimento mutuo specifico di* $\boldsymbol{a}$ *secondo* $\boldsymbol{b}$:

$$\dot\sigma_{ab} = d_{bb} - d_{aa}. \tag{3.4}$$

([5]) T. MANACORDA, *Sul legame sforzi-deformazione nelle trasformazioni finite di un mezzo continuo isotropo*, Riv. Mat. Univ. Parma 4 (1953), 31-42.

([6]) Cfr. loc. cit. in ([5]), n. 3.

Questa mette bene in evidenza che *condizione necessaria e sufficiente perchè, per qualunque* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$, *sia* $\dot{\sigma}_{ab} = 0$ *è che* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$ *appartengano ad una delle sezioni cicliche della quadrica indicatrice di* d *relativa a* P.

D'altra canto (7) per ogni $\boldsymbol{u}$ appartenente ad una delle sezioni circolari della quadrica indicatrice di β_2 relativa a P è costante lo sforzo normale $\boldsymbol{u}\times\beta_2\boldsymbol{u}$, mentre lo sforzo di taglio è perpendicolare al piano della sezione stessa.

Queste semplici osservazioni e il loro significato fisico giustificano l'ammissione di una terza ipotesi da aggiungere a quelle indicate nel n. **2**, e cioè che:

III) per i mezzi di KELVIN-VOIGT qui presi in esame coincidano, per ogni particella ed in ogni istante, non solo le terne unite di β_2 e d [cfr. ipotesi II)], ma anche i piani delle sezioni circolari delle loro quadriche indicatrici.

L'ipotesi ora accennata si traduce analiticamente, sfruttando anche qui eventualmente l'arbitrarietà di q_2 (o d_0), nella relazione tra τ_2 e δ:

$$\tau_2 = -2\mu\delta \tag{3.5}$$

con μ funzione, per ogni particella, degli invarianti principali della velocità di deformazione.

Raccogliendo i risultati (3.1) e (3.5) si arriva così alla relazione

$$\tau = A\eta_\varrho + B\eta_\varrho^2 - 2\mu\delta, \tag{3.6}$$

od anche [cfr. (2.2)]

$$\beta = p + 2m\varepsilon_\varrho + n\varepsilon_\varrho^2 - 2\mu d, \tag{3.7}$$

con $p = q_1 + q_2 - A\varepsilon_0 + B\varepsilon_0^2 + 2\mu d_0$ funzione degli invarianti principali di β, ε e d, e [cfr. (3.2)] $\varepsilon_\varrho = \alpha_\varrho\varepsilon\alpha_\varrho^{-1}$. La (3.6) [o (3.7)] viene a costituire, nelle ipotesi ammesse, la più generale equazione reologica di stato per i mezzi di KELVIN-VOIGT del tipo qui preso in esame.

Osservazione I. La (3.6) [o (3.7)] non precisa completamente il legame tra β, α e d. Per completare tale relazione occorre almeno dare la forma della dipendenza di p dagli invarianti di ε e d. È evidente che le considerazioni qui svolte non possono fornire tale relazione, la quale, del resto, sarà caratteristica di ogni particolare classe di mezzi di KELVIN-VOIGT.

---

(7) Cfr. loc. cit. in (5), n. 4.

Osservazione II. Se nella (3.6) [nella (3.7)] si esprime η_ϱ [ε_ϱ] in funzione isotropa analitica (8) di un qualunque altro tensore atto a rappresentare la deformazione del mezzo, la (3.6) [la (3.7)] non cambia di forma. In particolare, introducendo l'omografia di deformazione inversa $\bar{\varepsilon}$, legata ad ε_ϱ da

$$(3.8) \qquad 1 + 2\,\bar{\varepsilon} = (1 + 2\varepsilon_\varrho)^{-1},$$

resta acquisita per β una espressione del tipo

$$(3.7.1) \qquad \beta = \bar{p} + 2\,\bar{m}\,\bar{\varepsilon} + \bar{n}\,\bar{\varepsilon}^{\,2} - 2\mu d \quad (9).$$

4\. – Dalla (3.6) si può naturalmente dedurre come caso particolare l'equazione reologica di stato dei mezzi di KELVIN-VOIGT per il caso di deformazioni linearizzate. Pensiamo infatti che la trasformazione dipenda in modo regolare (10) da un parametro ϑ, con la condizione che al valore $\vartheta = 0$ corrisponda

---

(8) Cfr. ad esempio: M. REINER, *A mathematical Theory of Dilatancy*, Amer. J. Math. **67** (1945), 350-362.

(9) Nel caso particolare di $\bar{\varepsilon}$ si può dedurre direttamente la (3.7.1) dalla (3.7) sfruttando sempre la nota identità, valida per una qualunque omografia γ,

$$\gamma^3 - I_1\,\gamma \cdot \gamma^2 + I_2\,\gamma \cdot \gamma - I_3\,\gamma = 0.$$

La (3.7) si può infatti scrivere nella forma

$$\beta = P + M \cdot (1 + 2\varepsilon_\varrho) + N \cdot (1 + 2\varepsilon_\varrho)^2 - 2\mu d,$$

cioè, per la (3.8),

$$\beta = P + M \cdot (1 + 2\,\bar{\varepsilon})^{-1} + N \cdot (1 + 2\,\bar{\varepsilon})^{-2} - 2\mu d.$$

D'altro canto, dalla identità sopra richiamata si ricava

$$\gamma^{-1} = \{\,\gamma^2 - I_1\,\gamma \cdot \gamma + I_2\,\gamma\,\}/(I_3\,\gamma)\,.$$

Basta allora identificare γ con $1 + 2\,\bar{\varepsilon}$, e sostituire nella espressione di β. Sfruttando ancora la stessa identità per esprimere $(1 + 2\,\bar{\varepsilon})^3$ e $(1 + 2\,\bar{\varepsilon})^4$ in funzione di $1 + 2\,\bar{\varepsilon}$ e di $(1 + 2\,\bar{\varepsilon})^2$, si perviene proprio ad una espressione del tipo (3.7.1).

(10) Cfr.: A. SIGNORINI, Memoria cit. in (2), Cap. I, n. 18.

la configurazione di riferimento. Pongo poi, per un qualunque scalare o tensore Φ funzione di ϑ,

$$\Phi^{(0)} = (\Phi)_{\vartheta=0}\,, \qquad \Phi^{(n)} = \left(\frac{\partial^n \Phi}{\partial \vartheta^n}\right)_{\vartheta=0}. \tag{4.1}$$

Suppongo infine che la configurazione di riferimento sia di equilibrio naturale.

Derivando allora la (3.6) rispetto a ϑ, e poi ponendo $\vartheta = 0$, si perviene alla relazione

$$\tau^{(1)} = -2\mu_e\,\eta^{(1)} - 2\mu_v\,\delta^{(1)}, \tag{4.2}$$

con $2\mu_e = A^{(0)}$, $\mu_v = \mu^{(0)}$ indipendenti dalla trasformazione, e dove $\eta^{(1)}$ non differisce dal deviatore del tensore linearizzato di deformazione relativo allo spostamento $\boldsymbol{s}^{(1)}$.

Al tempo stesso, pensiamo di identificare $\varepsilon_0^{(1)}$ con $(1/3)I_1\,\varepsilon^{(1)}$ e $d_0^{(1)}$ con $(1/3)I_1\,d^{(1)}$. Con ciò dalla (4.2) si ha $I_1\,\tau^{(1)} = 0$, ciò che implica [cfr. (2.2)] $q^{(1)} = (1/3)I_1\,\beta^{(1)}$. Alla (4.2) si può quindi aggiungere la relazione, ottenuta da (3.7),

$$q^{(1)} = p^{(1)} + (2/3)m^{(0)}I_1\,\varepsilon^{(1)} - (2/3)\mu^{(0)}I_1\,d^{(1)}. \tag{4.3}$$

Basta a questo punto ricordare che è $d^{(1)} = \dot{\varepsilon}^{(1)}$, e tener presente la supposta dipendenza di p dagli invarianti di deformazione e di velocità di deformazione anche per il tramite degli invarianti degli sforzi (e che la configurazione di riferimento è di equilibrio naturale) per poter scrivere le equazioni cercate nella forma

$$\tau^{(1)} = -2\mu_e\,\eta^{(1)} - 2\mu_v\,\dot{\eta}^{(1)}, \qquad q^{(1)} = q_0 - k_e\,I_1\,\varepsilon^{(1)} - k_v\,I_1\,\dot{\varepsilon}^{(1)}, \tag{4.4}$$

in cui q_0 (come k_e e k_v) è al più funzione, per ogni particella, della temperatura e di altri eventuali scalari, ma non degli invarianti di $\varepsilon^{(1)}$ e $d^{(1)}$.

Le (4.4) mettono bene in evidenza che, per deformazioni linearizzate, i mezzi di KELVIN-VOIGT possono pensarsi ottenuti dalla sovrapposizione di un mezzo perfettamente elastico con un fluido perfettamente viscoso. Anche la teoria svolta in questa Nota è una teoria di sovrapposizione, ma giova forse ancora ricordare che nel dedurre la (3.1) non si è fatto ricorso ad alcuna ipotesi di reversibilità.

5. – Mi occuperò ora brevemente della propagazione di onde ordinarie di discontinuità in un mezzo linearizzato di KELVIN-VOIGT.

G. LAMPARIELLO ha da tempo dimostrato ([11]) l'impossibilità della propagazione di tali onde in un fluido perfettamente viscoso. Poichè uno dei componenti di un mezzo linearizzato di KELVIN-VOIGT è appunto un fluido viscoso, è presumibile che tale impossibilità sussista anche nel caso in esame. Lo proverò rapidamente ricorrendo al consueto metodo delle caratteristiche ([12]).

Le equazioni indefinite di CAUCHY, riportate a forma lagrangiana, senza alcuna restrizione per l'ampiezza della trasformazione, si scrivono ([13]), ove si indichi con ϱ la densità attuale e con ϱ_* quella nello stato di riferimento,

$$\varrho_* \cdot (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{a}) = \operatorname{grad}_{P_*} \varkappa \,, \tag{5.1}$$

con

$$\varkappa = \beta R \alpha, \qquad \varrho_* = \varrho I_3 \, \alpha \,. \tag{5.2}$$

Si faccia ora intervenire un parametro moltiplicativo ϑ per le forze di massa, ciò che implica una dipendenza della trasformazione anche da ϑ. Con ciò, nella ipotesi che lo stato di riferimento sia stato di equilibrio naturale $[\beta^{(0)} = 0]$, le equazioni di CAUCHY linearizzate sono

$$\varrho_* \cdot (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{a}^{(1)}) = \operatorname{grad}_{P_*} \beta^{(1)}, \tag{5.3}$$

mentre, allo stesso tempo, $\beta^{(1)}$ resta espresso [cfr. (4.4)] da

$$\beta^{(1)} = q_0 - \lambda_e \, I_1 \, \varepsilon^{(1)} - 2\mu_e \, \varepsilon^{(1)} - \lambda_v \, I_1 \, d^{(1)} - 2\mu_v \, d^{(1)}, \tag{5.4}$$

con

$$\lambda_e = k_e - (2/3)\mu_e, \qquad \lambda_v = k_v - (2/3)\mu_v \,. \tag{5.5}$$

([11]) G. LAMPARIELLO, *Sull'impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **13** (1931), 688-691.

([12]) T. LEVI CIVITA, **Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa**, N. Zanichelli, Bologna 1931.

([13]) Cfr.: A. SIGNORINI, Memoria cit. in ([2]), Cap. II, n. 3.

Con ciò, indicando, ormai senza possibilità di equivoci, brevemente con $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{v}$ lo spostamento e la velocità linearizzati, le (5.3) si trasformano naturalmente in [14]:

$$\varrho_* \boldsymbol{F} - \varrho_* \frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} q_0 - (\lambda_e + \mu_e)\cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{s} - \\ - (\lambda_v + \mu_v)\cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \mu_e \cdot \Delta_2 \boldsymbol{s} - \mu_v \cdot \Delta_2 \boldsymbol{v} \,. \tag{5.6}$$

A queste va infine aggiunta l'equazione di continuità, che scriverò nella forma

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{5.7}$$

Il sistema (5.6) (5.7) si presenta sotto forma normale rispetto alle derivate temporali. Si pensi ora di effettuare un cambiamento di variabili ponendo

$$y_j = \varphi_j(z, z_1, z_2, z_3), \qquad t = \tau(z, z_1, z_2, z_3), \tag{5.8}$$

e si voglia stabilire la condizione perchè il sistema trasformato possa ancora porsi in forma normale rispetto a z. Posto per brevità

$$y_0 = t, \qquad p_h = \frac{\partial z}{\partial y_h} \qquad (h = 0, 1, 2, 3),$$

si ha separatamente, mettendo in evidenza solo i termini che contengono le derivate di ordine massimo in z,

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2} = p_0^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial z^2} + \dots,$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{s} = \sum_1^3{}_k\, p_k\, \boldsymbol{c}_k \sum_1^3{}_h\, p_h \frac{\partial^2 s_h}{\partial z^2} + \dots, \qquad \Delta_2 \boldsymbol{s} = \sum_1^3{}_k\, p_k^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial z^2} + \dots,$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = p_0 \sum_1^3{}_k\, p_k\, \boldsymbol{c}_k \sum_1^3{}_h\, p_h \frac{\partial^3 s_h}{\partial z^3} + \dots, \qquad \Delta_2 \boldsymbol{v} = p_0 \sum_1^3{}_k\, p_k^2 \frac{\partial^3 \boldsymbol{s}}{\partial z^3} + \dots \,.$$

---

(14) Ormai senza pericolo di confusione sopprimo l'indice P_*.

Posto allora per semplicità

$$(5.9)\qquad P=\Big(\sum_1^3{}_k\, p_k^2\Big)^{1/2},\qquad \alpha_k=p_k/P\qquad (k=1,\,2,\,3),$$

poichè il sistema (5.6) si trasforma in

$$(5.10)\qquad \mu_v\, p_0\, P^2\,\frac{\partial^3 \boldsymbol{s}}{\partial z^3}+\ldots+(\lambda_v+\mu_v)\,p_0\sum_1^3{}_k\; p_k\,\boldsymbol{c}_k\sum_1^3{}_h\,\frac{\partial^3 s_h}{\partial z^3}+\ldots=0,$$

la condizione perchè esistano onde reali si riduce a quella che si annulli il determinante

$$(5.11)\qquad \Delta=(\lambda_v+\mu_v)^3\,p_0^3\,P^6\begin{vmatrix}\alpha_1^2+k & \alpha_1\,\alpha_2 & \alpha_1\,\alpha_3\\ \alpha_2\,\alpha_1 & \alpha_2^2+k & \alpha_2\,\alpha_3\\ \alpha_3\,\alpha_1 & \alpha_3\,\alpha_2 & \alpha_3^2+k\end{vmatrix}$$

con

$$(5.12)\qquad k=\mu_v/(\lambda_v+\mu_v)\,.$$

Poichè si ha

$$\Delta=p_0^3P^6\cdot(\lambda_v+\mu_v)^3\,k^2\,(1+k),$$

la condizione per l'esistenza di caratteristiche reali variabili col tempo equivale a quella che sia $k=0$ oppure $k=-1$, condizioni queste ambedue assurde perchè, per essere $\mu_v>0$, $3\lambda_v+2\mu_v\geqslant 0$, è certo $k>0$.

6. – Dò ora un esempio di applicazione dei risultati conseguiti nei nn. precedenti ad un caso particolarmente semplice ma espressivo. Per maggiore semplificazione supporrò che il mezzo si riduca ad omogeneo in C_* ed insieme che $\overline{p}$ ed i coefficienti $\overline{m}$, $\overline{n}$, μ che figurano nella (3.7.1) non dipendano esplicitamente da P_*.

Si consideri allora la trasformazione definita da

$$(6.1)\qquad x_1=y_1+A(t)\cdot y_2,\qquad x_2=y_2,\qquad x_3=y_3\,.$$

Per essa si ha

$$
(6.2)\qquad \begin{cases} d_{12} = d_{21} = \dot{A}\,, & d_{11} = d_{22} = d_{33} = d_{13} = d_{23} = 0, \\ \bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\varepsilon}_{21} = -(1/2)A\,, & \bar{\varepsilon}_{11} = \bar{\varepsilon}_{22} = \bar{\varepsilon}_{33} = \bar{\varepsilon}_{13} = \bar{\varepsilon}_{23} = 0, \end{cases}
$$

per cui si ottiene [cfr. (3.7.1)]

$$
(6.3)\qquad \beta = \bar{p} - \bar{m} \begin{Vmatrix} 0 & A & 0 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + (\bar{n}/4) \begin{Vmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} - \mu \begin{Vmatrix} 0 & \dot{A} & 0 \\ \dot{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.
$$

Avendosi $I_1\,\bar{\varepsilon} = I_3\,\bar{\varepsilon} = 0$, $I_1\,d = I_3\,d = 0$, i coefficienti $\bar{m}$, $\bar{n}$, μ risultano funzioni solo di A^2 e $\dot{A}^2$, e perciò solo del tempo. Nel caso di trasformazioni linearizzate si avrebbe invece [cfr. (4.4)]:

$$
(6.4)\qquad \tau_{12}^{(1)} = -\mu_e\,A - \mu_v\,\dot{A}, \qquad \tau_{11}^{(1)} = \ldots = \tau_{23}^{(1)} = 0, \qquad q^{(1)} = p_0\,.
$$

L'influenza della non linearità si manifesta perciò in due modi differenti ([15]): a) con la presenza in β di una parte isotropa, $\bar{p}$, in generale non nulla, funzione degli invarianti $\bar{\varepsilon}$ e d; b) con la presenza di sforzi normali aggiuntivi, $X_{11} - \bar{p} = X_{22} - \bar{p} = nA^2/4$, funzioni solo di A^2.

Come si vede, la (3.7.1) non consente nel caso in esame che questi ultimi sforzi dipendano anche dalla velocità di deformazione. Tale particolarità è dovuta al fatto che la (3.7.1) si presenta, nei riguardi di d, come quasi lineare. Ciò non sembra tuttavia inaccettabile.

([15]) Cfr.: C. Truesdell, loc. cit. in ([1]), n. 10.