Riv. Mat. Univ. Parma 7 (1956), 359-362

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

La formula di Taylor-Cauchy. (**)

1. – Introduzione.

Ho osservato che la formula di CAUCHY su le derivate

$$(1) \qquad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0 + \theta\cdot(x - x_0))}{\varphi'(x_0 + \theta\cdot(x - x_0))}\{\varphi(x) - \varphi(x_0)\}$$

[valida, sotto note ipotesi, per le funzioni definite in un certo intervallo (a, b) contenente x_0], può anche scriversi nella forma

$$(1') \qquad f(x) = f(x_0) + f'_\varphi(x_0 + \theta\cdot(x - x_0))\cdot\{\varphi(x) - \varphi(x_0)\},$$

indicando con $f'_\varphi(x)$ la *derivata della funzione* $f(x)$ *rispetto alla funzione* $\varphi(x)$ [vedasi n. **2**]. La (1′) ha lo stesso aspetto formale del suo caso particolare [che si ottiene facendo $\varphi(x) \equiv x$] dato dalla formula del valor medio.

Mi sembra non privo di interesse il mostrare che, come la formula del valor medio viene generalizzata dalla formula di TAYLOR, così la formula di CAUCHY (1), od (1′), ha una generalizzazione parallela (che chiamo *formula di* TAYLOR-CAUCHY), e cioè

$$(2) \qquad f(x) = f(x_0) + f'_\varphi(x_0)\cdot\{\varphi(x) - \varphi(x_0)\} + \frac{1}{2!}f''_{\varphi^2}(x_0)\cdot\{\varphi(x) - \varphi(x_0)\}^2 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}_{\varphi^{n-1}}(x_0)\cdot\{\varphi(x) - \varphi(x_0)\}^{n-1} + T_n(x),$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 15-XI-1956.

dove $f''_{\varphi^2}(x)$, ..., $f^{(k)}_{\varphi^k}(x)$, ... sono le successive derivate della $f(x)$ rispetto alla $\varphi(x)$ [vedasi n. **2**], e $T_n(x)$, che si dirà ancora il *termine complementare* della (2), ha le seguenti espressioni:

$$T_n(x) = \frac{1}{n!}\left\{ f^{(n)}_{\varphi^n}(x_0) + \varepsilon(x-x_0) \right\}\cdot\left\{ \varphi(x) - \varphi(x_0) \right\}^n \tag{3}$$

con $\varepsilon(x-x_0)$ infinitesimo per $x \to x_0$,

$$T_n(x) = \frac{1}{(n-1)!\cdot s} f^{(n)}_{\varphi^n}(x_0 + \theta\cdot(x-x_0))\cdot \tag*{$(4)_s$}$$

$$\cdot\left\{ \varphi(x) - \varphi(x_0 + \theta\cdot(x-x_0)) \right\}^{n-s}\cdot\left\{ \varphi(x) - \varphi(x_0) \right\}^s$$

con s (reale) non nullo e tale che abbiano senso reale le potenze $\left\{ \varphi(x) - \varphi(x_0 + \theta\cdot(x-x_0)) \right\}^{n-s}$, $\left\{ \varphi(x) - \varphi(x_0) \right\}^s$ (¹) e $\theta = \theta(s)$ conveniente numero interno all'intervallo (0, 1). In particolare da $(4)_s$ per $s = n$ risulta

$$T_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}_{\varphi^n}(x_0 + \theta\cdot(x-x_0))\cdot\left\{ \varphi(x) - \varphi(x_0) \right\}^n, \tag*{$(4)_n$}$$

e per $s = 1$ risulta

$$T_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}_{\varphi^n}(x_0 + \theta\cdot(x-x_0))\cdot \tag*{$(4)_1$}$$

$$\cdot\left\{ \varphi(x) - \varphi(x_0 + \theta\cdot(x-x_0)) \right\}^{n-1}\cdot\left\{ \varphi(x) - \varphi(x_0) \right\}.$$

Per $\varphi(x) \equiv x$ la (2) diventa la formula di TAYLOR, relativa al valore x_0, della $f(x)$, e le varie espressioni precedenti di $T_n(x)$ diventano rispettivamente i noti termini complementari nelle forme di PEANO, SCHLÖMILCH, LAGRANGE, CAUCHY.

In prossimi lavori, sostituendo alle derivazioni delle pluriderivazioni, mostrerò che la (2) risulta poi un caso molto particolare di formule relative a funzioni di più variabili.

(¹) Così qualora voglia farsi $x = x_0$ dovrà supporsi $s > 0$.

2. – Derivazione di una funzione rispetto ad un'altra conveniente funzione.

Siano $f(x)$ e $\varphi(x)$ due funzioni continue in un intervallo (a, b) e derivabili nell'interno di (a, b). Dall'ipotesi che sia $\varphi'(x) \neq 0$ per ogni x interno ad (a, b) segue, come è ben noto, che è sempre $\varphi'(x) > 0$ o sempre $\varphi'(x) < 0$ nell'interno di (a, b). Pertanto la funzione $\varphi(x)$ in (a, b) sarà sempre o crescente o decrescente e avrà una determinata inversa $\overline{\varphi}(y)$. Risulta allora

$$f(x) = f(\overline{\varphi}(\varphi(x)) = F(\varphi(x)),$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}\varphi(x)}\,\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)\cdot \mathrm{D}_\varphi f(x) = \varphi'(x)\cdot f'_\varphi(x),$$

cioè

$$\mathrm{D}_\varphi\, f(x) = f'_\varphi(x) = \{\,\varphi'(x)\,\}^{-1}\cdot \mathrm{D}_x\, f(x)\,.$$

Fra operatori si ha

$$\mathrm{D}_\varphi = \{\,\varphi'(x)\,\}^{-1}\ \mathrm{D}_x\,.$$

Si ha poi (con notazioni ed ipotesi evidenti):

$$\mathrm{D}^2_\varphi\ f(x) = f''_{\varphi^2}(x) = (f''\varphi' - f'\varphi'')/\varphi'^3,$$

$$\mathrm{D}^3_\varphi\ f(x) = f'''_{\varphi^3}(x) = (f'''\varphi'^2 - 3f''\varphi'\varphi'' + 3f'\varphi''^2 - f'\varphi'\varphi''')/\varphi'^5,$$

. . . .

Ad esempio (per $x > 0$) è:

$$\mathrm{D}_{\log x}\ f(x) = x\cdot f'(x) = (x\mathrm{D})f(x),$$

$$\mathrm{D}^2_{\log x}\ f(x) = (\underline{x\mathrm{D}})^2\ f(x) = x^2\cdot f''(x) + x\cdot f'(x),$$

$$\mathrm{D}^3_{\log x}\ f(x) = (\underline{x\mathrm{D}})^3\ f(x) = x^3\cdot f'''(x) + 3x^2\cdot f''(x) + x\cdot f'(x),$$

. . . .

Segue dunque che, *se le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono nell'intervallo (a, b) derivabili fino a un certo ordine k, con $\varphi'(x) \neq 0$ nell'interno di (a, b), esistono in (a, b) le derivate di $f(x)$ rispetto a $\varphi(x)$ fino all'ordine k.*

3. – La formula di Taylor-Cauchy.

Dal n. precedente risulta che, se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono in (a, b) derivabili fino all'ordine $n-1$, con $\varphi'(x) \neq 0$, vale la formula (2), da cui

$$T_n(x) = f(x) - [f(x_0) + f'_{\varphi}(x_0) \cdot \{ \varphi(x) - \varphi(x_0) \} + \frac{1}{2!} f''_{\varphi^2}(x_0) \cdot \{ \varphi(x)\varphi(x-{}_0) \}^2 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}_{\varphi^{n-1}}(x_0) \cdot \{ \varphi(x) - \varphi(x_0) \}^{n-1}] .$$

Aggiungendo sulle funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ ulteriori ipotesi, si possono ottenere, in parallelismo a quanto si fa per la comune formula di TAYLOR, delle espressioni di $T_n(x)$ utili per le applicazioni.

1°) Il termine complementare (3). Supponiamo ulteriormente che esistano le derivate $f^{(n)}(x_0)$, $\varphi^{(n)}(x_0)$: allora [n. **2**] esisterà $f^{(n)}_{\varphi^n}(x_0)$. Ne segue, in virtù del n. **2** e procedendo con parallelismo a quanto si fa per dedurre il noto termine complementare nella forma di PEANO,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{T_n(x)}{\{ \varphi(x) - \varphi(x_0) \}^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}_{\varphi^n}(x_0),$$

da cui la (3).

2°) Il termine complementare $(4)_s$. Supponiamo ulteriormente che le derivate $f^{(n-1)}(x)$, $\varphi^{(n-1)}(x)$ siano continue in (a, b) e inoltre che esistano (finite) le derivate $f^{(n)}(x)$, $\varphi^{(n)}(x)$ nell'interno di (a, b). Da quest'ultima ipotesi segue allora [n. **2**] che nell'interno di (a, b) esisterà $f^{(n)}_{\varphi^n}(x)$. Posto $T_n(x)$ sotto la forma

$$T_n(x) = q_n(x) \cdot \{ \varphi(x) - \varphi(x_0) \}^s, \tag{5}$$

tenendo presente il n. **2**, appoggiandoci sopra una opportuna funzione ausiliaria e procedendo nel resto con buon parallelismo a quanto si fa per dedurre il noto termine complementare nella forma di SCHLÖMILCH, si ottiene

$$q_n(x) = \frac{1}{(n-1)! \cdot s} f^{(n)}_{\varphi^n}(x_0 + \theta \cdot (x - x_0)) \cdot \{ \varphi(x) - \varphi(x_0 + \theta \cdot (x - x_0)) \}^{n-s}.$$

Da questa e dalla (5) segue l'espressione $(4)_s$ di $T_n(x)$.