Riv. Mat. Univ. Parma 7 (1956), 187-209

DELFINA ROUX (*)

Media, funzione maggiorante e somme di coefficienti per le serie di potenze di ordine finito. (**)

1. - La serie di potenze $f(z) = \sum\limits_0^\infty a_n z^n$ abbia raggio di convergenza 1; ad essa associamo le seguenti ben note funzioni:

$$M_2(f;\ r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\, f(re^{i\theta})\,|^2 \, d\theta \right\}^{1/2} = \left(\sum_0^\infty |\, a_n\,|^2 \, r^{2n} \right)^{1/2},$$

$$\mathfrak{M}(f;\ r) = \sum_0^\infty |\, a_n\,|\, r^n, \qquad A(f;\ h) = \sum_0^h |\, a_n\,|, \qquad B(f;\ h) = (\sum_0^h |\, a_n\,|^2)^{1/2},$$

e consideriamo le quattro seguenti maggiorazioni asintotiche:

$(M_2,\ \alpha)$	$M_2(f;\ r) = O((1-r)^{-\alpha})$	per	$r \to 1-,$
$(\mathfrak{M},\ \alpha)$	$\mathfrak{M}(f;\ r) = O((1-r)^{-\alpha})$	per	$r \to 1-,$
$(A,\ \alpha)$	$A(f;\ h) = O(h^\alpha)$	per	$h \to +\infty,$
$(B,\ \alpha)$	$B(f;\ h) = O(h^\alpha)$	per	$h \to +\infty,$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico F. ENRIQUES, Università, Via C. Saldini 50, Milano, Italia.
(**) Ricevuto il 2-III-1956.

che sono collegate dalla seguente trama di implicazioni:

$$
(1.1)\qquad
\begin{array}{ccc}
(M_2,\ \alpha) & \Longleftrightarrow & (B,\ \alpha) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
(\mathfrak{M},\ \alpha + 1/2) & \Longleftrightarrow & (A,\ \alpha + 1/2)
\end{array}
$$

(le implicazioni nel verso $\Longleftarrow$ sono di tipo Abeliano e quelle nel verso $\Longrightarrow$ sono di tipo Tauberiano).

La validità di questo gruppo di proposizioni classiche pone il problema di quali siano le « costanti ammissibili » e le « migliori costanti » che garantiscano la validità delle relative disuguaglianze nel senso che andiamo a precisare. Ci serviremo della seguente comoda notazione: se $\mathcal{C}$ denota una qualunque classe di funzioni $f(z)$ e K è un numero qualunque, indicheremo con $K\cdot\mathcal{C}$ la classe delle funzioni $K\cdot f(z)$. Per ogni $\alpha \geqslant 0$, denotiamo con

$\mathcal{C}(M_2,\ \alpha)$ la classe delle funzioni $f(z)$ per le quali esiste $r_0 = r_0(f)$ tale che

$$M_2(f;\ r) \leqq (1-r)^{-\alpha}, \qquad \text{per} \quad r_0 \leqq r < 1;$$

$\mathcal{C}(\mathfrak{M},\ \alpha)$ la classe delle funzioni $f(z)$ per le quali esiste $r_0 = r_0(f)$ tale che

$$\mathfrak{M}(f;\ r) \leqq (1-r)^{-\alpha}, \qquad \text{per} \quad r_0 \leqq r < 1;$$

$\mathcal{C}(A,\ \alpha)$ la classe delle funzioni $f(z)$ per le quali esiste $h_0 = h_0(f)$ tale che

$$A(f;\ h) \leqq h^{\alpha}, \qquad \text{per} \quad h \geqq h_0;$$

$\mathcal{C}(B,\ \alpha)$ la classe delle funzioni $f(z)$ per le quali esiste $h_0 = h_0(f)$ tale che

$$B(f;\ \alpha) \leqq h^{\alpha}, \qquad \text{per} \quad h \geqq h_0 .$$

In queste definizioni si assume uguale a 1 la costante moltiplicativa nel secondo membro di ciascuna disuguaglianza e le classi $\mathcal{C}$ risultano, per così dire, normalizzate; questa normalizzazione è essenziale quando si voglia indagare sulle costanti moltiplicative che consentono il passaggio dall'una all'altra di dette classi. Per svolgere una tale indagine sono utili anche le definizioni seguenti.

Diremo che un numero positivo è:

1°) una *K-costante ammissibile* da M_2 a B, e si denoterà con $K_{M_2B}(\alpha)$, quando per ogni $f(z) \in \mathcal{C}(M_2, \alpha)$ vale

$$f(z) \in K_{M_2B}(\alpha) \cdot \mathcal{C}(B, \alpha);$$

2°) una *K-costante ammissibile* da M_2 a $\mathfrak{M}$, e si denoterà con $K_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha)$, quando per ogni $f(z) \in \mathcal{C}(M_2, \alpha)$ vale

$$f(z) \in K_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha) \cdot \mathcal{C}(\mathfrak{M}, \alpha + 1/2);$$

ecc., in relazione evidente col quadro (1.1) di implicazioni, e così:

8°) una *K-costante ammissibile* da A a $\mathfrak{M}$, e si denoterà con $K_{A\mathfrak{M}}(\alpha)$, quando per ogni $f(z) \in \mathcal{C}(A, \alpha)$ vale

$$f(z) \in K_{A\mathfrak{M}}(\alpha) \cdot \mathcal{C}(\mathfrak{M}, \alpha).$$

Si vengono a definire, per ogni $\alpha \geqq 0$, le seguenti 8 categorie di costanti:

$$K_{M_2B}(\alpha),\ K_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha),\ K_{M_2A}(\alpha),\ K_{BM_2}(\alpha),\ K_{B\mathfrak{M}}(\alpha),\ K_{BA}(\alpha),\ K_{\mathfrak{M}A}(\alpha),\ K_{A\mathfrak{M}}(\alpha),$$

e per ciascuna categoria si può considerare l'estremo inferiore (eventualmente minimo)

$$K^*_{M_2B}(\alpha) = \operatorname{Inf} K_{M_2B}(\alpha),$$

e così si hanno, per ogni $\alpha \geqq 0$, le 8 costanti

$$K^*_{M_2B}(\alpha),\ K^*_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha),\ K^*_{M_2A}(\alpha),\ K^*_{BM_2}(\alpha),\ K^*_{B\mathfrak{M}}(\alpha),\ K^*_{BA}(\alpha),\ K^*_{\mathfrak{M}A}(\alpha),\ K^*_{A\mathfrak{M}}(\alpha),$$

che diremo *le migliori K-costanti*.

2. - In questa Nota si sono determinati dei possibili valori per le K-costanti ammissibili [e implicitamente abbiamo dato semplici dimostrazioni delle implicazioni che figurano nello schema (1.1) seguendo vie semplici e, in massima parte, classiche]; inoltre si sono stabilite delle limitazioni per le migliori costanti

K^*. In particolare, si sono determinati i valori delle seguenti migliori costanti (1) [qui si pone $\alpha! = \Gamma(\alpha + 1)$]:

$$K^*_{M_2B}(0) = 1; \quad K^*_{M_2\mathfrak{M}}(0) = 0, \quad K^*_{M_2\mathfrak{M}}(1/2) = \sqrt{2}; \quad K^*_{M_2A}(0) = 0;$$

$$K^*_{BM_2}(\alpha) = 2^{-\alpha} \sqrt{(2\alpha)!} \qquad \text{per ogni} \quad \alpha \geqq 0;$$

$$K^*_{BA}(0) = 0; \quad K^*_{BA}(1/2) = 1; \quad K^*_{B\mathfrak{M}}(0) = 0, \quad K^*_{B\mathfrak{M}}(1/2) = 1; \quad K^*_{\mathfrak{M}A}(0) = 1;$$

$$K^*_{A\mathfrak{M}}(\alpha) = \alpha! \qquad \text{per ogni} \quad \alpha \geqq 0,$$

dove vanno segnalate specialmente $K^*_{BM_2}(\alpha)$ e $K^*_{A\mathfrak{M}}(\alpha)$ che sono generali per $\alpha \geqq 0$.

I risultati sono i seguenti:

$$\begin{cases} 2^\alpha/\sqrt{(2\alpha)!} \leqq K^*_{M_2B}(\alpha) \leqq (e/\alpha)^\alpha \qquad \text{per} \qquad \alpha > 0, \\ K^*_{M_2B}(0) = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha - 1/2)!\ 2^\alpha/\sqrt{(2\alpha - 1)!} \leqq K^*_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha) \leqq (\alpha + 1/2)^{\alpha + \frac{1}{2}} \alpha^{-\alpha} \quad \text{per } \alpha > 0 \text{ (G. Ricci)}, \\ K^*_{M_2\mathfrak{M}}(0) = 0 \quad \text{(Teorema di G. H. Hardy)}, \\ K^*_{M_2\mathfrak{M}}(1/2) = \sqrt{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2^\alpha}{(\alpha + 1/2)\sqrt{(2\alpha - 1)!}} \leqq K^*_{M_2A}(\alpha) \leqq \left(\dfrac{e^{2\gamma_0} - 1}{2\gamma_0^{2\alpha+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{per} \qquad \alpha > 0 \\ \qquad \text{e per} \quad \gamma_0 > 0 \quad \text{radice di} \quad \gamma e^{2\gamma} - (\alpha + 1/2)(e^{2\gamma} - 1) = 0, \\ K^*_{M_2A}(0) = 0; \end{cases}$$

---

(1) Per la costante $K^*_{M_2\mathfrak{M}}(0)$ vedasi:

G. H. Hardy, *A theorem concerning Taylor's series*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (1) **44** (1913), 147-160 (in particolare, pp. 147-150).

E. Landau, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin 1929, cfr. pp. 31-32.

G. Ricci, *Una osservazione sulle funzioni maggioranti delle serie di potenze*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **10** (1955), 147-153.

$$K^*_{BM_2}(\alpha) = \{(2\alpha)!\}^{1/2}\, 2^{-\alpha} \qquad \text{per} \qquad \alpha \geqq 0;$$

$$\begin{cases} (\alpha - 1/2)!\,\sqrt{2\alpha} \leqq K^*_{B\mathfrak{M}}(\alpha) \leqq \{(2\alpha)!\}^{1/2}\,(\alpha + 1/2)^{\alpha+1/2}(2\alpha)^{-\alpha} & \text{per} \quad \alpha > 0, \\ K^*_{B\mathfrak{M}}(0) = 0, \\ K^*_{B\mathfrak{M}}(1/2) = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2\alpha}/(\alpha + 1/2) \leqq K^*_{BA}(\alpha) \leqq (1-\gamma_0)^{\alpha+1/2} + \gamma_0^{1/2} \qquad \text{per} \qquad \alpha > 1/2 \\ \qquad\qquad \text{e per } \gamma_0 \text{ massima radice} > 0 \text{ di } (2\alpha + 1)\gamma(1-\gamma)^{2\alpha-1} - 1 = 0, \\ \sqrt{2\alpha}/(\alpha + 1/2) \leqq K^*_{BA}(\alpha) \leqq 1 \qquad \text{per} \qquad 0 < \alpha \leqq 1/2, \\ K^*_{BA}(0) = 0, \\ K^*_{BA}(1/2) = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1/\alpha! \leqq K^*_{\mathfrak{M}A}(\alpha) \leqq (e/\alpha)^{\alpha} & \text{per} \quad \alpha > 0, \\ K^*_{\mathfrak{M}A}(0) = 1; \end{cases}$$

$$K^*_{A\mathfrak{M}}(\alpha) = \alpha! \qquad\qquad \text{per} \qquad \alpha \geqq 0.$$

3. – Osservazione.

Possiamo considerare anche la classe $\overline{\mathfrak{C}}(M_2, \alpha)$ delle funzioni $f(z)$ tali che

$$M_2(f;\, r) \leqq (1-r)^{-\alpha} \qquad \text{per} \qquad 0 \leqq r < 1,$$

e le analoghe $\overline{\mathfrak{C}}(B, \alpha)$, $\overline{\mathfrak{C}}(M, \alpha)$, $\overline{\mathfrak{C}}(A, \alpha)$. È evidente che ogni $\overline{\mathfrak{C}}$ è *contenuta* nella corrispondente $\mathfrak{C}$; anzi, nel caso particolare $\alpha = 0$ si vede facilmente che $\mathfrak{C}$ e $\overline{\mathfrak{C}}$ coincidono (infatti, basta tenere presente che M_2, B, $\mathfrak{M}$, A sono funzioni crescenti dei rispettivi argomenti e che per $\alpha = 0$ esse convergono a un limite $\leqq 1$).

Se, per un momento, denotiamo con $\overline{K}_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha)$ ogni numero positivo tale che per ogni $f(z) \in \overline{\mathfrak{C}}(M_2, \alpha)$ valga

$$f(z) \in \overline{K}_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha) \cdot \overline{\mathfrak{C}}(\mathfrak{M}, \alpha + 1/2)$$

e diamo significato analogo a $\overline{K}_{M_2B}(\alpha)$, ecc., è evidente che ogni $K(\alpha)$ è a maggior ragione una $\overline{K}(\alpha)$. Ma si vede facilmente che, al contrario, ogni numero $\overline{K}(\alpha)+\varepsilon$ è una $K(\alpha)$, e pertanto

$$\overline{K}^* = \operatorname{Inf} \overline{K} = K^* = \operatorname{Inf} K .$$

Questa affermazione è evidente per $\alpha = 0$ poichè allora $\mathcal{C}$ e $\overline{\mathcal{C}}$ coincidono. Sia $\alpha > 0$ e dimostriamo, per esempio, che il numero $\overline{K}_{M_2B}(\alpha)+\varepsilon$ è una $K_{M_2B}(\alpha)$. Infatti, sia $f(z) \in \mathcal{C}(M_2, \alpha)$ e

$$M_2(f;\, r) \leqq (1-r)^{-\alpha} \qquad \text{per} \qquad r_0 \leqq r < 1;$$

allora, per la convergenza uniforme di $\sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n}$ per $0 \leqq r \leqq r_0$, si può determinare $\nu = \nu(f, \alpha)$ tale che sia $M_2(f - f_\nu;\, r) < 1$ per $0 \leqslant r \leqq r_0$. Essendo

$$M_2(f - f_\nu;\, r) \leqq M_2(f;\, r) \leqq (1-r)^{-\alpha} \qquad \text{per} \qquad r_0 \leqq r < 1$$

e $(1-r)^{-\alpha}$ crescente per $0 \leqq r < 1$, risulta:

$$M_2(f - f_\nu;\, r) \leqq (1-r)^{-\alpha} \qquad \text{per} \qquad 0 \leqq r < 1,$$

e quindi, per la definizione di $\overline{K}_{M_2B}(\alpha)$, è

$$B(f - f_\nu;\, h) \leqq \overline{K}_{M_2B}(\alpha) \cdot h^\alpha \qquad \text{per} \qquad h \geqq h_0$$

e quindi ancora è

$$B(f;\, h) = B(f_\nu;\, h) + B(f - f_\nu;\, h) \leqq B(f_\nu;\, \nu) + \overline{K}_{M_2B}(\alpha) \cdot h^\alpha \qquad \text{per} \qquad h \geqq h_0;$$

essendo $\alpha > 0$, risulta $B(f_\nu;\, \nu)/h^\alpha \to 0$ per $h \to +\infty$ e perciò abbiamo

$$B(f;\, h) \leqq \left\{ \overline{K}_{M_2B}(\alpha) + \varepsilon \right\} h^\alpha \qquad \text{per} \qquad h \geqq h_1(f, \nu, \alpha;\, \varepsilon).$$

4. – Un altro problema analogo per il passaggio da una $\overline{\mathcal{C}}$ a un'altra $\overline{\mathcal{C}}$.

Denotiamo con $H_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha)$ un numero non negativo tale che per ogni $f(z) \in \overline{\mathcal{C}}\ (M_2, \alpha)$ valga

$$f(z) \in H_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha) \cdot \overline{\mathcal{C}}(\mathfrak{M}, \alpha + 1/2).$$

È evidente che ogni $H(\alpha)$ è, a maggiore ragione, una $K(\alpha)$, ma in generale non si potrà affermare il contrario, e quindi, posto, per esempio,

$$H^*_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha) = \mathrm{Inf}\; H_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha),$$

risulterà

$$H^*_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha) \geqq K^*_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha)\,.$$

Per *le migliori H-costanti* abbiamo stabilito le seguenti limitazioni:

$$H^*_{M_2B}(\alpha) \leqq (2\alpha+1)^{\alpha+\frac{1}{2}}\,\alpha^{-\alpha} \quad \text{per} \quad \alpha > 0, \qquad H^*_{M_2B}(0) = K^*_{M_2B}(0) = 1,$$

$$H^*_{\mathfrak{M}A}(\alpha) \leqq (\alpha+1)^{\alpha+1}\,\alpha^{-\alpha} \quad \text{per} \quad \alpha > 0, \qquad H^*_{\mathfrak{M}A}(0) = K^*_{\mathfrak{M}A}(0) = 1\,.$$

5. – Le K-costanti per classi di funzioni $f(z)$ definite con funzioni $L(x($ lentamente oscillanti.

Denotiamo con $\mathfrak{L}$ la classe delle funzioni $L(x)$ *positive lentamente oscillanti*, cioè delle funzioni $L(x)$ con le seguenti proprietà:

a) $\quad L(x) > 0 \quad$ per x abbastanza grande,

b) $\quad L(cx) \sim L(x) \quad$ per ogni $c > 0$ e per $x \to +\infty$.

Denotiamo con $\mathcal{C}(M_2, \alpha, L)$, $\mathcal{C}(\mathfrak{M}, \alpha, L)$, $\mathcal{C}(A, \alpha, L)$, $\mathcal{C}(B, \alpha, L)$ le classi delle funzioni $f(z)$ per le quali risulta, rispettivamente,

$$M_2(f;\, r) \leqq (1-r)^{-\alpha}\, L(1/(1-r)) \qquad \text{per} \qquad r_0 \leqq r < 1,$$

$$\mathfrak{M}(f;\, r) \leqq (1-r)^{-\alpha}\, L(1/(1-r)) \qquad \text{per} \qquad r_0 \leqq r < 1,$$

$$B(f;\, h) \leqq h^{\alpha} L(h) \qquad \text{per} \qquad h_0 \leqq h,$$

$$A(f;\, h) \leqq h^{\alpha} L(h) \qquad \text{per} \qquad h_0 \leqq h,$$

essendo r_0 abbastanza prossimo a 1 e h_0 abbastanza grande.

Per ognuna delle classi di funzioni precedenti si pone il problema delle K-costanti, come è stato illustrato al n. **1**. Per esempio, $K_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha, L)$ è ogni numero tale che

« per ogni $f(z) \in \mathcal{C}(M_2, \alpha, L)$ vale $f(z) \in K_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha, L)\cdot\mathcal{C}(\mathfrak{M}, \alpha + 1/2, L)$ ».

Si perviene ai seguenti risultati che assegnano *maggiorazioni uniformi* rispetto alla funzione L della classe $\mathfrak{L}$ delle costanti $K^* = \operatorname{Inf} K$:

$$K^*_{M_2B}(\alpha, L) \leqq (e/\alpha)^\alpha \qquad \text{per} \quad \alpha \geqq 0,$$

$$K^*_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha, L) \leqq (\alpha + 1/2)^{\alpha+1/2}\alpha^{-\alpha} \qquad \text{per} \quad \alpha \geqq 0,$$

$$K^*_{M_2A}(\alpha, L) \leqq \{(e^{2\gamma} - 1)/(2\gamma^{2\alpha+1})\}^{1/2} \qquad \text{per} \quad \alpha \geqq 0$$

e per γ radice positiva di $\gamma e^{2\gamma} - (\alpha + 1/2)(e^{2\gamma} - 1) = 0$,

$$K^*_{BM_4}(\alpha, L) \leqq 4^{-\alpha}\{(4\alpha)!\}^{1/4}\{(4\alpha + 1)(4\alpha + 2)(4\alpha + 3)/2\}^{1/12} \qquad \text{per} \quad \alpha \geqq 0,$$

$$K^*_{B\mathfrak{M}}(\alpha, L) \leqq (\alpha + 1/2)^{\alpha+1/2}(4\alpha)^{-\alpha}\{(4\alpha)!\}^{1/4}\cdot\{(4\alpha + 1)(4\alpha + 2)(4\alpha + 3)/2\}^{1/12} \qquad \text{per} \quad \alpha \geqq 0,$$

$$\begin{cases} K^*_{BA}(\alpha, L) \leqq (1 - \gamma)^{\alpha+1/2} + \gamma^{1/2} & \text{per} \quad \alpha > 1/2 \\ \quad \text{e } \gamma \text{ la maggiore delle due radici di } (2\alpha + 1)^2\gamma(1 - \gamma)^{2\alpha-1} - 1 = 0, & \\ K^*_{BA}(\alpha, L) \leqq 1 & \text{per} \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1/2, \end{cases}$$

$$K^*_{\mathfrak{M}A}(\alpha, L) \leqq (e/\alpha)^\alpha \qquad \text{per} \quad \alpha \geqq 0,$$

$$K^*_{A\mathfrak{M}}(\alpha, L) \leqq 2^{-\alpha}\{(2\alpha)!\}^{1/2}\{(2\alpha + 1)(2\alpha + 2)(2\alpha + 3)/2\}^{1/6} \qquad \text{per} \quad \alpha \geqq 0.$$

6. – Osservazione elementare su una serie ausiliaria.

Osserviamo preliminarmente che $(1-r^{\mu})^{-(\lambda+1)} \to +\infty$ per $r \to 1-$, essendo $\lambda > -1$ e $\mu > 0$. Pertanto abbiamo

$$(1-r)^{-(\lambda+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{\lambda} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \{1+o(1)\} \frac{n^{\lambda}}{\lambda!} r^n$$

da cui

$$(1-r)^{-(\lambda+1)} = \{1+o(1)\} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\lambda}}{\lambda!} r^n \qquad \text{per} \qquad r \to 1-$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\lambda} r^n \sim \lambda!/(1-r)^{\lambda+1} \qquad \text{per} \qquad r \to 1-. \tag{6.1}$$

Sostituendo r^{μ} in luogo di r, segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\lambda} r^{\mu n} \sim \frac{\lambda!}{(1-r^{\mu})^{\lambda+1}} = \frac{\lambda!}{(1-r)^{\lambda+1}} \left(\frac{1-r}{1-r^{\mu}}\right)^{\lambda+1} \qquad \text{per} \qquad r \to 1-$$

cioè otteniamo l'espressione asintotica della annunciata serie ausiliaria $\sigma_{\lambda,\mu}$:

$$\sigma_{\lambda,\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} n^{\lambda} r^{\mu n} \sim \frac{\lambda!}{\mu^{\lambda+1}} \frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}} \qquad \text{per} \qquad r \to 1-. \tag{6.2}$$

7. – Valutazione di M_2, B, $\mathfrak{M}$, A per la funzione $\varphi(z) = (1-z)^{-\gamma}$ con $\gamma > 0$.

Lo sviluppo in serie di potenze della funzione $\varphi(z)$ è

$$\varphi(z) = (1-z)^{-\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\gamma-1}{\gamma-1} z^n . \tag{7.1}$$

Si ha allora, per $\gamma > 1/2$,

$$M_2^2(\varphi;\, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\gamma-1}{\gamma-1}^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \{1+o(1)\} \frac{n^{2(\gamma-1)}}{(\gamma-1)!^2} r^{2n} ,$$

da cui

$$M_2^2(\varphi;\ r) \sim \frac{1}{(\gamma-1)!^2} \sum_{n=0}^{\infty} n^{2(\gamma-1)} r^{2n} \qquad \text{per} \quad \gamma > 1/2, \quad r \to 1-,$$

e, per la (6.2),

$$M_2^2(\varphi;\ r) \sim \frac{(2\gamma-2)!}{(\gamma-1)!^2\, 2^{2\gamma-1}} \frac{1}{(1-r)^{2\gamma-1}} \qquad \text{per} \quad \gamma > 1/2, \quad r \to 1-,$$

e quindi

$$(7.2) \qquad M_2(\varphi;\ r) \sim \frac{\sqrt{(2\gamma-2)!}}{2^{\gamma-\frac{1}{2}}(\gamma-1)!} \frac{1}{(1-r)^{\gamma-\frac{1}{2}}} \qquad \text{per} \quad \gamma > 1/2, \quad r \to 1-.$$

Veniamo a valutare asintoticamente $B(\varphi;\ h)$:

$$B^2(\varphi;\ h) = \sum_{n=0}^{h} \binom{n+\gamma-1}{\gamma-1}^2 = \sum_{0}^{h} \frac{n^{2\gamma-2}}{(\gamma-1)!^2} \{1 + o(1)\}$$

da cui

$$B^2(\varphi;\ h) \sim \sum_{n=0}^{h} \frac{n^{2\gamma-2}}{(\gamma-1)!^2} \sim \frac{1}{(\gamma-1)!^2} \int_0^h x^{2\gamma-2}\, dx \sim \frac{h^{2\gamma-1}}{(2\gamma-1)\cdot(\gamma-1)!^2}$$

$$\text{per} \qquad \gamma > 1/2, \qquad h \to +\infty,$$

e quindi

$$(7.3) \qquad B(\varphi;\ h) \sim \frac{h^{\gamma-\frac{1}{2}}}{(\gamma-1)!\sqrt{2\gamma-1}} \qquad \text{per} \quad \gamma > 1/2, \quad h \to +\infty.$$

La funzione maggiorante di $\varphi(z)$ è evidentemente

$$(7.4) \qquad \mathfrak{M}(\varphi;\ r) = (1-r)^{-\gamma} \qquad \text{per} \qquad \gamma > 0.$$

In modo analogo valutiamo asintoticamente $A(\varphi;\ h)$:

$$A(\varphi;\ h) = \sum_{n=0}^{h} \binom{n+\gamma-1}{\gamma-1} = \sum_{n=0}^{h} \{1 + o(1)\} \frac{n^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!} \qquad \text{per} \quad h \to +\infty$$

da cui

$$A(\varphi;\ h) \sim \frac{1}{(\gamma-1)!}\sum_{n=0}^{h} n^{\gamma-1} \sim \frac{1}{(\gamma-1)!}\int_0^h x^{\gamma-1}\,dx$$

cioè

$$A(\varphi;\ h) \sim \frac{h^\gamma}{\gamma!} \qquad \text{per} \qquad \gamma > 0, \quad h \to +\infty. \tag{7.5}$$

8. – Limitazione per $K^*_{M_2 B}(\alpha)$.

Dimostriamo che per ogni $\alpha \geqq 0$ si può assumere $K_{M_2 B}(\alpha) = e^\alpha \alpha^{-\alpha} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ arbitrario).

Infatti, se così non fosse esisterebbe almeno una $f(z) \in \mathcal{C}(M_2,\ \alpha)$ alla quale si può coordinare un $\delta > 0$ e una successione crescente di valori h^* di h tali che sia

$$B^2(f;\ h^*) > (1+\delta)\, e^{2\alpha} \alpha^{-2\alpha} h^{*2\alpha}.$$

È allora

$$M_2^2(f;\ r) = (1-r^2)\sum_{n=0}^{\infty} B^2(f;\ n)\cdot r^{2n} \geqq (1-r^2)\sum_{n=h^*}^{\infty} B^2(f;\ n)\cdot r^{2n} \geqq$$

$$\geqq (1-r^2)\sum_{n=h^*}^{\infty} B^2(f;\ h^*)\, r^{2n} \geqq (1+\delta) e^{2\alpha}\alpha^{-2\alpha} h^{*2\alpha} r^{2h^*}.$$

Posto ora $1 - r^2 = t/h^*$, cioè $r^2 = 1 - t/h^*$, si ha

$$M_2^2(f;\ r) \geqq (1+\delta)e^{2\alpha}\alpha^{-2\alpha}\frac{t^{2\alpha}}{(1-r^2)^{2\alpha}}\left(1-\frac{t}{h^*}\right)^{h^*} \geqq (1+\delta)e^{2\alpha}\alpha^{-2\alpha}\frac{t^{2\alpha}}{2^{2\alpha}e^t}\frac{1+o(1)}{(1-r)^{2\alpha}},$$

e ciò è assurdo poichè per $t = 2\alpha$ risulta

$$\underline{\lim}\{M_2^2(f;\ r)\cdot(1-r)^{2\alpha}\} > 1 + \delta/2,$$

contro la definizione di $\mathcal{C}(M_2, \alpha)$ (vedasi n. 1). Segue che vale

$$K_{M_2B}(\alpha) = e^{\alpha}\alpha^{-\alpha} + \varepsilon \qquad \text{(per ogni } \varepsilon > 0\text{)},$$

da cui $K^*_{M_2B}(\alpha) \leqq e^{\alpha}\,\alpha^{-\alpha}$.

Per stabilire la disuguaglianza a sinistra consideriamo la funzione

$$\varphi_1(z) = \left\{ (\alpha - 1/2)!\cdot 2^{\alpha}/\sqrt{(2\alpha-1)!} - \varepsilon \right\}(1-z)^{-(\alpha+1/2)} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Per la (7.2) $\varphi_1(z) \in \mathcal{C}(M_2, \alpha)$ e per la (7.3) abbiamo

$$B(\varphi_1;\ h) \leqq \left\{ 2^{\alpha}/\sqrt{(2\alpha)!} - \varepsilon_1 \right\} h^{\alpha} \qquad (\varepsilon_1 > 0),$$

da cui segue

$$K^*_{M_2B}(\alpha) \geqq 2^{\alpha}/\sqrt{(2\alpha)!}\,.$$

Nel caso particolare $\alpha = 0$ deve essere $\sum_{n=0}^{\infty} |\, a_n\,|^2\, r^{2n} \leqq 1$ e quindi $\sum_{n=0}^{\infty} |\, a_n\,|^2 \leqq 1$; pertanto $K^*_{M_2B}(0) \leqq 1$; la considerazione della funzione $f(z) \equiv 1$ (costante) porta

$$K^*_{M_2B}(0) = 1.$$

9. – Limitazione per $K^*_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha)$.

Per la disuguaglianza a destra vedasi G. Ricci ([2]). Per stabilire la disuguaglianza a sinistra consideriamo la funzione ausiliaria $\varphi_1(z)$ definita nel n. precedente: per essa è

$$\mathfrak{M}(\varphi_1;\ r) \equiv \varphi_1(r),$$

da cui segue

$$K^*_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha) \geqq (\alpha - 1/2)!\ 2^{\alpha}/\sqrt{(2\alpha-1)!}\,, \qquad K^*_{M_2\mathfrak{M}}(1/2) = \sqrt{2}\,.$$

([2]) G. Ricci, *Sull'andamento delle funzioni maggioranti delle serie di potenze*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **40** (1955), 285-306. In particolare, vedasi pp. 294-299, dove si trova la disuguaglianza a destra in casi più generali.

Nel caso particolare $\alpha = 0$ è $K^*_{M_2\mathfrak{M}}(0) = 0$ per il teorema di G. H. HARDY (³), e questo valore nullo è il limite per $\alpha \to 0+$ dell'estremo sinistro della limitazinne riguardante $K^*_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha)$.

10. – Limitazione per $K^*_{M_2A}(\alpha)$.

Sia $\alpha \geqq 0$. È

$$A(f;\ h) = \sum_0^h |a_n| = \sum_0^h |a_n|\, r^n \cdot 1/r^n \leqslant \Big\{ \sum_0^h |a_n|^2 r^{2n} \Big\}^{1/2} \cdot \Big\{ \sum_0^h 1/r^{2n} \Big\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq M_2(f;\ r) \cdot \left\{ \frac{r^{-2(h+1)} - 1}{r^{-2} - 1} \right\}^{1/2} \leqq \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \{ r^{-2(h+1)} - 1 \}^{1/2} (1 - r)^{-\alpha}.$$

Poniamo ora $h = \gamma/(1 - r)$, cioè $r = 1 - \gamma/h$; allora risulta:

$$1/(1 - r^2) = \{ 1 + o(1) \} h/(2\gamma) \qquad \text{per} \qquad h \to +\infty,$$

$$r^{-2(h+1)} = (1 - \gamma/h)^{-2(h+1)} = \{ 1 + o(1) \} e^{2\gamma} \qquad \text{per} \qquad h \to +\infty.$$

Ne segue

$$A(f;\ h) \leqq \left\{ \frac{e^{2\gamma} - 1}{2\gamma} \right\}^{1/2} h^{1/2} \left(\frac{h}{\gamma}\right)^{\alpha} \{ 1 + o(1) \} \leqq \left\{ \frac{e^{2\gamma} - 1}{2\gamma^{2\alpha+1}} \right\}^{1/2} h^{\alpha+1/2} \{ 1 + o(1) \}.$$

La funzione $F(\gamma) = \{ (e^{2\gamma} - 1)/(2\gamma^{2\alpha+1}) \}^{1/2}$ ammette per ogni α un valore minimo quando si assuma per γ la radice positiva γ_0 dell'equazione

$$\gamma e^{2\gamma} - (\alpha + 1/2)(e^{2\gamma} - 1) = 0.$$

Segue

$$K_{M_2A}(\alpha) = \{ (e^{2\gamma_0} - 1)/(2\gamma_0^{2\alpha+1}) \}^{1/2} + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

(³) Vedasi l'annotazione (¹).

Per stabilire la disuguaglianza a sinistra consideriamo ora la stessa funzione $\varphi_1(z)$ definita al n. **8**; per essa è $\varphi_1(z) \in \mathcal{C}(M_2, \alpha)$ e in forza della (7.5) è

$$A(\varphi_1;\ h) \leqq \left\{ \frac{2^\alpha}{(\alpha + 1/2)\sqrt{(2\alpha - 1)!}} - \varepsilon_1 \right\} h^{\alpha + 1/2} \qquad (\varepsilon_1 > 0),$$

da cui segue

$$K^*_{M_2A}(\alpha) \geqq 2^\alpha \{ (2\alpha - 1)! \}^{-1/2} / (\alpha + 1/2).$$

Sia $\alpha = 0$; essendo $K^*_{M_2A}(0) \leqq K^*_{M_2\mathfrak{M}}(0) \cdot K^*_{\mathfrak{M}A}(1/2)$, $K^*_{M_2\mathfrak{M}}(0) = 0$ e $K^*_{\mathfrak{M}A}(1/2)$ numero finito, segue

$$K^*_{M_2A}(0) = 0\ .$$

11. – Limitazione per $K^*_{BM_2}(\alpha)$.

È, per ogni $\alpha \geqq 0$,

$$M_2^2(f;\ r) = \sum_0^\infty |\, a_n |^2 r^{2n} = (1 - r^2) \left(\sum_0^\infty r^{2n} \cdot \sum_0^\infty |\, a_n |^2 r^{2n} \right) =$$

$$= (1 - r^2) \sum_0^\infty B^2(f;\ n) \cdot r^{2n} \leqq (1 - r^2) \sum_0^\infty n^{2\alpha} r^{2n} + (1 - r^2) \sum_0^{h_0} \{ B^2(f;\ n) - n^{2\alpha} \} r^{2n}$$

e perciò, per la (6.2),

$$M_2^2(f;\ r) \leqq \frac{2(1 - r)\,(2\alpha)!}{2^{2\alpha+1}} \, \frac{1 + o\,(1)}{(1 - r)^{2\alpha+1}} \qquad \text{per} \qquad r \to 1-,$$

da cui

$$M_2(f;\ r) \leqq \{ \sqrt{(2\alpha)!}/2^\alpha \} (1 - r)^{-\alpha} \{ 1 + o(1) \} \quad \text{per} \qquad r \to 1-,$$

e quindi

$$K_{BM_2}(\alpha) = \sqrt{(2\alpha)!}\ \ 2^{-\alpha} + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

Consideriamo ora la funzione

$$\varphi_2(z) = \{ \sqrt{2\alpha} \cdot (\alpha - 1/2)! - \varepsilon \} (1 - r)^{-\alpha} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Per la (7.3) è $\varphi_2(z) = \mathcal{C}(B, \alpha)$ e in conseguenza della (7.2) risulta

$$M_2(\varphi_2;\ r) \leqq \{ \sqrt{(2\alpha)!}\ 2^{-\alpha} - \varepsilon_1 \} (1 - r)^{-\alpha} \qquad (\varepsilon_1 > 0)$$

e quindi

$$K^*_{BM_2}(\alpha) = \sqrt{(2\alpha)!}\ 2^{-\alpha}.$$

12. - Limitazione per $K^*_{BA}(\alpha)$.

Come conseguenza immediata della disuguaglianza classica [detta di A. L. CAUCHY] $(\sum ab)^2 \leqq \sum a^2 \cdot \sum b^2$ si ottiene $K^*_{BA}(\alpha) \leqq 1$. Per ottenere qualche miglioramento consideriamo la disuguaglianza

$$A(f;\ h) = \sum_0^{\nu-1} | a_n | + \sum_\nu^h | a_n | \leqq \{ \sum_0^{\nu-1} 1^2 \cdot \sum_0^\nu | a_n |^2 \}^{1/2} + \{ \sum_\nu^h 1^2 \cdot \sum_\nu^h | a_n |^2 \}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \nu^{1/2} B(f;\ \nu) + \sqrt{h - \nu}\ \{ B^2(f;\ h) - B^2(f;\ \nu) \}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \nu^{1/2} B(f;\ \nu) + \sqrt{h - \nu}\ B(f;\ \nu) \leqq \nu^{\alpha + 1/2} + \sqrt{h - \nu}\ h^\alpha \qquad (h \geqq \nu \geqq h_0).$$

Poniamo ora $\nu = h \cdot (1 - \gamma)$, $\quad 0 \leqq \gamma < 1$; segue

$$A(f;\ h) \leqq \{ (1 - \gamma)^{\alpha + 1/2} + \gamma^{1/2} \} h^{\alpha + 1/2}.$$

La funzione $\varphi(\gamma) = (1 - \gamma)^{\alpha + 1/2} + \gamma^{1/2}$ ha, nell'intervallo $0 \leqq \gamma < 1$ un valore minimo; questo valore è 1 per $\alpha \leqq 1/2$, mentre per $\alpha > 1/2$ esso è minore di 1 e si ottiene assumendo per γ la maggiore γ_0 delle due radici positive dell'equazione

$$(2\alpha + 1)^2\, \gamma \cdot (1 - \gamma)^{2\alpha - 1} - 1 = 0.$$

Otteniamo il valore

$$K_{BA}(\alpha) = (1 - \gamma_0)^{\alpha + 1/2} + \gamma_0^{1/2}.$$

Consideriamo ora la funzione $\varphi_2(z)$ definita al n. **11**. Per la (7.5) è

$$A(\varphi_2;\ h) \leqq \left\{ \sqrt{2\alpha}/(\alpha+1/2) - \varepsilon_1 \right\} h^{\alpha+½} \qquad (\varepsilon_1 > 0),$$

da cui segue

$$K^*_{BA}(\alpha) \geqq \sqrt{2\alpha}/(\alpha+1/2) \qquad \text{e, in particolare,} \qquad K^*_{BA}(1/2) = 1.$$

Per $\alpha = 0$, essendo

$$K^*_{BA}(0) \leqq K^*_{BM_2}(0) \cdot K^*_{M_2\mathfrak{M}}(0) \cdot K^*_{\mathfrak{M}A}(1/2) \qquad \text{e} \qquad K^*_{BM_2}(0) = 1,$$

$$K^*_{M_2\mathfrak{M}}(0) = 0, \qquad K^*_{\mathfrak{M}A}(1/2) \quad \text{numero finito,}$$

segue

$$K^*_{BA}(0) = 0.$$

13. - Limitazione per $K^*_{B\mathfrak{M}}(\alpha)$.

Il passaggio da B ad $\mathfrak{M}$ attraverso M_2 ci fornisce

$$K^*_{B\mathfrak{M}}(\alpha) \leqq K^*_{BM_2}(\alpha) \cdot K^*_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha)$$

ed essendo

$$K^*_{BM_2}(\alpha) = \sqrt{(2\alpha)!} \cdot 2^{-\alpha} \qquad \text{per} \qquad \alpha \geqq 0,$$

$$K^*_{M_2\mathfrak{M}}(\alpha) \leqq (\alpha+1/2)^{\alpha+½}\,\alpha^{-\alpha} \qquad \text{per} \qquad \alpha > 0, \qquad K^*_{M_2\mathfrak{M}}(0) = 0,$$

segue

$$K^*_{B\mathfrak{M}}(\alpha) \leqq \sqrt{(2\alpha)!}\,(\alpha+1/2)^{\alpha+½}\,(2\alpha)^{-\alpha} \qquad \text{per} \qquad \alpha > 0, \qquad K^*_{B\mathfrak{M}}(0) = 0.$$

Consideriamo poi la funzione $\varphi_2(z)$ definita al n. **11**; per la (7.4) è

$$\mathfrak{M}(\varphi_2;\ r) \leqq \left\{ (\alpha-1/2)!\,\sqrt{2\alpha} - \varepsilon_1 \right\} (1-r)^{-(\alpha+½)} \qquad (\varepsilon_1 > 0),$$

da cui

$$K^*_{B\mathfrak{M}}(\alpha) \geqq (\alpha - 1/2)!\,\sqrt{2\alpha}\,.$$

In particolare, per $\alpha = 1/2$ si ottiene

$$K^*_{B\mathfrak{M}}(1/2) = 1.$$

14. – Limitazione per $K^*_{\mathfrak{M}\mathfrak{S}A}(\alpha)$.

Dimostriamo che per ogni $\alpha \geqq 0$ si può assumere

$$K_{\mathfrak{M}A}(\alpha) = e^{\alpha}\,\alpha^{-\alpha} + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

Infatti, se così non fosse, esisterebbe almeno una funzione $f(z) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{M}, \alpha)$ alla quale si può coordinare un $\delta > 0$ e una successione crescente di valori h^* di h, tale che

$$A(f;\ h^*) \geqq (1 + \delta)\, e^{\alpha}\, \alpha^{-\alpha}\, h^{*\alpha}\,.$$

È allora

$$\mathfrak{M}(f;\ r) \geqq (1 - r)\cdot \sum_{n=h^*}^{\infty} A(f;\ h^*)\cdot r^n \geqq$$

$$\geqq (1 + \delta)\,(1 - r)\, e^{\alpha}\,\alpha^{-\alpha}\, h^{*\alpha}\cdot \sum_{n=h^*}^{\infty} r^n \geqq e^{\alpha}\,\alpha^{-\alpha}(1 + \delta)\, h^{*\alpha}\, r^{h^*}.$$

Poniamo ora $r = 1 - t/h^*$ con $t > 0$, cioè $h^* = t/(1 - r)$, e si ha

$$\mathfrak{M}(f;\ r) \geqq (1 + \delta)\, e^{\alpha}\,\alpha^{-\alpha}\, t^{\alpha}(1 - r)^{-\alpha}(1 - t/h^*)^{h^*} =$$

$$= (1 + \delta)\, e^{\alpha}\,\alpha^{-\alpha}\, t^{\alpha} e^{-t}\,(1 - r)^{-\alpha}\{\,1 + o(1)\,\} \qquad \text{per} \qquad r \to 1-,$$

il che è assurdo, poiche per $t = \alpha$ risulta

$$\underline{\lim}\{\,\mathfrak{M}(f;\ r)\cdot(1 - r)^{\alpha}\,\} > 1 + \delta/2\,,$$

contro la definizione della classe $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}, \alpha)$ (vedasi n. **1**).

Consideriamo ora la funzione $\varphi(z) = (1-z)^{-\alpha} \in \mathcal{C}(\mathfrak{M}, \alpha)$. Per la (7.5) è

$$A(\varphi;\ h) \sim (1/\alpha!)\ h^{\alpha} \qquad \text{per} \qquad h \to +\infty$$

e quindi

$$K^{*}_{\mathfrak{M}A}(\alpha) \geqq 1/\alpha!\ .$$

Sia $\alpha = 0$; allora $\sum |\, a_n \,| \, r^n \leqq 1$ e quindi $\sum |\, a_n \,| \leqq 1$; pertanto $K^{*}_{\mathfrak{M}A}(0) \leqq 1$; la considerazione della funzione $f(z) \equiv 1$ (costante) porta evidentemente

$$K^{*}_{\mathfrak{M}A}(0) = 1\ .$$

15. – Limitazione per $K^{*}_{A\mathfrak{M}}(\alpha)$.

Per stabilire la disuguaglianza a destra veniamo a maggiorare $\mathfrak{M}(f;\ r)$. È

$$\mathfrak{M}(f;\ r) = \sum_{0}^{\infty} |\, a_n \,|\, r^n = (1-r)\ (\sum_{0}^{\infty} r^n \cdot \sum_{0}^{\infty} |\, a_n \,|\, r^n) =$$

$$= (1-r) \sum_{0}^{\infty} A(f;\ n)\, r^n \leqq (1-r) \cdot \sum_{0}^{\infty} n^{\alpha}\, r^n + (1-r) \sum_{0}^{h_0} \{ A(f;\ n) - n^{\alpha} \} r^n,$$

da cui, tenendo conto della (6.1), otteniamo

$$\mathfrak{M}(f;\ r) \leqq (1-r) \cdot \alpha!\ (1-r)^{-(\alpha+1)} \{ 1 + o(1) \} = \alpha!\ (1-r)^{-\alpha} \{ 1 + o(1) \}$$

$$\text{per} \qquad r \to 1-\ .$$

Segue

$$K_{A\mathfrak{M}}(\alpha) = \alpha! + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

Consideriamo la funzione $\varphi_3(z) = (\alpha! - \varepsilon)\ (1-z)^{-\alpha} \in \mathcal{C}(A, \alpha) \quad (\varepsilon > 0)$.
Per la (7.4) è

$$\mathfrak{M}(\varphi_3;\ r) = (\alpha! - \varepsilon)\ (1-r)^{-\alpha},$$

e perciò

$$K^*_{A\mathfrak{M}}(\alpha) = \alpha! \qquad \text{per ogni} \qquad \alpha \geqq 0.$$

16. – Limitazione per $H^*_{M_2 B}(\alpha)$.

Sia $f(z) \in \mathcal{C}(M_2, \alpha)$; allora è

$$B^2(f;\ h) = \sum_0^h |\ a_n\ |^2 = \sum_0^h |\ a_n\ |^2\, r^{2n} + \sum_0^h (1 - r^{2n})\ |\ a_n\ |^2 \leqq$$

$$\leqq M_2^2(f;\ r) + (1 - r^2) \cdot \sum_0^h (1 + r^2 + \ldots + r^{2n-2})\ |\ a_n\ |^2 \leqq$$

$$\leqq M_2^2(f;\ r) + (1 - r^2) \cdot \sum_0^h n\ |\ a_n\ |^2 \leqq M_2^2(f;\ r) + h \cdot (1 - r^2) \cdot B^2(f;\ h),$$

da cui

$$B^2(f;\ h) \cdot \{ 1 - (1 - r^2) h \} \leqq M_2^2(f;\ r)\,. \tag{16.1}$$

Sia $\alpha > 0$. Posto $h = t/(1 - r^2)$ con $0 < t < 1$, cioè $(1 - r)^{-\alpha} = (1 + r)^\alpha \cdot (1 - r^2)^{-\alpha} = (1 + r)^\alpha\, (h/t)^\alpha$, segue

$$B^2(f;\ h) \leqq (1 + r)^{2\alpha}\, (h/t)^{2\alpha}/(1 - t) < \{ 2^{2\alpha}\, t^{-2\alpha}/(1 - t) \} h^{2\alpha}\,.$$

La funzione $F(t) = (2/t)^{2\alpha}\,(1 - t)$ assume per $t = 2\alpha/(2\alpha + 1)$ il suo valore minimo, e pertanto si può assumere

$$H_{M_2 B}(\alpha) \leqq (2\alpha + 1)^{\alpha + 1/2}\, \alpha^{-\alpha} \qquad \text{per} \qquad \alpha > 0.$$

Sia $\alpha = 0$: da (16.1) segue $B^2(f;\ h) \leqslant 1/(1 - t)$ per ogni t con $0 < t < 1$, e quindi

$$H_{M_2 B}(0) = 1 + \varepsilon \qquad\qquad (\varepsilon > 0)\ ^{(4)}.$$

---

(4) Ciò è, d'altronde, già noto, essendo $H^*_{M_2 B}(0) = K^*_{M_2 B}(0) = 1$ (vedasi n. **3**).

17. – Limitazione per $H_{\mathfrak{M}_A}(\alpha)$.

È

$$A(f;\ h) = \sum_0^h |\, a_n \,| = \sum_0^h |\, a_n \,|\, r^n + \sum_0^h (1 - r^n)\, |\, a_n \,| \leqq$$

$$\leqq \mathfrak{M}(f;\ r) + (1 - r)\cdot \sum_0^h (1 + r + \ldots + r^{n-1})\, |\, a_n \,| \leqq$$

$$\leqq \mathfrak{M}(f;\ r) + (1 - r)\cdot \sum_0^h n \cdot |\, a_n \,| \leqq \mathfrak{M}(f;\ r) + h\cdot(1 - r)\cdot A(f;\ h),$$

e quindi

$$A(f;\ h)\cdot \left\{ 1 - h/(1 - r) \right\} \leqq \mathfrak{M}(f;\ r)\,. \tag{17.1}$$

Poniamo ora $1 - r = t/h$ con $0 < t < 1$, e sia $\alpha > 0$. Si ha

$$A(f;\ h) \leqq (h/t)^\alpha/(1 - t) = \left\{ t^{-\alpha}/(1 - t) \right\} h^\alpha.$$

La funzione $F(t) = t^{-\alpha}/(1 - t)$ assume il suo valore minimo (nell'intervallo $0 < t < 1$) per $t = \alpha/(\alpha + 1)$ e pertanto è

$$H_{\mathfrak{M}_A}(\alpha) = (\alpha + 1)^{\alpha + 1}\, \alpha^{-\alpha} \qquad \text{per} \qquad \alpha > 0.$$

Sia $\alpha = 0$; da (17.1) segue $A(f;\ h) \leqq 1/(1 - t)$ e perciò

$$H_{\mathfrak{M}_A}(0) = 1 + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0),$$

il che è, d'altronde, già noto, essendo $H^*_{\mathfrak{M}_A}(0) = K^*_{\mathfrak{M}_A}(0) = 1$.

18. - Le costanti $K(\alpha, L)$.

La determinazione di $K(\alpha, L)$-costanti possibili si può effettuare in modo analogo a quello seguito nei nn. **9-16** per le costanti $K(\alpha)$, quando si tengano presenti anche le seguenti proprietà delle funzioni della classe $\mathfrak{L}$:

1) $\quad L(x) \in \mathfrak{L} \cap \gamma \gtreqless 0 \implies L^{\gamma}(x) \in \mathfrak{L}$,

2) $\quad L(x) \in \mathfrak{L} \implies \sum_{n \geqq h} n^{-\delta-1} L(n) \sim (h^{-\delta}/\delta)\cdot L(h)$ per ogni $\delta > 0$,

3) $\quad L(x) \in \mathfrak{L} \implies \sum_{0}^{h} L(n) \sim h \cdot L(h)$ (5).

Riportiamo, a titolo d'esempio, il procedimento seguito per la determinazione di $K_{A\mathfrak{M}}(\alpha, L)$.

Sia $f(z) \in \mathcal{C}(A, \alpha, L)$, cioè $A(f, h) \leqq h^{\alpha} L(h)$ per $h \geqq h_0$. Possiamo scrivere

$$\mathfrak{M}(f, r) = \sum_{0}^{\infty} | a_n | r^n = (1-r)\cdot \sum_{0}^{\infty} A(f, n)\cdot r^n \leqq$$

$$\leqq (1-r)\left\{ \sum_{0}^{h_0} A(f, n)\cdot r^n + \sum_{h_0}^{h} A(f, n)\cdot r^n + \sum_{h}^{\infty} A(f, n)\cdot r^n \right\} = (1-r)(\textstyle\sum_1 + \sum_2 + \sum_3).$$

Ovviamente

$$\textstyle\sum_1 \leqq \displaystyle\sum_{0}^{h_0} | a_n | = O(1).$$

Per $\sum_2$ possiamo scrivere

$$\textstyle\sum_2 = \displaystyle\sum_{h_0}^{h} A(f, n)\cdot r^n \leqq \sum_{h_0}^{h} n^{\alpha} L(n)\cdot r^n \leqq \left\{ \sum_{1}^{h} L^2(n) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{1}^{h} n^{2\alpha} r^{2n} \right\}^{1/2}.$$

Dalla (7.1) si ricava

$$\sum_{0}^{h} n^{2\alpha} r^{2n} < \sum_{0}^{\infty} n^{2\alpha} r^{2n} \sim \left\{ (2\alpha)!/2^{2\alpha+1} \right\} (1-r)^{-(2\alpha+1)} \qquad \text{per} \qquad r \to 1- .$$

(5) Per queste proprietà vedasi, per esempio, G. Ricci, loc. cit. in (2), pp. 299-300.

In conseguenza delle proprietà 1) e 3) si ottiene

$$\sum_1^h L^2(n) \sim h \cdot L^2(h)$$

e, posto $h = \gamma/(1-r)$ con $\gamma > 0$, otteniamo

$$\sum_1^h L^2(n) \sim \frac{\gamma}{1-r} \cdot L^2\left(\frac{1}{1-r}\right),$$

da cui segue la maggiorazione di $\sum_2$:

$$\sum\nolimits_2 \leqq \frac{\{\gamma \cdot (2\alpha)!\}^{1/2}}{2^{\alpha+1/2}} (1-r)^{-(\alpha+1)} L\left(\frac{1}{1-r}\right)\{1 + o(1)\}.$$

Veniamo ora a valutare $\sum_3$:

$$\sum\nolimits_3 = \sum_h^\infty A(f, n) \cdot r^n \leqq \sum_h^\infty n^\alpha L(n) \cdot r^n \leqq \left\{ \sum_h^\infty n^{-(1+\delta)} L^2(n) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_h^\infty n^{2\alpha+\delta+1} r^{2n} \right\}^{1/2},$$

essendo $\delta > 0$. Per la (7.1) è

$$\sum_h^\infty n^{2\alpha+1+\delta} r^{2n} \leqq \sum_0^\infty n^{2\alpha+1+\delta} r^{2n} \sim (2\alpha + \delta + 1)! \cdot 2^{-(2\alpha+\delta+2)} (1-r)^{-(2\alpha+\delta+2)}.$$

Per le proprietà 1) e 3), avendo posto $h = \gamma/(1-r)$, si ottiene

$$\sum_h^\infty n^{-(1+\delta)} L^2(n) \sim (h^{-\delta}/\delta) \cdot L^2(h) \sim (\gamma^{-\delta}/\delta)\ (1-r)^\delta\ L^2\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

e quindi

$$\sum\nolimits_3 \leqq \frac{\{(2\alpha + \delta + 1)!\}^{1/2}}{\delta^{1/2}\, \gamma^{\delta/2}\, 2^{\alpha+1+\delta/2}} (1-r)^{-(\alpha+1)} L\left(\frac{1}{1-r}\right)\{1 + o(1)\}.$$

In definitiva per la funzione reale $\mathfrak{M}(f, r)$ abbiamo la limitazione

$$\mathfrak{M}(f, r) \leqq \left(\frac{\{(2\alpha + \delta + 1)!\}^{1/2}}{\delta^{1/2}\, \gamma^{\delta/2}\, 2^{\alpha+1+\delta/2}} + \frac{\{\gamma \cdot (2\alpha)!\}^{1/2}}{2^{\alpha+1/2}} + \varepsilon \right) (1-r)^{-\alpha} L\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

valevole per ogni $\varepsilon > 0$ e r abbastanza grande.

Scegliamo, per esempio, $\delta = 2$ e determiniamo γ in guisa che sia

$$\frac{(2\alpha + \delta + 1)!}{\delta \gamma^{\delta}\, 2^{2\alpha+\delta+2}} = \frac{\gamma \cdot (2\alpha)!}{2^{2\alpha+1}} .$$

Si ottiene

$$\gamma = \{ (2\alpha + 1)(2\alpha + 2)(2\alpha + 3)/2^4 \}^{1/3} .$$

Segue

$$K^*_{A\mathfrak{DM}}(\alpha, L) \leqq 2^{-\alpha} \{ (2\alpha)! \}^{1/2} \{ (2\alpha + 1)(2\alpha + 2)(2\alpha + 3)/2 \}^{1/6} .$$