Riv. Mat. Univ. Parma 7 (1956), 141-144

ANTONIO MAMBRIANI (*)

Sul concetto di « specie » di un' equazione differenziale.

In questa breve Nota ritorno su la definizione del concetto di « specie » di un'equazione differenziale per apportare un emendamento alla definizione proposta [1]. Colgo l'occasione per accennare, con esempi semplici, come si può procedere per stabilire la specie di una data equazione alle derivate parziali.

1. – Circa la definizione di equazione differenziale « di prima specie » nulla vi è da modificare. Tale definizione resta quindi la seguente:

Un'equazione differenziale in una funzione incognita $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ si dirà **di prima specie** quando esiste un pluriderivatore $\mathfrak{D}$ tale che l'equazione si possa scrivere nella forma

$$\Phi\,(x_1, \ldots, x_n, z, \mathfrak{D}\,z, \mathfrak{D}^2\,z, \ldots, \mathfrak{D}^m\,z) = 0,$$

dove il primo membro di funzione nota delle quantità $x_1, \ldots, x_n, z, \mathfrak{D}\,z$, $\mathfrak{D}^2\,z, \ldots, \mathfrak{D}^m\,z$ (essendo $\mathfrak{D}^2, \ldots, \mathfrak{D}^m$ le successive potenze d'iterazione di $\mathfrak{D}$).

2. – La definizione di equazione differenziale « di seconda specie » va così posta:

Un'equazione differenziale in una funzione incognita $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ si dirà **di seconda specie** quando non è di prima specie ed esistono due pluriderivatori $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ tali che l'equazione

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

[1] A. MAMBRIANI, *La pluriderivazione e una classificazione delle equazioni differenziali*, Riv. Mat. Univ. Parma **6** (1955), 321-348. Cfr. pp. 335-337.

se è del primo oridine si possa scrivere nella forma

$$\Phi\,(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ z,\ \mathfrak{D}_1 z,\ \mathfrak{D}_2 z) = 0,$$

se è del secondo ordine si possa scrivere nella forma

$$\Phi\,(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ z,\ \mathfrak{D}_1 z,\ \mathfrak{D}_2 z,\ \mathfrak{D}_1^2 z,\ \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1 z,\ \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 z,\ \mathfrak{D}_2^2 z) = 0,$$

se è del terzo ordine si possa scrivere nella forma che s'ottiene dalla precedente introducendo nel primo membro anche gli argomenti

$$\mathfrak{D}_1^3 z,\quad \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^2 z,\quad \mathfrak{D}_1^2\mathfrak{D}_2 z,\quad \mathfrak{D}_2^2\mathfrak{D}_1 z,\quad \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2^2 z,\quad \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1 z,\quad \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 z,\quad \mathfrak{D}_2^3 z,$$

e così via.

3. – Analogamente, la definizione di equazione differenziale « di terza specie » va così posta:

Un'equazione differenziale in una funzione incognita $z = z(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ si dirà **di terza specie** quando non è di prima o di seconda specie ed esistono tre pluriderivatori $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ tali che l'equazione

se è del primo ordine si possa scrivere nella forma

$$\Phi\,(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ z,\ \mathfrak{D}_1 z,\ \mathfrak{D}_2 z,\ \mathfrak{D}_3 z) = 0,$$

se è del secondo ordine si possa scrivere nella forma

$$\Phi\,(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ z,\ \mathfrak{D}_1 z,\ \mathfrak{D}_2 z,\ \mathfrak{D}_3 z,$$
$$\mathfrak{D}_1^2 z,\ \mathfrak{D}_2^2 z,\ \mathfrak{D}_3^2 z,\ \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 z,\ \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1 z,\ \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3 z,\ \mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_1 z,\ \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3 z,\ \mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_2 z) = 0,$$

e così via.

Si comprendono poi le definizioni analoghe da porsi per le equazioni differenziali **di quarta specie, di quinta specie**, ecc. .

4. – Accenno ora, riferendomi ad esempi semplici di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, *come si può procedere per stabilire la specie di una data equazione alle derivate parziali.*

Per brevità, facciamo uso delle notazioni di MONGE per le derivate parziali prime e seconde di $z = z(x, y)$ e, essendo $\mathfrak{D} = X(x, y) \dfrac{\partial}{\partial x} + Y(x, y) \dfrac{\partial}{\partial y}$ un dato biderivatore, poniamo $\mathfrak{D}^2 z = \lambda$.

1°) Si abbia l'equazione

$$\Phi \equiv x^2 r - y^2 t + xp - yq = 0. \tag{1}$$

Essa sarà o di prima specie o di seconda specie. Se fosse di prima specie, cioè della forma

$$\Phi (x, y, z, \mathfrak{D} z, \mathfrak{D}^2 z) = 0,$$

con $\mathfrak{D} = X \dfrac{\partial}{\partial x} + Y \dfrac{\partial}{\partial y}$ opportuno biderivatore, si avrebbe (tenendo presente l'espressione di $\mathfrak{D}^2 z = \lambda$)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \cdot 2XY,$$

dove è necessariamente $\partial\Phi/\partial\lambda \neq 0$ e il prodotto XY non può essere identicamente nullo, e ciò è in contrasto con l'affermazione

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0$$

che si ricava da (1). Pertanto l'equazione (1) è di seconda specie.

2°) Si abbia l'equazione

$$\Phi \equiv xr + (x + y)s + yt + xp + yq - z = 0. \tag{2}$$

Essa sarà o di prima specie o di seconda specie. Se fosse di prima specie, cioè della forma

$$\Phi (x, y, z, \mathfrak{D} z, \mathfrak{D}^2 z) = 0,$$

con $\mathfrak{D} = X \dfrac{\partial}{\partial x} + Y \dfrac{\partial}{\partial y}$ opportuno biderivatore, si avrebbe

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \cdot X^2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \cdot 2XY, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \cdot Y^2 .$$

D'altra parte da (2) segue

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = x, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = x + y, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = y .$$

Ne risulta

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \cdot X^2 = x, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \cdot 2XY = x + y, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \cdot Y^2 = y,$$

da cui, eliminando $\partial \Phi / \partial \lambda$,

$$2Y/X = 1 + (y/x), \qquad 2X/Y = 1 + (x/y)$$

e moltiplicando membro tali eguaglianze si ha

$$4 = \{1 + (y/x)\}\{1 + (x/y)\},$$

ciò che non può essere in quanto x e y sono variabili indipendenti. Pertanto l'equazione (2) è di seconda specie.

Da questi due esempi si capisce la via da seguire in casi più complessi.