Riv. Mat. Univ. Parma 7 (1956), 139-140

VLADETA VUČKOVIĆ (*)

Ein Satz über reelle Folgen. (**)

In seiner Note [1] unternahm Herr L. TANZI CATTABIANCHI eine Untersuchung über den Satz von MERCER und verwandte Sätze auf eine elementare und methodisch interessante Weise, insbesondere in Bezug auf nichtmonotone Folgen. Ich möchte hier auf einen Satz Acht legen, der sich aus den Darlegungen des Herrn TANZI CATTABIANCHI herleiten lässt, und der, ohne Acht der MERCERschen Sätze, für sich selbst ziemlich Interesse haben soll. Das ist der

Satz 1. *Seien* $\{a_n\}$ *und* $\{b_n\}$ *zwei reelle Folgen und die Folge* $\{a_n\}$ *nicht monoton. Wenn für jedes* n *für welche* $a_n \gtreqless a_{n-1}$ *auch* $b_n \gtreqless a_n$ *ist (wobei in jeder Inklusion der gleiche Zeichen zu nehmen ist), so gilt*

$$\underline{\lim}\, b_n \leqslant \underline{\overline{\lim}}\, a_n \leqslant \overline{\lim}\, b_n .$$

Den Beweis dieses Satzes kann man den Paragraphen 7, 8 und 10 der genannten Note des Herrn TANZI CATTABIANCHI fast wörtlich entnehmen. Dabei soll man von den dort betrachteten Folgen $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ und $\{X_n\}$ die Folge $\{x_n\}$ ausser Acht lassen, die Folge $\{y_n\}$ als die Folge $\{b_n\}$ und die Folge $\{X_n\}$ als die Folge $\{a_n\}$ deuten, und die Erklärungen des § 7, die mit der Folge $\{x_n\}$ angeführt sind, sinngemäss mit der Folge $\{b_n\}$ ersetzen. Alles andere bleibt wörtlich den Ausführungen des Herrn TANZI CATTABIANCHI treu, so dass es mir nicht notwendig erscheint sie hier wiederzugeben.

(*) Adresse: Pädagogische Hochschule, Zrenjanin, Jugoslavija.
(**) Eigegangen am 17-I-1956.

Ich möchte noch eine leichte Verallgemeinerung des obigen Satzes angeben. Das ist der

Satz 2. *Seien* $\{a_n\}$ *und* $\{b_n\}$ *zwei reelle Folgen, und die Folge* $\{a_n\}$ *nicht monoton. Wenn es eine positive Nullfolge* $\{\varepsilon_n\}$ *gibt, so dass:*

für jedes n für welche $a_n > a_{n-1}$ *auch* $b_n > a_n - \varepsilon_n$,

» » » » » $a_n = a_{n-1}$ » $a_n - \varepsilon_n \leqslant b_n \leqslant a_n + \varepsilon_n$,

» » » » » $a_n < a_{n-1}$ » $b_n < a_n + \varepsilon_n$

ist, so gilt

$$\underline{\lim}\, b_n \leqslant \overline{\lim}\, a_n \leqslant \overline{\lim}\, b_n \,.$$

Einige Anwendungen des Satzes 1 gebe ich in einer Note die in « Publ. Inst. Math. Beograd » erscheinen wird (V. VUČKOVIĆ [2]).

Literatur.

[1] L. TANZI CATTABIANCHI, *Sui teoremi di Mercer e Vijayaraghavan precisati per le successioni oscillanti.* Riv. Mat. Univ. Parma **4** (1953), 337-361.

[2] V. VUČKOVIĆ, *Mercersche Sätze für nichtlineäre Mittel.* Publ. Inst. Math. Beograd **20** (1956), 79-84.