Riv. Mat. Univ. Parma 7 (1956), 89-123

GIUSEPPE PALAMÀ (*)

Sull' equazione indeterminata $x_1^2 + ... + x_n^2 + y^2 = (n+1) x_1 ... x_n$ e su altre analoghe. (**)

W. SIERPINSKI ed A. SCHINZEL recentemente in un lavoro (¹) dedicato al nostro Prof. MAURO PICONE, in occasione del suo 70° compleanno, hanno osservato che l'equazione

$$x^2 + y^2 + 1 = xyz$$

non è possibile in interi se $z \neq 3$, ed inoltre, indicato il mezzo di trovare tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy, \tag{1}$$

hanno aggiunto varie osservazioni veramente interessanti.

Già di tale equazione, anzi delle più generali

$$ax^2 \pm bxy + cy^2 = \pm k, \tag{2}$$

in cui a, b, c, k sono interi e positivi ed i primi tre tali che sia

$$b^2 - 4ac = 5, \tag{3}$$

(*) Indirizzo: Via Sepolcri Messapici 22, Lecce, Italia.

(**) Ricevuto il 15-II-1956.

(¹) A. SCHINZEL et W. SIERPINSKI, *Sur l'équation* $x^2 + y^2 + 1 = xyz$, Matematiche, Catania **10** (1955), 30-36.

come è appunto nella (1), si è occupato C. RUGGERI [2], servendosi della teoria delle forme quadratiche.

Le soluzioni intere delle (2), per le quali vale la (3), sono termini di serie numeriche del tipo

$$\ldots,\ z_{-n},\ \ldots,\ z_{-1},\ z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n = z_{n-1} + z_{n-2},\ \ldots\ .$$

Ora noi qui, seguendo una via diversa del RUGGIERI e dei citati Autori, vogliamo innanzi tutto, non solo ritrovare tutte le soluzioni intere e positive della (1), ma anche determinare tutte le soluzioni razionali.

Le soluzioni intere e positive della (1) sono date dalle copie di termini consecutivi di serie numeriche, con particolari valori iniziali, i cui termini soddisfano ad una relazione ricorrente del tipo

$$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}\ . \tag{4}$$

Tali serie che, con due o più termini consecutivi, dànno soluzioni intere o razionali relative di equazioni analoghe alla (1), con due o più incognite, le diciamo *serie risolventi della corrispondente equazione*, e diciamo *modulo* della serie il coefficiente del primo termine del secondo membro della analoga della (4), che dà la relazione ricorrente cui soddisfano i termini della serie stessa.

Ora qui diamo le equazioni le cui serie risolventi hanno per termini iniziali due numeri interi positivi qualsiasi ed i cui termini soddisfano ad una relazione ricorrente del tipo

$$a_{n+1} = ma_n - a_{n-1},$$

ove è m un intero arbitrario.

Inoltre diamo le equazioni ad r indeterminate le cui serie risolventi hanno il modulo ed i primi r termini interi arbitrari e sono definite dalla formula ricorrente

$$a_{n+r+1} = m\ a_{n+r}\ a_{n+r-1} \ldots\ a_{n+2} - a_{n+1},$$

e siamo così portati allo studio di varie equazioni indeterminate assai generali quale ad esempio la seguente

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 + y^2 = (n+1)x_1 \ldots x_n \qquad (n \text{ arbitrario}). \tag{5}$$

---

[2] C. RUGGERI, *Su talune successioni di numeri interi e sul loro uso nell'analisi indeterminata di secondo grado*, Period. Mat. (3) 7 (1910), 266-276.

Si generalizzano poi alcune altre questioni o proposizioni trattate da SIERPINSKI e SCHINZEL e si aggiungono inoltre varie osservazioni fra cui ad esempio alcune relative alle equazioni le cui soluzioni si ottengono a mezzo dei termini della serie di FIBONACCI, ed altre ai termini di questa serie.

Per lo più in questo lavoro cerchiamo soltanto soluzioni intere e positive (e quando si dirà *soluzioni* intendiamo riferirci a questo tipo di soluzioni); ma talvolta si considerano anche soluzioni intere o razionali relative.

Il modulo poi si ritiene anch'esso, quasi sempre, intero e postitivo; ma quanto si dirà in seguito sussiste anche se il modulo, anzicchè intero positivo, è un numero razionale relativo qualsiasi.

I termini delle numerose serie numeriche in cui ci si imbatterà li indicheremo sempre con a_i e indicheremo costantemente con Δ il discriminante di ogni equazione di secondo grado che dovremo considerare.

1. – Risolvendo rispetto ad x la (1) si ha

$$x = (3y \pm \sqrt{5y^2 - 4})/2. \tag{1_1}$$

Perchè x sia intero deve aversi, per t intero,

$$5y^2 - 4 = t^2. \tag{2_1}$$

Ora LUCAS [3], forse per il primo, notò che le due espressioni

$$5u_n^2 \pm 4,$$

ove u_n è un termine qualsiasi della serie di FIBONACCI, sono rispettivamente, per n pari ed n dispari, il quadrato di $u_{n-1} + u_{n+1}$; mentre J. WASTEELS [4] osservò viceversa che se $5x^2 \pm 4$ è un quadrato, x è un termine della serie di FIBONACCI.

Pertanto tutte e sole le soluzioni di (2_1) si hanno attribuendo ad y ogni termine di posto dispari della serie di FIBONACCI seguente

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \dots, \qquad u_{n+1} = u_n + u_{n-1},\ \dots,$$

se indichiamo con u_1, u_2, ... i termini di tale serie.

---

[3] E. LUCAS, Nuov. Corresp. Math. **2** (1876), 201-206.

[4] J. WASTEELS, *Quelques propriétés des nombres de Fibonacci*, Mathesis (3) **2** (1902), 60-63.

Tutte le soluzioni razionali della (2_1) si possono però ottenere agevolmente anche nel seguente modo.

La (2_1) può scriversi

$$(t+y)(t-y)=4(y+1)(y-1)$$

la cui soluzione completa si ha ponendo

$$t-y=2\alpha\beta, \quad t+y=2\gamma\delta, \quad y+1=\alpha\gamma, \quad y-1=\beta\delta,$$

cioè assumendo

$$(3_1) \qquad t=\alpha\beta+\gamma\delta, \quad y=\gamma\delta-\alpha\beta,$$

purchè i parametri α, β, γ, δ siano tali da soddisfare alle

$$(4_1) \qquad \gamma\delta-\alpha\beta+1=\alpha\gamma, \quad \gamma\delta-\alpha\beta-1=\beta\delta,$$

che, eliminando γ, dànno

$$(5_1) \qquad (\delta^2-\alpha^2-\alpha\delta)\beta=\alpha-2\delta\,.$$

Pertanto, tenendo presenti la seconda delle (4_1), la (5_1) e le (3_1), si ha

$$\beta=(2\delta-\alpha)/M, \quad \gamma=(2\alpha+\delta)/M,$$

$$y=(\alpha^2+\delta^2)/M, \quad t=(-\alpha^2+4\alpha\delta+\delta^2)/M,$$

ove

$$(6_1) \qquad M=\alpha^2+\alpha\delta-\delta^2,$$

e quindi la (1) ammette le seguenti soluzioni razionali parametriche

$$(7_1) \quad \begin{cases} x_1=(\alpha^2+2\alpha\delta+2\delta^2)/M \\ y_1=(\alpha^2+\delta^2)/M, \end{cases} \qquad (8_1) \quad \begin{cases} x_2=(2\alpha^2-2\alpha\delta+\delta^2)/M \\ y_2=y_1=(\alpha^2+\delta^2)/M, \end{cases}$$

in cui M è dato dalla (6_1) ed α e δ sono due parametri del tutto arbitrari.

Le (7_1), (8_1) dànno tutte le soluzioni razionali della (1), perchè esse si ottengono da tutte le soluzioni intere dell'equazione

$$(9_1) \qquad x^2 + y^2 + v^2 = 3xy,$$

e perchè, trovate tali soluzioni con il metodo svolto innanzi, si traggono appunto da esse le medesime soluzioni razionali (7_1) e (8_1) della (1).

Si noti che tra i valori di x_2, y_1, x_1, intercede la relazione

$$x_1 = 3y_1 - x_2,$$

e che, dai tre valori di x_2, y_1, x_1, si passa alla terna successiva delle serie i cui termini soddisfano alla (4), cambiando α e δ dei valori di x_2, y_1, x_1 rispettivamente in

$$\alpha + 2\delta, \qquad 2\alpha + 3\delta,$$

con i quali cambiamenti il valore assoluto di M non cambia.

Naturalmente tutte le soluzioni intere della (9_1) sono date, a meno di un fattore di proporzionalità, da

$$(10_1) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha^2 + 2\alpha\delta + 2\delta^2, & y_1 = \alpha^2 + \delta^2, \qquad V_1 = \alpha^2 + \alpha\delta - \delta^2, \\ x_2 = 2\alpha^2 - 2\alpha\delta + \delta^2, & y_2 = y_1, \qquad V_1 = V_2, \end{cases}$$

quando ai parametri α e δ si attribuiscono valori interi arbitrari.

Per giungere ai risultati di SIERPINSKI e SCHINZEL basta attribuire ad α e δ tutti i valori interi che rendono $M = 1$.

2. – Tutte le soluzioni intere della

$$(1_2) \qquad \alpha^2 + \alpha\delta - \delta^2 = 1,$$

che risolta rispetto ad α dà

$$\alpha = (-\delta \pm \sqrt{5\delta^2 + 4})/2,$$

si hanno da tutti i valori interi di δ ed u che soddisfano alla

$$(2_2) \qquad 5\delta^2 + 4 = u^2.$$

Ora tale equazione potrebbe risolversi, se non si volessero utilizzare le osservazioni di LUCAS e WASTEELS, cui si è accennato più in alto, sia con notissimi procedimenti classici, che con altri semplici opportuni accorgimenti. Noi però preferiamo, per poter poi ricavare rapidamente dalle nostre formule i risultati di SIERPINSKI e SCHINZEL, utilizzare le dette osservazioni di LUCAS e WASTEELS.

Pertanto tutte le soluzioni della (2_2) sono date da

$$\delta = u_{2n}, \qquad u = u_{2n-1} + u_{2n+1},$$

ove gli u_i sono termini della serie di FIBONACCI e si ha quindi

$$\alpha = [-u_{2n} \pm (u_{2n-1} + u_{2n+1})]/2,$$

da cui si trae

$$\alpha_1 = u_{2n-1}, \qquad \alpha_2 = -u_{2n+1};$$

e quindi tutte le soluzioni intere della (1_2) sono

$$(3_2) \quad \begin{cases} \alpha_1 = u_{2n-1} \\ \delta_1 = u_{2n}, \end{cases} \qquad\qquad (4_2) \quad \begin{cases} \alpha_2 = -u_{2n+1} \\ \delta_2 = \delta_1 = u_{2n} \end{cases}$$

con cui si ottengono, quando si tien presente la seguente formula di LUCAS [5]

$$(5_2) \qquad u_n^2 + u_{n+1}^2 = u_{2n+1},$$

tutte le soluzioni intere e positive della (1) che seguono

$$\begin{cases} x_1 = u_{4n+1} \\ y_1 = u_{4n-1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = u_{4n-3} \\ y_2 = u_{4n-1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1' = u_{4n-1} \\ y_1' = u_{4n+1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' = u_{4n+3} \\ y_2' = u_{4n+1}. \end{cases}$$

Così, le coppie di termini consecutivi di posto dispari (se si prescinde dalla prima coppia 1, 1) della serie di FIBONACCI dànno tutte le soluzioni intere

---

[5] La (5_2) del testo fu da E. LUCAS riportata in « Nouv. Corr. Math. » **2** (1876), 74-75, e dimostrata poi dallo stesso Autore: cfr. « Mathesis » **7** (1887), p. 207, e **9** (1889) 234-235.

e positive della (1), si ritrova cioè che tutte le dette soluzioni della (1) sono date da tutte le coppie di numeri consecutivi della serie

$$(6_2) \qquad 1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 34,\ 89,\ 233,\ 610,\ 1597,\ \ldots$$

i cui termini soddisfano alla (4).

La (6_2) è costituita, come si è già notato, da tutti i termini della serie di FIBONACCI che occupano posto dispari.

3. – Ma i termini di tale serie che occupano invece posto pari di quali equazioni sono soluzioni?

Tutte le soluzioni intere dell'equazione indeterminata

$$(1_3) \qquad x^2 + y^2 - v^2 = 3xy,$$

che si possono ottenere subito con lo stesso procedimento precedente, sono date, a meno di un fattore di proporzionalità, da

$$(2_3) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha\,(3\alpha - 2\delta) \\ y_1 = \alpha^2 - \delta^2 \\ V_1 = \alpha^2 - 3\alpha\delta + \delta^2, \end{cases} \qquad\qquad (3_3) \quad \begin{cases} x_2 = \delta\,(2\alpha - 3\delta) \\ y_2 = y_1 \\ V_1 = V_2\,. \end{cases}$$

Inoltre le due coppie di termini consecutivi delle seguenti espressioni

$$(4_3) \qquad (2\alpha - 3\delta)\delta/P, \qquad (\alpha^2 - \delta^2)/P, \qquad (3\alpha - 2\delta)\alpha/P,$$

essendo

$$P = \alpha^2 - 3\alpha\delta + \delta^2,$$

dànno tutte le soluzioni razionali della

$$(5_3) \qquad x^2 + y^2 - 1 = 3xy.$$

Le (4_3) per esempio nell'ordine scritto, per α e δ arbitrari, soddisfano alla (4). Si passa poi dalla terna (4_3) alla successiva terna della serie risolvente corrispondente, i cui termini soddisfano alla stessa (4), e che ha per termini iniziali le prime due espressioni (4_3), mutandovi α e δ rispettivamente in

$$5\alpha - 2\delta, \qquad 2\alpha - \delta\,.$$

Con tali cambiamenti P non muta in valore assoluto e, reiterando il procedimento, cioè effettuando gli stessi cambiamenti dei parametri α e δ nella seconda terna, da essa si passa alla terza e così via.

Tutte le soluzioni intere della (5_3) si hanno da tutti i valori interi di α e δ che soddisfano alla

$$\alpha^2 - 3\alpha\delta + \delta^2 = 1,$$

che dà

$$\alpha = (3\delta \pm \sqrt{5\delta^2 + 4})/2 .$$

Ora, con il procedimento seguito nel caso analogo precedente, si trova che tutte le soluzioni intere e positive della (5_3) sono date da

$$(6_3) \qquad \begin{cases} x_1 = u_{2n+2}\ v_{2n+2} \\ y_1 = u_{2n+1}\ v_{2n+1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = u_{2n}\ v_{2n} \\ y_2 = y_1, \end{cases}$$

in cui

$$v_n = u_{n-1} + u_{n+1} .$$

Ma è notissima la semplice seguente relazione [6]

$$u_n\, v_n = u_{2n} ,$$

quindi tutte le soluzioni della (5_3) sono date, con semplici ovvi mutamenti degli indici, da

$$\begin{cases} x_1 = u_{2h+2} \\ y_1 = u_{2h}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = u_{2h-2} \\ y_2 = y_1, \end{cases}$$

cioè da tutte le coppie di termini consecutivi, occupanti posto pari nella serie di FIBONACCI, ossia dalle coppie di numeri consecutivi della serie

$$1,\quad 3,\quad 8,\quad 21,\quad 55,\quad 144,\quad 377,\quad \ldots .$$

---

[6] E. LUCAS, *Théorie des Nombres*, Gauthier-Villars, Paris 1891; cfr. p. 317.

4. – Facciamo qualche applicazione dei risultati ottenuti relativi alle due equazioni (1) e (5_3).

Si ha, con i detti risultati, identicamente

$$(1_4) \qquad u_{2h-1}^2 + u_{2h}^2 + 1 = 3u_{2h-1}\, u_{2h+1},$$

$$(2_4) \qquad u_{2h}^2 + u_{2h+2}^2 - 1 = 3u_{2h}\, u_{2h+2},$$

$$(3_4) \qquad u_{2h-2}^2 + u_{2h}^2 - 1 = 3u_{2h-2}\, u_{2h}\,.$$

Sommando membro a membro prima (1_4) e (2_4) e poi (1_4) e (3_4), si hanno due relazioni che dànno luogo poi ad una del tipo

$$(4_4) \qquad u_n^2 + u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + u_{n+3}^2 = 3(u_n\, u_{n+2} + u_{n+1}\, u_{n+3})\,.$$

Ma per la nota formula

$$u_n\, u_{p-1} + u_{n+1}\, u_p = u_{n+p},$$

forse dovuta a CESÀRO [7], che appunto se ne servì per dimostrare una certa relazione relativa agli u_i, affermata da GELIN [8], si ha

$$u_n\, u_{n+2} + u_{n+1}\, u_{n+3} = u_{2n+3};$$

pertanto dalla (4_4) si ha l'elegante formuletta

$$(5_4) \qquad \boxed{u_n^2 + u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + u_{n+3}^2 = 3u_{2n+3}}$$

la quale dice che *la somma dei quadrati, di quattro termini consecutivi della serie di Fibonacci, è il triplo del termine della stessa serie che ha un indice uguale alla somma degli indici dei due termini centrali dei quattro considerati.*

La (5_4) molto probabilmente è già stata notata [9], perchè essa può dedursi agevolmente dalla (5_2). Se difatti sommiamo la (5_2) con la formula che si trae

---

(7) E. CESÀRO, Nouv. Corresp. Math. **6** (1880), 423-424.

(8) GELIN, Idem, p. 384.

(9) Non è facile stabilire se la formula in oggetto sia, come crediamo, già stata notata o no, perchè è molto estesa la letteratura relativa all'argomento: Cfr. L. E. DICKSON, *History of the theory of numbers*, New York 1934, vol. I, Cap. 17.

dalla stessa (5_2) cambiandovi n in $n+2$, si ha

$$u_n^2 + u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + u_{n+3}^2 = u_{2n+1} + u_{2n+5}$$

che si riduce subito alla (5_4).

Inoltre sottraendo dalla (5_4) la (5_2) dopo aver cambiato in quest'ultima n in $n+1$ si ha

$$\boxed{u_n^2 + u_{n+3}^2 = 2u_{2n+3}}, \tag{6_4}$$

cioè *la somma dei quadrati di due termini della serie di* F i b o n a c c i, *i cui indici differiscono di 3, è uguale al doppio del termine della stessa serie il cui indice è uguale alla somma degli indici dei due termini considerati.*

Sottraendo invece membro a membro dalla (6_4) la (5_2) si trae subito

$$\boxed{u_{n+3}^2 - u_{n+1}^2 = u_{2n+4}},$$

che, come quelle che seguono, si interpreta immediatamente.

Infine si dimostrano subito a mezzo delle formule precedenti le seguenti altre:

$$\boxed{u_{n+4}^2 - u_n^2 = 3u_{2n+4}},$$

$$\boxed{u_{n+4}^2 - u_{n+3}^2 + u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2u_{2n+4}},$$

$$\boxed{u_{n+6}^2 - u_{n+5}^2 + u_{n+4}^2 - u_{n+2}^2 + u_{n+1}^2 - u_n^2 = 6u_{2n+6}},$$

$$\boxed{u_{n+6}^2 + u_{n+4}^2 - (u_{n+2}^2 + u_n^2) = 9u_{2n+6}}.$$

5. – Ma i termini della serie di FIBONACCI dànno tutte le soluzioni intere soltanto delle due equazioni (1) e (5_3) precedentemente considerate? Sono numerose, crediamo, le equazioni che sono risolte completamente utilizzando i termini della serie di FIBONACCI. Eccone alcuni esempi.

a) $$x^2 - y^2 + 1 = xy.$$

Si trova con il procedimento seguito innanzi che essa è risolta completamente dalle formule

$$x_1 = u_{2h}, \quad y_1 = u_{2h-1}; \qquad x_2 = -u_{2h-2}, \quad y_2 = u_{2h-1}.$$

Si hanno pertanto le identità

$$u_{2h}^2 - u_{2h-1}^2 + 1 \quad = u_{2h}\, u_{h-1},$$

$$u_{2h-1}^2 - u_{2h-2}^2 - 1 = u_{2h-2}\, u_{2h-1},$$

che dànno luogo alla formula trovata dal D'OCAGNE [10]

$$(1_5) \qquad u_p^2 - u_{p-1}^2 + (-1)^p = u_{p-1}\, u_p.$$

b) $$x^2 - y^2 + my + m^2 + 1 = x(y + 2m),$$

con m intero qualsiasi. Immediatamente si ricava che tutte le sue soluzioni intere sono date da

$$x_1 = u_{2h} + m, \quad y_1 = u_{2h-1}; \qquad x_2 = -u_{2h-2} + m, \quad y_2 = y_1,$$

a mezzo delle quali si ottiene di nuovo la (1_5).

c) L'analoga alla precedente.

$$x^2 - y^2 + my + m^2 - 1 = x\,(y + 2m),$$

che è risolta completamente, qualunque sia m, dalle formule

$$x_1 = u_{2h+1} + m, \quad y_1 = u_{2h}; \qquad x_2 = m - u_{2h-1}, \quad y_2 = y_1.$$

d) $$x^2 + (k^2 + k - 1)y^2 + 1 = (2k + 1)xy,$$

ove k è un intero qualsiasi, della quale tutte le soluzioni sono date da

$$x_1 = ku_{2h-1} + u_{2h}, \quad y_1 = u_{2h-1}; \qquad x_2 = ku_{2h-1} - u_{2h-2}, \quad y_2 = y_1.$$

---

(10) M. D' OCAGNE, *Sur une suite récurrente*, Bull. Soc. Math. France **14** (1885-1886), 20-41.

6. – Le serie i cui termini soddisfano a (4) godono una curiosa proprietà: *le differenze seconde dei suoi termini riproducono, a partire dal suo secondo termine, la stessa serie*

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}, \quad \ldots,$$

come si verifica immediatamente.

Più in generale la serie numerica

$$a_0, \ a_1, \ \ldots,$$

si riproduce nelle sue erresime differenze, a partire dal suo termine a_{r-1}, quando i suoi termini si ottengono a mezzo della seguente relazione ricorrente:

$$a_{n+1} = (r+1)a_n - \binom{r}{2} a_{n-1} + \binom{r}{3} a_{n-2} - \ldots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r} a_{n-r+1} \qquad (n = r-1, \ r, \ \ldots)$$

dove a_0, a_1, ..., a_{r-1} sono r numeri qualsiasi.

7. – Si sono visti innanzi esempi di equazioni indeterminate i termini delle cui serie risolventi, con opportuni valori iniziali, soddisfano a (4). Ora ci occupiamo delle equazioni indeterminate, i termini delle cui serie risolventi soddisfano alla formula ricorrente più generale

$$(1_7) \qquad a_{n+1} = ma_n - a_{n-1},$$

per m intero qualsiasi maggiore di 2.

Se $a_1 = a_2 = 1$, si ha che all'equazione indeterminata

$$(2_7) \qquad x^2 + y^2 + m - 2 = mxy \qquad (m > 2)$$

soddisfano appunto le coppie di numeri consecutivi della serie

$$(3_7) \qquad a_1 = a_2 = 1, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_{n+1}, \quad \ldots$$

in cui a_{n+1} è dato dalla (1_7).

Ora i primi termini della (3_7) sono

$$(4_7) \qquad 1, \quad 1, \quad m-1, \quad m^2 - m - 1, \quad \ldots$$

e si verifica subito che le prime coppie di termini consecutivi della (4_7) soddisfano alla (2_7); supposto che a_{n-1}, a_n vi soddisfano pure, si deduce immediatamente che ne è soluzione anche la coppia successiva a_n, a_{n+1}.

Ad esempio se $m = 4$, serie risolvente della

$$x^2 + y^2 + 2 = 4xy$$

è la serie

$$1, \quad 1, \quad 3, \quad 11, \quad 41, \quad 153, \quad 571, \quad 2131, \quad 7953, \quad ...$$

i cui termini soddisfano appunto alla

$$a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}.$$

Se risolviamo la

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 + m - 2 = ma_n\, a_{n+1},$$

che per le cose dette segue dalla (2_7), qualora si indicano con a_i i termini della corrispondente serie che soddisfano alla (1_7), rispetto ad a_{n+1}, abbiamo

$$a_{n+1} = [ma_n \pm \sqrt{(m^2-4)a_n^2 - 4(m-2)}]/2,$$

che, essendo a_{n+1} intero, importa che sia un quadrato il discriminante, cioè che ogni a_n dia una soluzione in interi della

$$(5_7) \qquad (m^2 - 4)a_n^2 - 4(m-2) = t^2,$$

per qualunque intero $m > 2$.

La (5_7), ponendo $t = (m-2)u$, diventa

$$(6_7) \qquad (m-2)u^2 - (m+2)a_n^2 = -4.$$

Quindi con i termini della (3_7) si traggono soluzioni intere della (6_7).

Ad esempio la (6_7) per $m = 3, 4, 5$ diventa rispettivamente

$$u^2 - 5a_n^2 = -4, \qquad u^2 - 3a_n^2 = -2, \qquad 3u^2 - 7a_n^2 = -4,$$

di ciascuna delle quali dà soluzione intera ogni termine della (3_7) rispettivamente per $m = 3, 4, 5$.

8. – Invece l'equazione

$$(1_8) \qquad x^2+y^2+m-2=pxy$$

è impossibile in interi se $p>m>2$.

Innanzi tutto non è possibile che sia $y=x$, perchè in tale ipotesi la (1_8) avrebbe la forma

$$2x^2+m-2=px^2,$$

cioè

$$2x^2+m-2=2x^2+(p-2)x^2$$

ch'è impossibile in interi.

Pertanto, se x, y fosse una soluzione della (1_8), potremmo ritenere $x<y$. Risolvendo la (1_8) rispetto ad y abbiamo

$$(2_8) \qquad y=(px\pm\sqrt{\Delta})/2,$$

ove

$$\Delta=(p^2-4)x^2-4(m-2);$$

pertanto le y sono reali per x intero >0 e $p>m>2$. Detti y' e y'' i due valori (2_8) di y, si ha, se x è positivo, $y'>x$ ed $y''<x$, come subito si verifica; perciò (x, y') sarebbe la soluzione (x, y) di partenza ed (y'', x), con $y''<x$, sarebbe una nuova soluzione.

Inoltre è

$$(3_8) \qquad y''=px-y',$$

e risulta $y''>0$, qualunque sia $p>m>2$, se $x>0$.

Pertanto, da una soluzione iniziale (x, y) si passerebbe ad una seconda (y'', x), che diciamo (x_1, x), ponendo $y''=x_1$, con $x_1<x$; poi analogamente si passerebbe da (x_1, x) ad una terza (x_2, x_1), con $x_2<x_1$; e così via senza alcun limite e ciò ovviamente non è possibile se le x_i sono positive, perchè una serie di numeri interi positivi non può decrescere illimitatamente, avendo visto che non vi può essere una soluzione (x_i, x_{i-1}) con $x_i=x_{i-1}$. Se invece una tale soluzione esistesse, continuando ad applicare la (3_8), si ripercorrerebbe in senso inverso la stessa serie dei valori delle x_i.

Si noti poi che se $p = m$, la (1_8), come si è visto precedentemente, è possibile ed il procedimento usato ne dà tutte le soluzioni intere e positive, come è facile convincersi se si tien presente che si ha ora la soluzione $(1, 1)$ con valori uguali delle incognite.

9. – Se $m > 2$ si riconosce subito che la (1_8) è impossibile in numeri reali nei due casi $p = 1$, $p = 2$. Pertanto, dalla proposizione dimostrata al n. **8** segue, per $m = 3$, l'osservazione con cui si inizia il lavoro più volte citato di Sierpinski e Schinzel, cioè che la equazione

$$x^2 + y^2 + 1 = zxy$$

è impossibile in interi positivi se $z \neq 3$.

Se invece è $2 < p < m$ non si può dire in generale nulla sulla possibilità o meno della (1_8), ma si può stabilire subito se l'equazione

$$(1_9) \qquad x^2 + y^2 + m - 2 = pxy \qquad (2 < p < m),$$

fissati m e p, tali che si abbia appunto $2 < p < m$, è possibile o no, e, nel primo caso, trovarne tutte le soluzioni intere e positive.

Infatti innanzi tutto la (1_9) ha soluzioni con $y = x$ se è possibile in interi la

$$(p - 2)x^2 = m - 2.$$

Ora, se $m - 2$ non contiene fattori quadrati, quest'ultima è impossibile; se invece li contiene e se a^2b è una qualunque delle possibili decomposizioni di $m - 2$ nel prodotto di due fattori dei quali l'uno è un quadrato e l'altro b no (ma eventualmente uguale ad 1), i valori di p per cui si ha $p - 2 = b$, dànno soluzione della (1_9) con $y = x$. Se indichiamo con c tali valori uguali, una serie risolvente della (1_9) è

$$c, \quad c, \quad pc - c, \quad \ldots, \quad pa_n - a_{n-1}, \quad \ldots .$$

Una volta considerate le radici con valori uguali delle incognite (quando ci sono), si può ritenere che in un'altra eventuale soluzione (x, y) è $x < y$.

Risolta quindi la (1_9), cioè la

$$(1_9') \qquad y^2 - pxy + x^2 + m - 2 = 0 \qquad (2 < p < m),$$

si ha

$$y = (px \pm \sqrt{\Delta})/2, \qquad \Delta = (p^2 - 4)x^2 - 4\,(m-2),$$

e le radici y' e y'' della $(1'_9)$ sono reali e positive per x positivo e tale che sia

$$(2_9) \qquad (p^2-4)x^2 \geqslant 4\,(m-2)\,.$$

Notato che è

$$(3_9) \qquad y'' = px - y',$$

e che (x, y'), (x, y'') sono due soluzioni intere della (1_9), nell'ipotesi che (x, y) ne sia una, delle quali la prima (x, y') coincide con la iniziale (x, y), nell'altra (y'', x) è $y'' < x$, cioè

$$(px - \sqrt{\Delta})/2 < x,$$

se è

$$(4_9) \qquad (p^2-4)x^2 > (p+2)\,(m-2).$$

Pertanto, fissato p (con $2 < p < m$), per un valore di x per cui sussiste la (4_9) sussiste anche la (2_9), e si passa perciò, con la (3_9), da una soluzione $(x, y) = (x, y')$, con $x < y = y'$, ad un'altra (y'', x) con $y'' < x$ e così via sino a quando si verifica l'altra eventualità (se si verifica) per la quale con un certo valore intero x_1 di x, mentre la (2_9) è verificata, non lo è invece la (4_9). Ora se x_2 è il valore intero di x immediatamente superiore ad x_1 per cui la (4_9) sussiste, vuol dire che, per

$$(5_9) \qquad x = x_1, \quad x_1+1, \quad \ldots, \quad x_2 - 1,$$

si hanno per il p prefissato radici reali della (1_9), senza però che sussista la (4_9); ed allora da ogni valore (5_9) di x con cui si hanno due soluzioni intere e positive (x, y'), (x, y''), si ha sia $y' > x$ che $y'' > x$. Calcolandosi perciò le successive soluzioni, a mezzo della (3_9), si hanno due serie risolventi con termini crescenti oppure una, a seconda che è rispettivamente $y'' \neq y'$, $y'' = y'$.

Se invece la (1_9) non ha soluzioni intere e positive con $x = y$, e se per nessuno dei valori (5_9) di x si hanno soluzioni della (1_9), oppure se per tutti gli x, interi e positivi, per cui vale la (2_9) vale anche la (4_9), allora ovviamente la (1_9) è impossibile in interi.

Si abbia ad esempio l'equazione

$$(6_9) \qquad x^2 + y^2 + 11^2 = 3xy,$$

si ha subito la soluzione $x = y = 11$ e quindi la serie risolvente

$$(7_9) \qquad 11, \quad 11, \quad 2\cdot 11, \quad 5\cdot 11, \quad 13\cdot 11, \quad ..., \quad 3a_n - a_{n-1}, \quad ... .$$

Inoltre risolta la (6_9) rispetto ad y si trae

$$y', y'' = (3x \pm \sqrt{\Delta})/2, \qquad \Delta = 5x^2 - 4\cdot 11^2,$$

e si hanno radici reali e positive se è $x > 9$ ed invece $y'' < x$ per $x > 11$, quindi per $x = 10$, y', y'' sono reali e positive ed è $y'' > x$; ma, per $x = 10$, si hanno le due soluzioni della (6_9)

$$(10, \quad 17), \qquad (10, \quad 13),$$

(invece con $x = 11$ si ritrova naturalmente la soluzione $x = y = 11$); quindi le serie corrispondenti a quest'ultime

$$10, \quad 17, \quad 41, \quad ..., \quad 3a_n - a_{n-1}, \quad ...,$$

$$10, \quad 13, \quad 29, \quad ..., \quad 3a_n - a_{n-1}, \quad ...,$$

e la (7_9) dànno tutte le soluzioni intere e positive della (6_9) che possono anche dedursi per $\alpha = 3$, $\delta = 1$ dalle (10_1) e, rispettivamente, disponendo opportunamente del fattore di proporzionalità cui si è accennato nel n. **1**, a proposito delle (10_1).

Il procedimento indicato si è applicato a varie altre equazioni indeterminate del tipo della (1_9) e ne riassumiamo qui appresso i risultati trovati (senza riferire i risultati già noti del caso $p = m$, in cui la (1_9) è sempre possibile), dando, per ogni valore di m considerato, tutte le equazioni possibili (escluse quelle, come si è detto, in cui è $p = m$) e le corrispondenti serie risolventi che le risolvono completamente in interi e positivi

a) $m = 6$, $\quad x^2 + y^2 + 4 = 3xy$, $\qquad 2, \ 2, \ 4, \ ..., \ 3a_n - a_{n-1}, \ ...;$

b) $m = 8$, $\quad$ tutte impossibili;

c) $m = 10$,	$x^2 + y^2 + 8 = 4xy$,	$2, 2, 6, 22, \ldots,$	$4a_n - a_{n-1}, \ldots;$
	$x^2 + y^2 + 8 = 6xy$,	$1, 3, 17, 99, \ldots,$	$6a_n - a_{n-1}, \ldots;$
d) $m = 12$,	tutte impossibili;		
e) $m = 14$,	$x^2 + y^2 + 12 = 4xy$,	$2, 4, 14, \ldots,$	$4a_n - a_{n-1}, \ldots;$
	$x^2 + y^2 + 12 = 5xy$,	$2, 2, 8, \ldots,$	$5a_n - a_{n-1}, \ldots;$
f) $m = 16$,	$x^2 + y^2 + 14 = 8xy$,	$1, 3, 23, \ldots,$	$8a_n - a_{n-1}, \ldots;$
		$1, 5, 39, \ldots,$	$8a_n - a_{n-1}, \ldots;$
g) $m = 18$,	$x^2 + y^2 + 16 = 3xy$,	$4, 4, 8, \ldots,$	$3a_n - a_{n-1}, \ldots;$
	$x^2 + y^2 + 16 = 6xy$,	$2, 2, 10, \ldots,$	$6a_n - a_{n-1}, \ldots;$
h) $m = 20$,	$x^2 + y^2 + 18 = 4xy$,	$3, 3, 9, \ldots,$	$4a_n - a_{n-1}, \ldots;$
i) $m = 22$,	$x^2 + y^2 + 20 = 3xy$,	$4, 6, 14, \ldots,$	$3a_n - a_{n-1}, \ldots;$
	$x^2 + y^2 + 20 = 5xy$,	$2, 4, 18, \ldots,$	$5a_n - a_{n-1}, \ldots;$
		$2, 6, 28, \ldots,$	$5a_n - a_{n-1}, \ldots;$
	$x^2 + y^2 + 20 = 7xy$,	$2, 2, 12, \ldots,$	$7a_n - a_{n-1}, \ldots;$
	$x^2 + y^2 + 20 = 10xy$,	$1, 3, 29, \ldots,$	$10a_n - a_{n-1}, \ldots;$
		$1, 7, 69, \ldots,$	$10a_n - a_{n-1}; \ldots.$

10. – Si possono però scrivere agevolmente equazioni indeterminate del tipo

$$x^2 + y^2 + R = pxy, \tag{1_{10}}$$

con R opportuno, $\gtrless 0$, p intero arbitrario e tali che i termini a_i della serie risolvente soddisfino alla formula ricorrente

$$a_{n+1} = pa_n - a_{n-1}, \tag{2_{10}}$$

essendo però i primi due termini a_1, a_2 della serie del tutto arbitrari.

Basta infatti attribuire nella (1_{10}) ad x, y e p valori interi qualsiasi e ricavare poi il valore di R con cui la (1_{10}) è identicamente soddisfatta. Ponendo cioè

$$x = P_1, \qquad y = P_2,$$

e ritenuto P_1, P_2, p interi arbitrari, basta determinare R in modo che si abbia identicamente

$$(3_{10}) \qquad P_1^2 + P_2^2 + R = pP_1 P_2;$$

allora alla (1_{10}), quando ad R si attribuisce il valore che si ricava dalla (3_{10}), soddisfano tutte le coppie di termini consecutivi della serie

$$(4_{10}) \qquad \dots, \quad pP_1 - P_2, \quad P_1, \quad P_2, \quad pP_2 - P_1, \quad \dots,$$

i termini della quale a destra di P_2 ed a sinistra di P_1 si ottengono rispettivamente con la (2_{10}) e con la

$$a_{n-1} = pa_n - a_{n+1},$$

che è poi la stessa (2_{10}).

La dimostrazione si ha subito per induzione.

Ad esempio se si fa

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 5, \quad p = 7,$$

risulta

$$R = 9,$$

e si ha che

$$x^2 + y^2 + 9 = 7xy$$

ammette come serie risolvente la seguente

$$\dots, \quad a_{n-1} = 7a_n - a_{n+1}, \quad \dots, \quad 89, \quad 13, \quad 2, \quad 1, \quad 5, \quad 34, \quad 233, \quad \dots,$$

$$a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1}, \quad \dots .$$

Esistono infinite equazioni, che con un prefissato p e con R tale da aversi $p < R + 2$ (come avviene nell'esempio trattato al n. **9**), ciascuna delle quali ammette infinite soluzioni.

Se ad esempio è $p = 7$, alcune di tali equazioni si hanno ad esempio per

$$R = 9, \quad 11, \quad 20, \quad 29, \quad 36, \quad 41, \quad 44, \quad 45, \quad 59, \quad 71, \quad \ldots$$

che ammettono come soluzione iniziale rispettivamente

$$(x, y) = (1, 2), \quad (1, 3), \quad (2, 2), \quad (2, 3), \quad (2, 4), \quad (2, 5), \quad (2, 6), \quad (2, 7),$$

$$(3, 4), \quad (3, 5), \quad \ldots$$

a mezzo delle quali si scrivono subito le serie risolventi delle corrispondenti equazioni.

11. – Se, stabiliti ad arbitrio P_1, P_2 (ad esempio interi positivi), si assume per p un valore minore del quoziente della divisione di $P_1^2 + P_2^2$ per $P_1 P_2$, risulta allora nella (1_{10}) $R < 0$. Ciò succede anche se, assunto p uguale al quoziente approssimato a meno di un'unità per difetto della divisione di $P_1^2 + P_2^2$ per $P_1 P_2$ (essendo $0 < P_1 < P_2$), si ritiene poi come soluzione iniziale $(P, P_2 + n)$, con n intero positivo qualsiasi, perchè allora, lasciato invariato p ed indicato con $-R_n$ il corrispondente valore di R, dalla

$$P_1^2 + (P_2 + n)^2 - R_n = p P_1 (P_2 + n),$$

si ha

$$R_0 = R = P_1^2 + P_2^2 - p P_1 P_2,$$

$$(1_{11}) \qquad R_n = R + (2 P_2 + n - p P_1) n .$$

Ora, se $0 < P_1 < P_2$, è appunto $R_n > 0$ e quindi la serie

$$(2_{11}) \qquad \ldots, \quad a_{m-1} = p a_m - a_{m+1}, \quad \ldots, \quad p P_1 - P_2 - n, \quad P_1, \quad P_2 + n,$$

$$p(P_2 + n) - P_1, \quad \ldots, \quad a_{m+1} = p a_m - a_{m-1}, \quad \ldots$$

è la serie risolvente dell'equazione

$$(3_{11}) \qquad x^2 + y^2 - R_n = pxy, \qquad \text{con } R_n > 0,$$

ove R_n è dato dalla (1_{11}), con $0 < P_1 < P_2$.

Se per esempio assumiamo $P_1 = 1 < P_2$, essendo P_2 intero arbitrario, si ha

$$p = P_2, \qquad R = 1.$$

In tale ipotesi la (2_{11}) diventa

$$(4_{11}) \qquad ..., \quad -np^2 - p + n, \quad -np - 1, \quad -n, \ 1, \quad p + n, \quad p(p+n) - 1, \quad ....$$

Ora consideriamo tre casi.

a) $n = 0$. In tal caso la (4_{11}) diventa

$$..., \quad -p^2 + 1, \quad -p, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad p, \quad p^2 - 1, \quad ...,$$

e le soluzioni che si traggono dalla serie a sinistra dello zero sono opposte di quelle che si ottengono dalla serie a destra dello zero, e non hanno quindi alcun interesse.

b) $n = 1$. Si ha analogo risultato a quello del caso precedente.

c) $n > 1$. Le soluzioni negative cambiate di segno dànno in questo caso soluzioni positive distinte da quelle che si traggono dalla serie a destra di $-n$. Cioè in tal caso sono soluzioni intere e positive della (3_{11}) le coppie di termini consecutivi delle due serie

$$1, \quad p, \quad p + n, \quad p(p+n) - 1, \quad ..., \quad a_{m+1} = pa_m - a_{m-1}, \quad ...,$$

$$n, \quad np + 1, \quad p(p+n) - n, \quad ..., \quad a_{m+1} = pa_m - a_{m-1}, \quad ....$$

L'equazione però ammette anche la soluzione $(\pm 1, \mp n)$.

Se per esempio è $P_1 = 1$, $P_2 = 4$, $n = 2$, si ha $R_2 = 13$ e quindi sono serie risolventi della

$$x^2 + y^2 - 13 = 4xy$$

le due serie

$$1, \quad 6, \quad 23, \quad 86, \quad \ldots, \quad a_{m+1} = 4a_m - a_{m-1}, \quad \ldots,$$

$$2, \quad 9, \quad 34, \quad 127, \quad \ldots, \quad a_{m+1} = 4a_m - a_{m-1}, \quad \ldots .$$

L'equazione ammette però anche la soluzione $(\pm 1, \mp 2)$.

12. – Nel caso generale che P_1, P_2 e p siano interi arbitrari, che sussista identicamente la (3_{10}) e che la (4_{10}), i cui termini soddisfano alla (2_{10}), sia serie risolvente della (1_{10}), risolvendo essa rispetto ad y abbiamo

$$y = [px \pm \sqrt{(p^2 - 4)x^2 - 4R}]/2,$$

e quindi si ha una soluzione intera della

$$(1_{12}) \qquad t^2 - (p^2 - 4)x^2 = -4R,$$

quando ad x si sostituisce un termine qualunque della (4_{10}).

Se si fissa p si hanno infiniti valori di R per cui la (1_{12}) ha, per ciascuno di tali valori di R, infinite soluzioni che si traggono dalla corrispondente (4_{10}).

Per esempio se si fa $p = 5$ ed assumiamo poi, per esempio, $P_1 = 1$, $P_2 = 4$ oppure $P_1 = 2$, $P_2 = 9$ si ha, rispettivamente, dalla (3_{10}), $R = 3$, $R = 5$ e quindi alle equazioni

$$t^2 - 21\, x^2 = -12, \qquad t^2 - 21\, x^2 = -20$$

si soddisfa attribuendo ad x rispettivamente ogni termine delle seguenti serie

$$1, \quad 4, \quad 19, \quad \ldots, \quad a_{m+1} = 5a_m - a_{m-1}, \quad \ldots ;$$

$$\ldots, \; a_{m-1} = 5a_m - a_{m+1}, \; \ldots, \; 14, \; 3, \; 1, \; 2, \; 9, \; 43, \; \ldots, \; a_{m+1} = 5a_m - a_{m-1}, \; \ldots .$$

13. – Si sono considerate precedentemente le equazioni indeterminate, i termini delle cui serie risolventi soddisfano a relazioni ricorrenti del tipo della (2_{10}), con i termini iniziali e il modulo p interi arbitrari.

Ora una generalizzazione della (2_{10}) è, per n intero positivo e p razionale relativo qualsiasi, la seguente

$$(1_{13}) \qquad a_{m+1} = pa_m\, a_{m-1} \ldots a_{m-n+2} - a_{m-n+1},$$

che per $n = 2$ si riduce appunto alla (2_{10}). È notevole il fatto che *n termini consecutivi di una serie costruita a mezzo della (1_{13}), con modulo p arbitrario e quando si assumano n qualsiasi termini interi iniziali, dànno una soluzione razionale della*

$$(2_{13}) \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 + R = px_1 \ldots x_n \qquad (R \text{ opportuno})$$

che generalizza la (1_{10}).

Basta fare

$$x_i = P_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

essendo $P_1, \ldots, P_n$ i termini iniziali interi arbitrari della serie, ed assumere

$$(3_{13}) \qquad R = pP_1 \ldots P_n - (P_1^2 + \ldots + P_n^2),$$

essendo p razionale relativo qualsiasi.

Infatti si dimostra subito con il metodo d'induzione completa che, n termini consecutivi della serie

$$(4_{13}) \quad \ldots,\ a_{m-n+1} = pa_m \ldots a_{m-n+2} - a_{m+1},\ \ldots,\ P_1,\ \ldots,$$
$$P_n,\ \ldots,\ a_{m+1} = pa_m \ldots a_{m-n+2} - a_{m-n+1}\ \ldots,$$

dànno una soluzione della (2_{13}).

Osservazione. Si noti che, se si considerano n termini qualsiasi ma consecutivi della serie risolvente della (2_{13}), e di essi si scrivono tutte le $n!$ possibili permutazioni, gli n termini (di ognuna delle permutazioni, distinta dalle precedenti), nell'ordine in cui si sono scritti, assunti come termini iniziali di una serie, costruita a mezzo della (1_{13}), dànno in generale una nuova serie risolvente dell'equazione data, diversa, almeno a partire da un certo termine, da tutte le serie risolventi trovate innanzi. Il procedimento può naturalmente applicarsi a qualunque ennupla di termini consecutivi di ciascuna delle nuove serie risolventi trovate. Quindi il numero di tali serie è infinito ed ognuna ci dà infinite soluzioni. Si vede così quanto sia fecondo il metodo indicato.

14. – Si abbia ad esempio l'equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 5 = x_1 x_2 x_3 x_4,$$

della quale, assunte come soluzioni iniziali ad esempio

$$(1,\ 2,\ 2,\ 2), \qquad (1,\ 2,\ 4,\ 4), \qquad (1,\ 2,\ 5,\ 5),$$

risultano serie risolventi, con termini positivi e modulo uguale ad 1, le seguenti.

$$1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 7,\ 26,\ 362,\ \ldots,\quad a_{m+1} = a_m\, a_{m-1}\, a_{m-2} - a_{m-3},\quad \ldots,$$

$$1,\ 2,\ 4,\ 4,\ 31,\ 494,\ \ldots,\quad a_{m+1} = a_m\, a_{m-1}\, a_{m-2} - a_{m-3},\quad \ldots,$$

$$1,\ 4,\ 4,\ 14,\ 223,\ \ldots,\quad a_{m+1} = a_m\, a_{m-1}\, a_{m-2} - a_{m-3},\quad \ldots,$$

$$1,\ 2,\ 5,\ 5,\ 49,\ 1223,\ \ldots,\quad a_{m+1} = a_m\, a_{m-1}\, a_{m-2} - a_{m-3},\quad \ldots,$$

$$1,\ 5,\ 5,\ 23,\ 574,\ \ldots,\quad a_{m+1} = a_m\, a_{m-1}\, a_{m-2} - a_{m-3},\quad \ldots,$$

a ciascuna delle quali potrebbe, naturalmente, applicarsi l'osservazione precedente.

15. – Di particolare interesse è il problema della ricerca di n numeri naturali tali che *la somma dei loro quadrati sia uguale al loro prodotto*, cioè la ricerca di soluzioni intere e positive dell'equazione

$$(1_{15}) \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = x_1 \ldots x_n\,.$$

Consideriamo alcuni casi:

a) $n = 2$. La (1_{15}) è impossibile in numeri reali.

b) $n = 3$. Dalla soluzione iniziale $(3,\ 3,\ 3)$ si ha la serie risolvente

$$3,\ 3,\ 3,\ 6,\ 15,\ 87,\ \ldots,\ a_{m+1} = a_m\, a_{m-1} - a_{m-2},\ \ldots\,.$$

(Sia in questo caso che in quelli che seguono si può utilizzare l'Osservazione della fine del n. **13**.)

c) $n = 4$. Si ha la serie risolvente, derivante dalla soluzione iniziale $(2, 2, 2, 2)$,

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 6,\ 22,\ 262,\ \ldots, \qquad a_{m+1} = a_m\, a_{m-1}\, a_{m-2} - a_{m-3},\ \ldots .$$

d) $n = 5$. Si hanno ad esempo le seguenti soluzioni iniziali

$$(1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 4), \qquad (1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 5),$$

che dànno luogo alle serie risolventi

$$\ldots,\ 3419,\ 57,\ 12,\ 5,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 4,\ 35,\ 1259,\ \ldots,$$

$$\ldots,\ 1187,\ 33,\ \ 9,\ 4,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 5,\ 44,\ 1979,\ \ldots$$

in ciascuna delle quali è

$$a_{m+1} = a_m\, a_{m-1}\, a_{m-2}\, a_{m-3} - a_{m-4}\,.$$

e) $n = 7$, $n = 8$. Per $n = 7$ ed $n = 8$ si ottengono agevolmente, ad esempio, rispettivamente le seguenti soluzioni iniziali

$$(1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 5), \qquad (1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 5,\ 18), \qquad (1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 10,\ 37);$$

$$(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 14), \qquad (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 14,\ 52),$$

a mezzo delle quali si scrivono le corrispondenti serie risolventi.
Ecc., ecc..

16. – Si noti che è possibile trovare soluzioni intere e positive della

$$(1_{16}) \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 - R = p x_1 \ldots x_n \qquad (R > 0),$$

quando p è razionale relativo qualsiasi ed R è scelto con una certa arbitrarietà. Infatti se si attribuisce ad x_1 il valore zero, si può scegliere R (ed in questa scelta vi è appunto una certa arbitrarietà) in modo che esso si possa decomporre nella somma di $n-1$ quadrati, tutti però diversi da zero (perchè nel caso contrario la serie risolvente non conterrebbe soluzione positiva diversa dalla iniziale). Difatti, nella ipotesi $x_1 = 0$ la (1_{16}) diventa

$$(2_{16}) \qquad R = x_2^2 + \dots + x_n^2 .$$

Consideriamo alcuni casi particolari.

a) $n = 2$. La (2_{16}) diventa $R = x^2$, perciò R può assumersi uguale ad un quadrato P^2 qualsiasi, e quindi l'equazione

$$x_1^2 + x_2^2 - P^2 = p\, x_1\, x_2,$$

in cui P e p sono del tutto arbitrari, ammette la soluzione iniziale $(0, P)$ e pertanto una sua serie risolvente è

$$0,\ P,\ pP,\ p^2P - P, \dots,\ a_{m+1} = pa_m - a_{m-1}, \dots .$$

b) $n = 3$. La (2_{16}) diventa $R = x_2^2 + x_3^2$, e quindi R può avere la forma $n_1^2\, n_2$, ove n_1 ed n_2 sono interi positivi arbitrari ma con n_2 privo di fattori $4h + 3$ e non quadrato.

Se per esempio è

$$R = 65 = 5.13 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2,$$

dell'equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 65 = p\, x_1\, x_2\, x_3 \qquad (p \text{ arbitrario})$$

si hanno le seguenti serie risolventi:

$$\dots,\ -8p^2 + 8,\ \ 8p,\ -1,\ -8,\ 0,\ 1,\ 8,\ \ 8p,\ \ 64p^2 - 1,\ \dots,$$

$$\dots,\ -112p^2 + 7,\ 28p,\ -4,\ -7,\ 0,\ 4,\ 7,\ 28p,\ 196p^2 - 4,\ \dots,$$

in ciascuna delle quali è

$$a_{m+1} = p\ a_m\ a_{m-1} - a_{m-2} .$$

c) $n = 4$. Al solito p è del tutto arbitrario ed R può assumersi uguale ad un qualsiasi numero naturale che è rappresentabile come la somma di tre quadrati, cioè R può essere uno qualunque dei numeri naturali che non hanno la forma

$$2^{2k}(8h-1),$$

purchè tale che i tre quadrati in cui R può decomporsi siano tutti diversi da zero.

Se per esempio si fa $p = -1$, si scrivono subito le serie risolventi ad esempio dell'equazione

$$x_1^2 + \dots + x_4^2 + x_1 \dots x_4 = 770,$$

quando si tien presente che 770 è la somma dei quadrati delle seguenti terne di numeri

$$3,\ 19,\ 20; \quad 4,\ 5,\ 27; \quad 9,\ 17,\ 20; \quad 5,\ 13,\ 24; \quad 1,\ 12,\ 25;$$

$$8,\ 9,\ 25; \quad 4,\ 15,\ 23.$$

d) $n = 5$. R può essere un numero naturale qualsiasi, diventando ora la (2_{16}) la seguente

$$R = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2,$$

purchè la decomposizione di R nella somma di 4 quadrati dia luogo a quadrati tutti diversi da zero.

17. – Un'altra equazione interessante è la seguente

$$(1_{17}) \qquad x_1^2 + \dots + x_n^2 = nx_1 \dots x_n$$

di cui serie risolvente è la serie

$$(2_{17}) \qquad \underset{(1)}{1}, \dots, \underset{(n)}{1}, n-1, n^2-n-1, \dots, a_{m+1} = na_m \dots a_{m-n+2} - a_{m-n+1}, \dots .$$

I termini di questa serie godono la seguente proprietà. Il prodotto di due termini fra cui sono compresi altri $n-1$, è uguale alla somma dei quadrati di questi ultimi; oppure ogni termine della (2_{17}) divide la somma dei quadrati sia degli $n-1$ termini che lo precedono che degli $n-1$ che lo seguono.

Difatti se nella (1_{17}) al posto di $x_1, \ldots, x_{n-1}$ si pone rispettivamente a_{m+1}, $a_{m+2}, \ldots, a_{m+n-1}$, ove a_i sono i termini della (2_{17}), questa assume la forma

$$x_n^2 - n\, a_{m+1} \ldots a_{m+n-1}\, x_n + a_{m+1}^2 + \cdots + a_{m+n-1}^2 = 0,$$

la quale, dovendo ammettere come radici a_m e a_{m+n}, dà

$$a_m\, a_{m+n} = a_{m+1}^2 + \cdots + a_{m+n-1}^2 .$$

Naturalmente proprietà analoghe godono tutte le serie risolventi di cui ci siamo occupati sino ad ora.

18. – Se si risolve rispetto ad x_n la (2_{13}) si ha

$$x_n = (p x_1 \ldots x_{n-1} \pm \sqrt{\Delta})/2,$$

ove

$$\Delta = p^2 x_1^2 \ldots x_{n-1}^2 - 4(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + R) .$$

Ora, poichè attribuendo ad $x_1, \ldots, x_{n-1}$ dei valori rispettivamente uguali ad $n-1$ termini consecutivi, $a_{m+1}, \ldots, a_{m+n-1}$, della serie risolvente (4_{13}) della (2_{13}), si debbono avere per x_n i valori a_m ed a_{m+n}, il corrispondente Δ deve essere un quadrato, cioè dell'equazione indeterminata

$$t^2 + 4(x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + R) = p^2 x_1^2 \ldots x_{n-1}^2 \tag{1_{18}}$$

si ha una soluzione intera quando si fa

$$x_1 = a_{m+1}, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = a_{m+n-1},$$

se p ed R soddisfano alla (3_{13}), essendo i P_i arbitrari.

Se nella (1_{18}) è p pari, cioè è $p = 2q$, e si pone $t = 2u$, la (1_{18}) diventa

$$\boxed{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + u^2 + R = q^2 x_1^2 \ldots x_{n-1}^2},$$

della quale si ha una soluzione a mezzo di $n-1$ termini consecutivi della (4_{13}), quando vi si faccia $p = 2q$, essendo R dato dalla (3_{13}) con $p = 2q$.

È interessante il caso in cui è $R = 0$. Di equazioni (2_{13}) con $R = 0$ ci si è occupati al n. **17**.

19. – Si consideri ancora l'equazione

$$(1_{19})\qquad x_1^2+\ldots+x_n^2+y^2=(n+1)x_1\ldots x_n\,.$$

Risolvendola rispetto ad x_n abbiamo

$$x_n=[(n+1)x_1\cdots x_{n-1}\pm\sqrt{\Delta}]/2,$$

essendo

$$\Delta=(n+1)^2x_1^2\ldots x_{n-1}^2-4(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+y^2)\,.$$

Ora se

$$(2_{19})\qquad (a_1,\quad\ldots,\quad a_n,\quad N)$$

è una soluzione intera e positiva della (1_{19}), ed assumiamo

$$x_1=a_2,\quad\ldots,\quad x_{n-1}=a_n,$$

risulta

$$\Delta=(n+1)^2a_2^2\ldots a_n^2-4(a_2^2+\ldots+a_n^2+y^2),$$

ed identicamente

$$a_1^2+\ldots+a_n^2+N^2=(n+1)a_1\ldots a_n;$$

eliminando fra quest'ultime due l'espressione $-4(a_2^2+\ldots+a_n^2)$, si ha

$$\Delta=[(n+1)a_2\ldots a_n-2a_1]^2+4N^2-4y^2.$$

Ora si hanno facilmente soluzioni razionali della (1_{19}) nei due seguenti casi:

a) $y=N$. Si ottengono in questo caso le soluzioni che si traggono a mezzo delle corrispondenti serie risolventi.

b) $2y=(n+1)a_2\ldots a_n-2a_1$. Si trae allora

$$x_n=[(n+1)a_2\ldots a_n\pm 2N]/2,$$

e si passa perciò, dalla soluzione iniziale (2_{19}), alle altre due

$$a_2,\ \ldots,\ a_n,\quad (1/2)(n+1)a_2\ldots a_n\pm N,\quad (1/2)(n+1)a_2\ldots a_n-a_1\,.$$

20. – Se per esempio è $n = 3$, della

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y^2 = 4x_1\, x_2\, x_3 \tag{1_{20}}$$

si ha la seguente soluzione parametrica

$$x_1 = x_2 = x_3 = A, \qquad y = (2r - 1)A \qquad (r \text{ intero arbitrario}),$$

essendo $A = r^2 - r + 1$, a mezzo della quale, applicando i due procedimenti del n. **19**, potrebbero ricavarsi infinite soluzioni parametriche della (1_{20}).

21. – Se invece si ha l'equazione

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + ny^2 = nx_1 \dots x_n, \tag{1_{21}}$$

sue soluzioni intere, calcolate indipendentemente dai procedimenti del n. **19**, che possono applicarsi poi a ciascuna di esse, sono le seguenti

$$(\underbrace{1,\ 1,\ \dots,\ 1}_{(n-1)},\ n-1,\ 0), \qquad (\underbrace{1,\ \dots,\ 1}_{(n-2)},\ n-1,\ A,\ 0), \qquad (\underbrace{1,\ \dots,\ 1}_{(n-3)},\ A,\ B,\ C),$$

$$(\underbrace{1,\ \dots,\ 1}_{(n-4)},\ A,\ B\cdot D,\ n^2\cdot(C - n + 2))$$

in cui è

$$A = n^2 - n - 1, \qquad B = n^3 - n^2 - 2n + 1, \qquad C = n^3 - 2n^2 - n + 2,$$

$$D = n^4 - n^3 - n^2 + 2n + 1.$$

22. – Facciamo una osservazione sulle serie numeriche di cui ci siamo occupati.

Se sono primi fra loro a due a due (o se hanno un divisore d comune) gli n termini di una ennupla qualsiasi di termini consecutivi di una serie numerica, costruita a mezzo della (1_{13}), sono pure primi fra loro a due a due (o hanno in comune lo stesso divisore d) gli n termini di tutte le altre ennuple di termini consecutivi della stessa serie.

Se indichiamo infatti con a_i i termini di tale serie e se l'ennupla di termini consecutivi, che per ipotesi sono primi fra loro a due a due (o che hanno il comune divisore d), è la seguente

$$a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \dots, \quad a_{m+n};$$

si riconosce subito che anche i termini dell'ennupla successiva (e quindi di tutte le sue seguenti)

$$a_{m+2}, \quad a_{m+3}, \quad \dots, \quad a_{m+n+1} = pa_{m+n} \dots a_{m+2} - a_{m+1}$$

e quelli dell'ennupla precedente (e perciò di ciascuna di quelle che la precedono)

$$a_m = pa_{m+1} \dots a_{m+n-1} - a_{m+n}, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \dots, \quad a_{m+n-1};$$

sono primi fra loro a due a due.

23. – Merita di essere notata in maniera particolare la seguente equazione indeterminata, perchè il procedimento seguito per averne soluzioni non si può applicare ad altra equazione dello stesso tipo ma più generale:

$$(1_{23}) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + y^2 = 4x_1\, x_2\, x_3\, x_4 .$$

Soluzioni intere e positive della (1_{23}) sono date da quattro termini consecutivi della seguente serie numerica:

$$(2_{23}) \qquad 1,\ 1,\ 3,\ 11,\ 41,\ 153,\ 571,\ 2131,\ 7956,\ \dots$$

i cui termini, detti al solito a_i, soddisfano alla formula ricorrente

$$(3_{23}) \qquad a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1} \qquad (a_1 = a_2 = 1) .$$

Dimostriamo che se una soluzione della (1_{23}) è data da

$$(x_1, \dots, x_4) = (a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}),$$

se ne ha un'altra con

$$(x_1, \dots, x_4) = (a_{n-1}\ \ a_n, a_{n+1}, a_{n+2})$$

quando si assuma, rispettivamente,

$$y = (a_{n+1} - a_n)\,(a_{n-1} - a_{n-2}), \qquad y = (a_{n+2} - a_{n+1})\,(a_n - a_{n-1})\,.$$

Innanzi tutto si prova subito per induzione che i termini della (2_{23}) soddisfano alla seguente formula ricorrente

$$(4_{23}) \qquad a_n^2 - 4a_{n-1}\,a_n + a_{n-1}^2 + 2 = 0\,.$$

Ora, avendosi identicamente per ipotesi

$$(5_{23}) \qquad a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 + a_n^2 + a_{n+1}^2 + (a_{n+1} - a_n)^2\,(a_{n-1} - a_{n-2})^2 = 4a_{-2} \ldots a_{n+1},$$

si deve provare che è anche

$$(6_{23}) \qquad a_{n-1}^2 + a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + (a_{n+2} - a_{n+1})^2\,(a_n - a_{n-1})^2 = 4a_{n-1} \ldots a_{n+2}\,.$$

Difatti, eliminando a_{n-2} ed a_{n+2} fra la (5_{23}), la (6_{23}) e rispettivamente le due seguenti

$$a_{n-2} = 4a_{n-1} - a_n, \qquad a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n,$$

che si ottengono dalla (3_{23}), si ha, se si sottraggono poi membro a membro,

$$56a_n\,(a_{n-1} - 2a_n)\,(a_n^2 - 4a_{n-1}\,a_n + a_{n-1}^2 + 2) = 0,$$

che per la (4_{23}) è identicamente soddisfatta.

Si verifica subito poi che i primi termini di (2_{23}) dànno una soluzione di (1_{23}).

24. – Risolviamo la seguente questione.

Si cerchino degli interi primi fra loro a due a due, tali che qualunque sia l'intero relativo m, si abbia

$$(1_{24}) \qquad x_1 \mid (x_2^2 + \ldots + x_n^2 + m), \qquad x_2 \mid (x_1^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 + m),$$

$$x_n \mid (x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + m),$$

ove il simbolo $a \mid b$ indica che a divide b, cioè che si abbia

$$(2_{24}) \qquad x_2^2 + \dots + x_n^2 + m = x_1 u_1, \qquad x_1^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 + m = x_2 u_2, \qquad \dots,$$

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + m = x_n u_n,$$

essendo u_i degli interi.

Ora, se aggiungiamo ad ambo i membri della prima, seconda, ..., ennesima delle (2_{24}) rispettivamente x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2, abbiamo

$$(3_{24}) \qquad x_1^2 + \dots + x_n^2 + m = x_1(u_1 + x_1) = x_2(u_2 + x_2) = \dots = x_n(u_n + x_n).$$

Quindi le x_i devono essere tali che l'espressione

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + m$$

risulti divisibile per x_1, x_2, ..., x_n e quindi anche per $x_1 \dots x_n$, poichè si limita la ricerca a quei numeri interi x_i che sono primi fra loro a due a due. Pertanto le x_i debbono essere soluzioni intere di una equazione del tipo

$$(4_{24}) \qquad x_1^2 + \dots + x_n^2 + m = px_1 \dots x_n,$$

per p opportuno.

Ora se assumiamo $p = m + n$, della (4_{24}) abbiamo infinite serie risolventi [perchè per $p = m + n$ una soluzione iniziale della (4_{24}) è $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, a mezzo della quale, con la formula ricorrente

$$a_{m+1} = (m + n)a_m \dots a_{m-n+2} - a_{m-n+1},$$

si costruisce una prima serie risolvente e poi infinite per l'osservazione del n. **13**] ciascuna delle quali dà infinite soluzioni della (4_{24}) e quindi della questione (1_{24}) proposta.

Un caso particolarissimo si ha per $m = 1$, $n = 2$. Di tale questione particolare si sono occupati SIERPINSKI e SCHINZEL [11], che ne hanno dato però tutte le soluzioni, e W. H. MILLS [12] che è pervenuto agli stessi risultati dei precedenti Autori battendo però via diversa.

---

[11] Cfr. l. c. in [1].

[12] W. H. MILLS, *A system of quadratic Diophantine equations*, Pacific J. Math. **3** (1953), 209-220; cfr. p. 218.

25. – Il confronto di ciascuna delle (3_{24}) con la (4_{24}) per $p = m + n$, cioè con la

$$(1_{25}) \qquad x_1^2 + \dots + x_n^2 + m = (m + n)x_1 \dots x_n,$$

dà

$$u_1 = (m + n)x_2 \dots x_n - x_1, \qquad u_2 = (m + n)x_1 x_3 \dots x_n - x_2, \qquad \dots,$$

$$u_n = (m + n)x_1 \dots x_{n-1} - x_n,$$

e quindi, a mezzo delle dette soluzioni della (1_{25}), si hanno infinite soluzioni del sistema (2_{24}).

26. – Cerchiamo infine infinite soluzioni razionali relative, ad esempio della equazione indeterminata

$$(1_{26}) \qquad ax_1^2 + \dots + ax_n^2 + R = px_1 \dots x_n,$$

ove a è un numero naturale qualsiasi, p è un intero relativo arbitrario ma primo con a ed R opportuno.

La (1_{26}) divisa per a diventa

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + \frac{R}{a} = \frac{p}{a} x_1 \dots x_n .$$

Ora, fatto $x_1 = P_1, \dots, x_n = P_n$, con i P_i razionali arbitrari, la serie risolvente che ha per termini iniziali i numeri P_i e per modulo p / a, dà infinite altre serie risolventi, ciascuna delle quali, con tutte le ennuple di termini consecutivi dà infinite soluzioni della nostra questione.

Si abbia ad esempio l'equazione

$$(2_{26}) \qquad 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 = 11x_1 x_2 x_3,$$

della quale è soluzione $(1, 1, 3)$.

Ora la (2_{26}) divisa per 3 dà

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (11/3)x_1 x_2 x_3 .$$

La serie risolvente di mod $11/3$ e di termini iniziali 1, 1, 3 è la seguente

$$\dots,\quad a_{m-2} = \frac{11}{3}\, a_m\, a_{m-1} - a_{m+1},\ \dots,\ 13/9,\ \ 2/3,\ \ 1,\ 1,\ 3,\ 10,\ 109,\ \frac{11981}{3},\ \dots.$$

$$a_{m+1} = \frac{11}{3}\, a_m\, a_{m-1} - a_{m-2},\ \dots,$$

a mezzo della quale, per l'osservazione del n. **13**, si hanno infinite altre serie risolventi di cui ciascuna fornisce infinite soluzioni della (2_{26}).

Si possono risolvere agevolmente, con il procedimento indicato, numerose altre questioni assai generali analoghe all'ultima trattata.