Rivista Mat. Univ. Parma 6, 389-398 (1955)

MARIA ANTONIETTA BARATTA (*)

Sopra un problema cilindrico non lineare di propagazione del calore. (**)

1. - Introduzione.

In un recente lavoro [1] (1), al quale mi richiamo per considerazioni generali e notazioni, mi sono occupata di un problema di ripartizione del calore fra due mezzi semiinfiniti, isotropi ed omogenei, riempienti rispettivamente due semispazi aventi in comune il piano origine, nell'ipotesi che fra le due superficie, in contatto diretto, esistesse una distribuzione di sorgenti di calore variabi i col tempo e una «resistenza termica di contatto» funzione, oltre che di altri parametri, della differenza $\Phi(t)$ delle temperature dei due corpi sulla superficie in contatto.

Assumendo come incognita ausiliaria questa differenza di temperatura, sono riuscita, facendo uso della trasformata di LAPLACE, a ricondurre il problema analitico, connesso al problema fisico, alla risoluzione di un'unica equazione integrale, non lineare, singolare, di tipo di VOLTERRA, nell'incognita funzione $\Phi(t)$.

Nella presente Nota tratterò, fisse restando le altre ipotesi, il caso non lineare unidimensionale offerto da due mezzi omogenei e termicamente isotropi riempienti rispettivamente un cilindro ed un manicotto cilindrico coassiale, entrambi rotondi ed indefiniti.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Comunicazione tenuta al 5° Congresso della «Unione Matematica Italiana» (Pavia-Torino, 6-12 ottobre 1955).

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta alla fine del lavoro.

Anche in questo caso mi è stato possibile, con metodo analogo, ridurre il problema alla determinazione della funzione Φ, mediante una equazione integrale, non lineare, singolare, di VOLTERRA.

Il problema cilindrico qui risolto ha notevole interesse dal punto di vista fisico-tecnico in quanto, sia pur con le dovute schematizzazioni ed ipotesi semplificatrici, può servire a determinare la ripartizione del calore in pezzi cilindrici di macchine, in moto relativo l'uno rispetto all'altro, sia nel caso di contatto diretto che lubrificato.

2. – Impostazione del problema.

Siano S_1 ed S_2 i due mezzi omogenei e termicamente isotropi, riempienti rispettivamente il cilindro rotondo, indefinito, di raggio a ed il manicotto cilindrico coassiale di raggi a e b $(a < b)$.

Fra le due superficie a contatto penseremo generata, ad esempio per attrito, una distribuzione di sorgenti di calore di rendimento specifico variabile col tempo ed una «resistenza termica di contatto» funzione della differenza di temperatura superficiale di S_1 ed S_2. Penseremo nulle le temperature iniziali in S_i e così pure quella dello strato di sorgenti, generate, per $t > 0$, sulla superficie comune di S_i $(i = 1, 2)$.

Fissato un sistema di coordinate cilindriche, con asse l'asse comune ai due corpi, penseremo le temperature in S_i, in ogni istante, funzioni del posto soltanto tramite la distanza r del punto considerato dall'asse comune ai due corpi (problema unidimensionale).

Fissiamo ora i simboli che useremo nel seguito e le relative ipotesi principali.

1°) Sarà sempre $i = 1, 2$ e il tempo $t \geqslant 0$.

2°) $U^{(i)} = U^{(i)}(r, t)$ indicano le temperature in S_i, funzioni limitate per ogni $0 \leqslant r \leqslant b$, continue assieme alle loro derivate prime e seconde rispetto ad r e alle loro derivate prime rispetto a t.

$\Phi = U^{(2)}(a, t) - U^{(1)}(a, t)$ è il salto termico per $r = a$, funzione continua e limitata, positiva per $t > 0$, nulla per $t = 0$.

f indica la «resistenza termica», funzione continua e positiva di Φ.

3°) $T = T(t)$ è la temperatura dello strato di sorgenti, funzione continua e limitata per ogni $t > 0$, nulla per $t = 0$.

4°) λ_i, h_i, λ', h' sono rispettivamente i coefficienti di conducibilità e di conducibilità mutua di S_i e dello strato di sorgenti; C_i costanti dipendenti dalla natura delle superficie a contatto; F_0 (> 0) è il flusso costante attraverso la superficie esterna del manicotto cilindrico; a_i^2 è la diffusività termica di S_i, che supporremo uguale all'unità.

5°) $U_r^{(i)}$, $U_{rr}^{(i)}$, $U_t^{(i)}$ indicheranno rispettivamente le derivate $\dfrac{\partial U^{(i)}}{\partial r}$, $\dfrac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial U^{(i)}}{\partial t}$; k_i, k' rispettivamente λ_i/h_i, λ'/h'.

Il problema di trovare la temperatura in ogni punto di S_i porta, com'è ben noto, alla risoluzione dei seguenti sistemi (cfr.: [**1**], pag. 365; [**2**], pag. 178):

$$(\mathfrak{A}) \quad \begin{cases} U_{rr}^{(1)} + r^{-1} U_r^{(1)} = U_t^{(1)}, & \text{in } S_1, \quad t > 0, \\ \Phi = f \cdot [C_1 T - k_1 U_r^{(1)}], & r = a, \quad t > 0, \\ U^{(1)} = 0, & \text{in } S_1, \quad t = 0; \end{cases}$$

$$(\mathfrak{B}) \quad \begin{cases} U_{rr}^{(2)} + r^{-1} U_r^{(2)} = U_t^{(2)}, & \text{in } S_2, \quad t > 0, \\ \Phi = f \cdot [C_2 T + k' U_r^{(2)}], & r = a, \quad t > 0, \\ k_2 U_r^{(2)} = - F_0, & r = b, \quad t > 0, \\ U^{(2)} = 0, & \text{in } S_2, \quad t = 0. \end{cases}$$

Consideriamo la funzione

$$G = \Phi / f. \tag{1}$$

In base alle ipotesi formulate, la G risulta, manifestamente, funzione continua di Φ, positiva, nulla per $\Phi = 0$, ed inoltre, essendo $1/f$ limitata qualunque sia Φ, la G risulta sicuramente lipschitziana.

Dopo le posizioni fatte, è conveniente, per il seguito, scrivere i sistemi $(\mathfrak{A})$ e $(\mathfrak{B})$ nella forma

$$(\mathfrak{A}') \quad \begin{cases} U_{rr}^{(1)} + r^{-1} U_r^{(1)} = U_t^{(1)}, & \text{in } S_1, \quad t > 0, \\ k_1 U_r^{(1)} = C_1 T - G, & r = a, \quad t > 0, \\ U^{(1)} = 0, & \text{in } S_1, \quad t = 0; \end{cases}$$

$$(\mathfrak{B}') \quad \begin{cases} U_{rr}^{(2)} + r^{-1} U_r^{(2)} = U_t^{(2)}, & \text{in S}_2, \quad t > 0, \\ k' U_r^{(2)} = G - C_2 T, & r = a, \quad t > 0, \\ - k_2 U_r^{(2)} = F_0, & r = b, \quad t > 0, \\ U^{(2)} = 0, & \text{in } S_2, \quad t = 0. \end{cases}$$

3. – Espressione della temperatura in S_i in funzione della differenza delle loro temperature superficiali.

Applicando ai sistemi $(\mathfrak{A}')$ e $(\mathfrak{B}')$ il noto metodo della trasformazione di LAPLACE, posto

$$\overline{U}^{(i)} = \mathfrak{L}U^{(i)} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, U^{(i)}\, dt, \qquad \overline{T} = \mathfrak{L}T = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, T\, dt, \qquad \overline{G} = \mathfrak{L}G = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, G\, dt,$$

si ottengono i seguenti sistemi ([**2**], pag. 273):

$$(\overline{\mathfrak{A}}') \quad \begin{cases} \overline{U}^{(1)}_{rr} + r^{-1}\overline{U}^{(1)}_{r} = p\overline{U}^{(1)}, & \text{in } S_1, \\ k_1\overline{U}^{(1)}_{r} = C_1\overline{T} - \overline{G}, & r = a, \end{cases}$$

$$(\overline{\mathfrak{B}}') \quad \begin{cases} \overline{U}^{(2)}_{rr} + r^{-1}\overline{U}^{(2)}_{r} = p\overline{U}^{(2)}, & \text{in } S_2, \\ k'\overline{U}^{(2)}_{r} = \overline{G} - C_2\overline{T}, & r = a, \\ -k_2\overline{U}^{(2)}_{r} = \dfrac{F_0}{p}, & r = b. \end{cases}$$

È noto ([**2**], pag. 278) che la soluzione generale delle prime equazioni dei sistemi $(\overline{\mathfrak{A}}')$ e $(\overline{\mathfrak{B}}')$ ha l'espressione

$$\overline{U}^{(i)} = A\, I_0(rs) + B\, K_0(rs) \qquad (s = \sqrt{p}),$$

con A e B costanti rispetto ad r e funzioni del parametro s, essendo I_n e K_n le ben note funzioni di BESSEL di argomento immaginario, di ordine n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots)$.

Si vede facilmente che soddisfano ai sistemi $(\mathfrak{A}')$ e $(\mathfrak{B}')$ rispettivamente le funzioni:

$$\overline{U}^{(1)} = \frac{(C_1\overline{T} - \overline{G})\, I_0(rs)}{k_1\, s\, I_1(as)} = \frac{C_1\overline{T} - \overline{G}}{k_1\, s}\, \varphi(a,\ r,\ s), \tag{2}$$

$$(3)\quad \overline{U}^{(2)} = \frac{(C_2\overline{T}-\overline{G})[K_1(bs)\,I_0(rs)+I_1(bs)\,K_0(rs)]}{k'\,s\cdot[K_1(as)\,I_1(bs)-K_1(bs)\,I_1(as)]} - \frac{F_0}{k_2\,s^3}\cdot\frac{K_1(as)\,I_0(rs)+I_1(as)\,K_0(rs)}{K_1(as)\,I_1(bs)-K_1(bs)\,I_1(as)} =$$

$$= \frac{C_2\overline{T}-\overline{G}}{k_2\,s}\,\psi(a,\ b,\ r,\ s) - \frac{F_0}{k_2\,s^3}\,\chi(a,\ b,\ r,\ s)\,.$$

Gioverà rilevare che come funzioni di s le $\psi(a, b, r, s)$ e $\chi(a, b, r, s)$ risultano continue e positive. Per questa affermazione basterà provare che, fissato a, non esiste nessun valore reale di $b > a$, e, fissato b, nessun valore reale $0 < a < b$, tale da aversi

$$K_1(as)\,I_1(bs) = K_1(bs)\,I_1(as)\,.$$

Infatti si può facilmente constatare ([**3**], pag. 101) che si ha sempre

$$\frac{K_1(as)}{K_1(bs)} > \frac{I_1(as)}{I_1(bs)}\,.$$

Si può inoltre vedere che le funzioni $\varphi(a, r, s)$, $\psi(a, b, r, s)$, $\chi(a, b, r, s)$ risultano singolari per $s = 0$ e nulle per $s \to \infty$. È evidente che

$$\lim_{s\to 0}\varphi(a,\ r,\ s) = +\infty,$$

essendo $I_0(0) = 1$, $I_1(0) = 0$.

Ricordando ([**4**], pag. 349) per le funzioni $K_n(z)$, $I_n(z)$ gli sviluppi in serie:

$$(8)\qquad K_n(z) = (-1)^{n+1}\,I_n(z)\{\log(z/2)+\gamma\} +$$

$$+\frac{(-1)^n}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2r+n}}{r!\,(n+r)!}\left(\sum_{m=1}^{n+r}m^{-1}+\sum_{m=1}^{r}m^{-1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r(z/2)^{-n+2r}\,\frac{(n-r-1)!}{r!}\,;$$

dove γ è la costante di EULERO-MASCHERONI,

$$(9)\qquad I_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{n+2r}}{r!\,\Gamma(n+r+1)}$$

e le loro espressioni asintotiche:

$$K_n(z) = (\pi/2z)^{1/2}\, e^{-z} V(z), \tag{10}$$

$$I_n(z) = \frac{e^{z}}{(2\pi z)^{1/2}}\, U(z) + \frac{e^{-z \pm [n+(1/2)]\pi i}}{(2\pi z)^{1/2}}\, V(z), \tag{11}$$

dove

$$U(z) \sim 1 - \frac{4n^2 - 1^2}{1!\, 8z} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!\,(8z)^2} + \dots,$$

$$V(z) \sim 1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1!\, 8z} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!\,(8z)^2} + \dots,$$

si hanno i limiti:

I) $$\lim_{s\to 0} \psi(a, b, r, s) = \lim_{s\to 0} \frac{K_1(bs)\, I_0(rs) + I_1(bs)\, K_0(rs)}{K_1(as)\, I_1(bs) - K_1(bs)\, I_1(as)} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{I_1(bs)\, I_0(rs)\{\log(bs/2) + \gamma\} - I_1(bs)\, I_0(rs)\{\log(rs/2) + \gamma\}}{I_1(as)\, I_1(bs)\{\log(as/2) + \gamma\} - I_1(as)\, I_1(bs)\{\log(bs/2) + \gamma\}} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{I_1(bs)\, I_0(rs) \log(b/r)}{I_1(bs)\, I_1(as) \log(a/b)} = \frac{\log b/r}{\log a/r} \lim_{s\to 0} \frac{I_0(rs)}{I_1(as)} = +\infty,$$

II) $$\lim_{s\to 0} \chi(a, b, r, s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{I_1(as)\, I_0(rs)\{\log(as/2) + \gamma\} - I_1(as)\, I_0(rs)\{\log(rs/2) + \gamma\}}{I_1(as)\, I_1(bs)\{\log(as/2) + \gamma\} - I_1(as)\, I_0(rs)\{\log(bs/2) + \gamma\}} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{I_1(as)\, I_0(rs) \log(a/r)}{I_1(as)\, I_1(bs) \log(a/b)} = \frac{\log a/r}{\log a/b} \lim_{s\to 0} \frac{I_0(rs)}{I_1(bs)} = +\infty.$$

Consideriamo ora i tre limiti:

$$\lim_{s\to\infty} \varphi(a, r, s), \qquad \lim_{s\to\infty} \psi(a, b, r, s), \qquad \lim_{s\to\infty} \chi(a, b, r, s).$$

Per il primo si ha:

$$\lim_{s\to\infty} \varphi(a, r, s) = \lim_{s\to\infty} \frac{(2\pi as)^{1/2} \cdot \exp(rs)}{(2\pi rs)^{1/2} \cdot \exp(as)} = \sqrt{a/r} \lim_{s\to\infty} \exp\{(r - a)s\} = 0,$$

essendo $a > r$. Per il secondo limite è

$$\lim_{s\to\infty} \psi(a, b, r, s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K_1(bs)\, I_0(rs) + I_1(bs)\, K_0(rs)}{K_1(as)\, I_1(bs) - K_1(bs)\, I_1(as)} =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{(4\pi rbs^2)^{-1/2}\, [\exp\{(r-b)s\} + \exp\{(b-r)s\}]}{(4\pi abs^2)^{-1/2}\, [\exp\{(b-a)s\} - \exp\{(a-b)s\}]} .$$

Ricordando che in S_2 è $a < r < b$, si ha:

$$\lim_{s\to\infty} \psi(a, b, r, s) = \sqrt{a/r}\, \lim_{s\to\infty} \exp\{(a-r)s\} = 0 .$$

Per il terzo limite, infine, è

$$\lim_{s\to\infty} \chi(a, b, r, s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K_1(as)\, I_0(rs) + I_1(as)\, K_0(rs)}{K_1(as)\, I_1(bs) - K_1(bs)\, I_1(as)} =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{(4\pi ras^2)^{-1/2}\, [\exp\{(r-a)s\} + \exp\{(a-r)s\}]}{(4\pi abs^2)^{-1/2}\, [\exp\{(b-a)s\} - \exp\{(a-b)s\}]} = \sqrt{b/r}\, \lim_{s\to\infty} \exp(r-b) = 0 ,$$

essendo ancora $a < r < b$.

Le osservazioni precedenti sulle funzioni φ, ψ, χ ci assicurano ([**8**], pag. 226; [**4**], pag. 65) che sono antitrasformabili e che le loro antitrasformate soddisfano alle limitazioni

$$(12) \qquad \mathfrak{L}^{-1}\varphi(a, r, s) < A_1\, e^{\varepsilon_1 t}, \qquad\qquad (13) \qquad \mathfrak{L}^{-1}\psi(a, b, r, s) < A_2\, e^{\varepsilon_2 t},$$

$$(14) \qquad \mathfrak{L}^{-1}\chi(a, b, r, s) < A_3\, e^{\varepsilon_3 t},$$

con ε_1, ε_2, ε_3 costanti positive, comunque fissate.

È possibile quindi scrivere ([**2**], pag. 243)

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\ \varphi(a, r, s)\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \exp \frac{-u^2}{4t} \cdot [\mathfrak{L}^{-1}\varphi(a, r, s)]_{t=u}\, du,$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\ \psi(a, b, r, s)\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \exp \frac{-u^2}{4t} \cdot [\mathfrak{L}^{-1}\psi(a, b, r, s)]_{t=u}\, du;$$

e quindi, ponendo per brevità,

$$F(a,\ r,\ t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\ \varphi(a,\ r,\ s)\right], \qquad V(a,\ b,\ r,\ t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\ \psi\,(a,\ b,\ r,\ s)\right],$$

$$Z(a,\ b,\ r,\ t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\ \chi(a,\ b,\ r,\ s)\right],$$

ed invertendo la (2) e la (3) mediante il teorema di BOREL ([**6**], pag. 224; [**7**], pag. 33) si ottengono le soluzioni dei sistemi ($\mathfrak{A}'$) e ($\mathfrak{B}'$) sotto la forma di prodotto integrale:

$$U^{(1)} = k_1^{-1}\,(C_1T - G) * F(a,\ r,\ t), \tag{15}$$

$$U^{(2)} = k'^{-1}\,(C_2T - G) * V(a,\ b,\ r,\ t) - k_2^{-1}\ F_0\ Z(a,\ b,\ r,\ t), \tag{16}$$

o, ciò che è lo stesso, nella forma:

$$U^{(1)} = \int_0^t \left\{ \frac{C_1T(\tau) - G(\Phi(a,\ \tau))}{k_1\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_0^{+\infty} \exp\frac{-u^2}{4(t-\tau)}\cdot[\mathfrak{L}^{-1}\varphi(a,\ r,\ s)]_{t=u}\, \mathrm{d}u \right\} \mathrm{d}\tau\,, \tag{17}$$

$$U^{(2)} = \int_0^t \left\{ \frac{C_2T(\tau) - G(\Phi(a,\ \tau))}{k'\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_0^{+\infty} \exp\frac{-u^2}{4(t-\tau)}\cdot[\mathfrak{L}^{-1}\psi(a,\ b,\ r,\ s)]_{t=u}\, \mathrm{d}u \right\} \mathrm{d}\tau - \tag{18}$$

$$- k_2^{-2}\ F_0\ Z(a,\ b,\ r,\ t)\,.$$

Le (17) e (18) dànno la legge di distribuzione delle temperature in S_i in funzione del salto termico Φ.

4. - Relazione per il salto termico Φ.

Dalle (15) e (16), calcolando rispettivamente $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$ in punti P_1 di S_1 e P_2 di S_2 dello stesso raggio e simmetrici rispetto alla superficie $r = a$, si ha

$$U^{(2)} - U^{(1)} = k'^{-1}\,(C_2T - G) * V(a,\ b,\ r,\ t) - k_1^{-1}\,(C_1T - G) * F(a,\ r,\ t) - \tag{19}$$

$$- k_2^{-1}\ F_0\ Z(a,\ b,\ r,\ t)\,.$$

Poichè, per ipotesi, le $U^{(i)}$ sono continue rispetto ad r e la G è indipendente da r, passando al limite in entrambi i membri della (19) per $r \to a$ si ottiene:

$$\Phi = k'^{-1}(C_2T - G) * \lim_{r\to a} V(a, b, r, t) -$$
$$- k_1^{-1}(C_1T - G) * \lim_{r\to a} F(a, b, r, t) - k_2^{-1} \lim_{r\to a} Z(a, b, r, t).$$

D'altra parte, risultando le funzioni $F(a, r, t)$, $V(a, b, r, t)$, $Z(a, b, r, t)$ continue rispetto ad r $(t \geqslant 0)$, si ha:

$$\lim_{r\to a} F(a, r, t) = \lim_{r\to a} \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\varphi(a, r, s)\right] = F(a, a, t),$$

$$\lim_{r\to a} V(a, b, r, t) = \lim_{r\to a} \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\psi(a, b, r, s)\right] = V(a, b, a, t),$$

$$\lim_{r\to a} Z(a, b, r, t) = \lim_{r\to a} \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\chi(a, b, r, s)\right] = Z(a, b, a, t).$$

Ricordando le (17) e (18) si ha per il salto termico Φ la seguente espressione:

$$\Phi = \int_0^t \frac{C_2\, T(\tau) - G\Phi(a, \tau))}{k'\sqrt{\pi(t-\tau)}} h(a, b, t-\tau)\, d\tau - \tag{20}$$
$$- \int_0^t \frac{C_1 T(\tau) - G(\Phi\,(a, \tau))}{k_1\sqrt{\pi(t-\tau)}} g(a, t-\tau)\, d\tau - k_2^{-1} F_0\, Z(a, b, a, t),$$

con

$$h(a, b, t) = \int_0^{+\infty} \exp\frac{-u^2}{4(t-\tau)} \cdot [\mathfrak{L}^{-1}\psi(a, b, s)]_{t=u}\, du, \tag{21}$$

$$g(a, t) = \int_0^{+\infty} \exp\frac{-u^2}{4(t-\tau)} \cdot [\mathfrak{L}^{-1}\varphi(a, s)]_{t=u}\, du. \tag{22}$$

Posto

$$\mu(a, b, t) = \int_0^t \frac{T(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \varrho(a, b, t-\tau)\, d\tau - k_2^{-1} F_0\, Z(a, b, a, t), \tag{23}$$

con

$$\varrho(a,\ b,\ t-\tau) = \{C_2\, k_1\, h(a,\ b,\ t-\tau) - C_1\, k'\, g(a,\ t-\tau)\}/(k_1\, k'),$$

la (20) si può scrivere

$$\Phi = \mu(a,\ b,\ t) + \int_0^t \frac{G(\Phi(a,\ \tau))}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\, \sigma(a,\ b,\ t-\tau)\ d\tau, \tag{24}$$

con

$$\sigma(a,\ b,\ t-\tau) = \{k'\, g(a,\ t-\tau) - k_1\, h(a,\ b,\ t-\tau)\}/(k_1\, k')\ .$$

La (24) è quindi, nella funzione incognita Φ, un'equazione integrale, singolare, non lineare, di VOLTERRA di seconda specie, come facilmente si constata, risultando la $\varrho(a,\ b,\ t-\tau)$, e quindi la $\sigma(a,\ b,\ t-\tau)$, insieme a G, funzioni limitate per ogni t finito.

Come in [**1**] si dimostra che la condizione (24) è anche sufficiente per la risoluzione del nostro problema.

Bibliografia.

1. M. A. BARATTA, *Sopra un problema di ripartizione del calore*, Rivista Mat. Univ. Parma **5**, 363-371 (1954).

2. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon, Oxford 1948.

3. F. E. RELTON, *Applied Bessel functions*, Blackie and Son, London 1946.

4. G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Trasformation*, Dover Publication, New York 1943.

5. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Operational methods in applied Mathematics*, Clarendon, Oxford 1949.

6. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte II, Zanichelli, Bologna 1941.

7. A. GHIZZETTI, *Calcolo simbolico*, Zanichelli, Bologna 1943.

8. V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, Gauthier-Villars, Paris 1913.