Rivista Mat. Univ. Parma 6, 363-374 (1955)

BIANCA MANFREDI (*)

Calcolo numerico della temperatura in uno strato piano, con date condizioni al contorno variabili col tempo. (**)

1. - Introduzione.

In un recente lavoro [**6**] (1) ho rilevato l'efficacia del metodo che approssima le soluzioni di problemi differenziali con soluzioni di sistemi alle differenze; precisamente ho osservato che tale metodo è efficace solo se le soluzioni per esso ottenute sono *convergenti, stabili e di facile calcolo numerico.* A questo scopo ho provato in [**6**] che la soluzione alle differenze del problema generale di flusso lineare di calore si riconduce alla soluzione alle differenze del particolare problema di flusso lineare di calore nel quale è costante la temperatura sul contorno (*l'analogo del Teorema di Duhamel*). Così la soluzione approssimata del generale problema della sbarra semiinfinita è esprimibile in una forma numerica facilmente calcolabile.

Ci è parso interessante completare lo studio precedente trattando in questa Comunicazione il caso della sbarra finita, che può molto spesso servire, più della sbarra semiinfinita, come schema per interessanti problemi pratici. Alcune opportune osservazioni ci hanno poi permesso di semplificare ulteriormente le formule già ottenute per la sbarra semiinfinita. Infine due esempi numerici relativi a due casi particolari che interessano la tecnica, mostrano quanto il calcolo alle differenze sia più semplice di quello differenziale e pertanto ne rilevano l'utilità.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Comunicazione tenuta al 5° Congresso della « Unione Matematica Italiana » (Pavia-Torino, 6-12 ottobre 1955).

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia al termine del lavoro.

2. – Il problema differenziale e il problema alle differenze.

2.1. – Il problema differenziale. Un mezzo omogeneo e termicamente isotropo, di conduttività costante, riempia uno strato spaziale A' limitato da due piani paralleli π_0 e π_1. Come in [**6**] supporremo le condizioni iniziali e al contorno tali che le superficie isoterme risultino piani paralleli a π_0 e π_1, e, quindi, le linee di flusso rette parallele. Così anche se A' è esteso a più dimensioni, la temperatura incognita può farsi dipendere dal posto tramite una sola coordinata locale, ad esempio la distanza da un piano fisso parallelo a π_0 e π_1. Pertanto supporremo: la temperatura iniziale di A' nulla; la temperatura dei punti del piano π_0 variabile col tempo e rappresentata dalla funzione continua $\varphi(t)$; la temperatura dei punti del piano π_1 nulla in ogni istante (²).

Ogni problema di questo tipo (*problema di flusso lineare di calore*) trova un'immagine in quello della determinazione della temperatura in una sbarra L_0L_1 omogenea, di spessore trascurabile e di lunghezza finita, che abbia la superficie laterale termicamente isolata, l'estremo L_0 a temperatura variabile $\varphi(t)$ e l'estremo L_1 a temperatura nulla.

Ci è parso conveniente rendere preventivamente adimensionali tutte le equazioni del problema e supporre, senza perdere in generalità, unitarie la conduttività e la lunghezza della sbarra, insieme all'intervallo di tempo complessivo che viene considerato nel problema.

Ciò posto, abbiamo fissato il sistema di assi cartesiani ortogonali x, t in guisa che il quadrato $Q \equiv (0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1)$ risulti il campo di definizione della funzione incognita $u(x, t)$ che dà la temperatura di un punto P (di ascissa x) di A' all'istante t.

Il problema di determinare $u(x, t)$ si traduce allora analiticamente nel seguente sistema alle derivate parziali:

$$(\mathrm{u})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{per } (x,\ t) \text{ interno a } Q; \\[2mm] u = 0 & \text{per } 0 < x < 1, \quad t = 0; \\[2mm] u = 0 & \text{per } x = 1, \quad 0 \leqslant t < 1; \\[2mm] u = \varphi(t) & \text{per } x = 0, \quad 0 \leqslant t < 1. \end{cases}$$

(²) Osserviamo che in A' ci si può sempre ricondurre al caso sopra considerato.

E il Teorema di DUHAMEL, com'è noto, ci dà $u = u(x, t)$ quando si conosca la soluzione $v = v(x, t)$ del *sistema* (v) *associato al sistema* (u), ottenuto da (u) facendo semplicemente $\varphi(t) \equiv 1$.

2.2. - Il problema alle differenze. Come in [**6**] consideriamo nel quadrato Q il reticolo di $M \cdot N$ maglie rettangolari uguali i cui lati hanno rispettivamente le lunghezze

$$h = 1/M, \qquad l = 1/N \qquad \text{(numeri razionali)} \tag{1}$$

e i cui vertici sono i punti

$$(x, t) = (mh, nl) = (m/M, n/N) \quad (m = 0, 1, ..., M; \quad n = 0, 1, ..., N) \tag{2}$$

a coordinate razionali. Per semplicità scriveremo anche

$$(mh, nl) = [m, n] \tag{3}$$

e conseguentemente, ad esempio, $u(mh, nl) = u[m, n]$, $\varphi(nl) = \varphi[n]$.

Anche qui nella totalità di tutti i reticoli di Q ci restringiamo a considerare quelli per i quali sia costante il rapporto

$$l/h^2 = M^2/N = \chi \tag{4}$$

(essendo $\chi = M_0^2/N_0$, con M_0 e N_0 interi prefissati) ed indichiamo con $Q_\chi^{(M)}$ l'insieme dei vertici del reticolo corrispondente al χ fissato e al valore di M. Allora, preso in Q un qualunque punto razionale $P \equiv (r'/r, s'/s)$, l'insieme $Q_\chi^{(M)}$ contiene P quando sia $M = k\mu$ con k intero positivo, del resto arbitrario, e μ minimo comune multiplo di r, s, M_0^2. Inoltre per $k = 1, 2, ...$ si ottiene una successione di insiemi che contengono P e che ammettono come insieme limite l'insieme Q^* dei punti razionali di Q ([**6**], pag. 145).

Se poniamo

$$\begin{aligned} &u[m, n] - u[m, n-1] = u_n[m, n] = u_n \\ &u[m-1, n-1] - 2u[m, n-1] + u[m+1, n-1] = u_{m,\overline{m}}[m, n] = u_{m,\overline{m}}, \end{aligned} \tag{5}$$

il sistema (u) precedente si trasforma nel seguente sistema alle differenze

$$[\mathrm{u}] \qquad \begin{cases} u_n = \chi\, u_{m,\overline{m}} & \text{per} \quad [m,\ n] \text{ interno a } Q_\chi^{(M)}; \\ u = 0 & \text{per} \quad 0 < m \leqslant M, \quad n = 0; \\ u = 0 & \text{per} \quad m = M, \quad 0 \leqslant n < N; \\ u = \varphi[n] & \text{per} \quad m = 0, \quad 0 \leqslant n < N. \end{cases}$$

Manifestamente *il sistema associato* [v] si ottiene facendo $\varphi[n] \equiv 1$ in [u]. Se indichiamo con $u^{(M)} = u^{(M)}[m,\ n]$, $v^{(M)} = v^{(M)}[m,\ n]$ le soluzioni di [u] e [v], è noto ([**6**], pag. 147) che si può dedurre *passo-passo* $u^{(M)}$ da $v^{(M)}$ mediante l'analogo del Teorema di Duhamel che per comodità qui riportiamo:

La soluzione $u^{(M)}$ si esprime mediante $v^{(M)}$ nel modo seguente:

$$(6) \qquad u^{(M)}[m,\ n] = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi[\nu]\{v^{(M)}[m,\ n-\nu] - v^{(M)}[m,\ n-\nu-1]\},$$

ove si ponga $v^{(M)}[m,\ -1] = 0$. *Inoltre:* 1°) *le due successioni* $u^{(M)}$, $v^{(M)}$ ($M = k\mu$; $k = 1,\ 2,\ \ldots$) *sono insieme uniformementi convergenti in modo asintotico ad u e v in* Q^*; 2°) *le funzioni* $u^{(M)}$, $v^{(M)}$ *sono insieme stabili.*

Osserviamo subito che da [v] risulta

$$(7) \qquad v^{(M)}[m,\ n-\nu] = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad \nu > n-m, \quad m > 0; \\ \chi^m & \text{per} \quad \nu = n-m, \quad m > 0; \end{cases}$$

$$(8) \qquad v^{(M)}[m,\ n-\nu-1] = 0 \qquad \text{per} \quad \nu \geqslant n-m, \quad m > 0.$$

Si può allora mettere la (6) *nella seguente forma ridotta*

$$(9) \quad u^{(M)}[m,\ n] = \varphi[n-m]\,\chi^m + \sum_{\nu=0}^{n-m-1} \varphi[\nu]\{v^{(M)}[m,\ n-\nu] - v^{(M)}[m,\ n-\nu-1]\}\ (^3).$$

Da (6), o da (9), discende manifestamente la necessità di avere un'espressione di $v^{(M)}[m,\ n] = v^{(M)}(x,\ t)$ *uniformemente convergente in modo asintotico in* Q^* *a* $v(x,\ t)$, *stabile ed agevole per il calcolo pratico.* In seguito chiameremo pertanto $v^{(M)}$ *soluzione base* del nostro problema.

---

(3) È evidente che tale riduzione si mantiene valida anche per il problema della sbarra semiinfinita [**6**].

3. – Espressioni della soluzione base $v^{(M)}$.

3.1. – **Espressioni analitiche di** $v^{(M)}$. Tali espressioni con qualche lieve modifica per seguire le nostre notazioni, sono state date dalla FOWLER ([**2**], pag. 368) e sono le seguenti:

$$v^{(M)}[m, n] = 1 - \frac{m}{M} - \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda} \left(1 - 2\chi + 2\chi \cos \frac{\lambda\pi}{M}\right)^n \frac{\operatorname{sen}(\lambda\pi m/M)}{\lambda}, \tag{10}$$

$$v^{(M)}[m, n] = 1 - \frac{m}{M} - \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, b_\lambda(M) \left(1 - 2\chi + 2\chi \cos \frac{\lambda\pi}{M}\right)^n \operatorname{sen}\left(\lambda\pi \frac{m}{M}\right) \tag{11}$$

con

$$b_\lambda(M) = \frac{\operatorname{sen}(\lambda\pi/M)}{M \cdot [1 - \cos(\lambda\pi/M)]}. \tag{12}$$

La convergenza della serie $S_{m,n}$ *a secondo membro di* (10) si può vedere, ad esempio, nel modo seguente. Risulta subito $S_{0,n} = 0$ qualunque sia n. È poi

$$S_{m,0} = \sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda} \frac{\operatorname{sen}(\lambda\pi m/M)}{\lambda} \qquad (m \leqslant M)$$

e tale serie è uniformemente convergente per ogni valore di m/M ([**7**], pag. 44). La serie

$$S_{m,1} = \sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda} \; [1 - 2\chi + 2\chi \cos(\lambda\pi/M)] \frac{\operatorname{sen}(\lambda\pi m/M)}{\lambda}$$

si spezza, a meno di fattori costanti, nella serie $S_{m,0}$ e nella serie

$$\sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda} \frac{\cos(\lambda\pi/M) \cdot \operatorname{sen}(\lambda\pi m/M)}{\lambda}.$$

Per quest'ultima si ha

$$\sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda} \frac{\cos(\lambda\pi/M) \cdot \operatorname{sen}(\lambda\pi m/M)}{\lambda} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda} \left\{ \frac{\operatorname{sen}[\lambda\pi(m+1)/M]}{\lambda} + \frac{\operatorname{sen}[\lambda\pi(m-1)/M]}{\lambda} \right\},$$

da cui discende l'uniforme convergenza per ogni valore di m/M della serie a primo membro. In modo analogo si ragiona pr $S_{m,2}$, $S_{m,3}$, ...

3.2. – Uniforme convergenza in modo asintotico, in Q^*, della successione $v^{(M)}(x, t)$ $(M = k\mu;\ k = 1, 2, \ldots)$ ***a*** $v(x, t)$. Consideriamo $v^{(M)}$ nella forma (11), che per le (2) e (3) si può scrivere nel modo seguente:

$$(11') \qquad v^{(M)}(x, t) = 1 - x - \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\ b_{\lambda}\cdot[1 - 2\chi + 2\chi\cos(\lambda\pi/M)]^{M^2t/\chi}\ \mathrm{sen}\,(\lambda\pi x),$$

dove per $b_{\lambda} = b_{\lambda}(M)$, dato da (12), si ha

$$(13) \qquad \lim_{M\to\infty} b_{\lambda}(M) = \lim_{M\to\infty}\frac{\mathrm{sen}\,(\lambda\pi/M)}{M\cdot[1 - \cos(\lambda\pi/M)]} =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left\{\frac{2}{\lambda\pi}\ \frac{\mathrm{sen}\,(\lambda\pi/M)}{\lambda\pi/M}\ \frac{[\lambda\pi/(2M)]^2}{\mathrm{sen}^2\,[\lambda\pi/(2M)]}\right\} = \frac{2}{\lambda\pi}\,.$$

Com'è noto ([**1**], pag. 82) si ha invece

$$(14) \qquad v(x, t) = 1 - x - \sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda}\ \frac{2}{\lambda\pi}\ e^{-\lambda^2\pi^2 t}\ \mathrm{sen}\,(\lambda\pi x).$$

Si può provare che vale il seguente

Teorema. *La successione* $v^{(M)}(x, t)$ $(M = k\mu;\ k = 1, 2 \ldots)$ *è uniformemente convergente in modo asintotico, in* Q^*, *a* $v(x, t)$ *certamente se è*

$$(15) \qquad 0 < \chi \leqslant 1/2.$$

Vale a dire, per ogni χ detto, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ esiste un intero k_{ε} tale che sia

$$(16) \qquad |\,v(x, t) - v^{(M)}(x, t)\,| < \varepsilon \qquad (M = k\mu)$$

per ogni $k > k_{\varepsilon}$ e per ogni (x, t) interno a $Q_{\chi}^{(M)}$ ([**6**], pag. 147).

Dimostrazione. Poniamo

$$(17) \quad a_{\lambda} = 2/(\lambda\pi),\ s_{\lambda} = \mathrm{sen}\,(\lambda\pi x),\ A_{\lambda} = e^{-\lambda^2\pi^2 t},\ B_{\lambda} = [1 - 2\chi + 2\chi\cos(\lambda\pi/M)]^{M^2t/\chi}.$$

Osserviamo subito che si ha

$$(18) \qquad v(x, t) - v^{(M)}(x, t) = \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\ b_{\lambda}B_{\lambda}s_{\lambda} - \sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda}\ a_{\lambda}A_{\lambda}s_{\lambda}\,.$$

Qui la prima somma del secondo membro si può trasformare come segue:

$$\sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, b_\lambda B_\lambda s_\lambda = \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, (b_\lambda - a_\lambda)(B_\lambda - A_\lambda)s_\lambda + \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, a_\lambda B_\lambda s_\lambda + \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, (b_\lambda - a_\lambda)A_\lambda s_\lambda =$$

$$= \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, (b_\lambda - a_\lambda)(B_\lambda - A_\lambda)s_\lambda + \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, a_\lambda \cdot (B_\lambda - A_\lambda)s_\lambda + \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, a_\lambda A_\lambda s_\lambda + \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, (b_\lambda - a_\lambda)A_\lambda s_\lambda .$$

Sostituendo nella (18) e passando ai moduli, si ha

$$(19) \qquad | v(x,t) - v^{(M)}(x,t) | \leqslant \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, | b_\lambda - a_\lambda | \, | B_\lambda - A_\lambda | \, | s_\lambda | +$$

$$+ \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, a_\lambda | B_\lambda - A_\lambda | \, | s_\lambda | + \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, A_\lambda | b_\lambda - a_\lambda | \, | s_\lambda | + \sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda}\, a_\lambda A_\lambda | s_\lambda | .$$

Faccio ora le seguenti osservazioni:

1°) In virtù di (13), preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ esiste un $M_1(\varepsilon)$ tale che sia $| b_\lambda - a_\lambda | < \varepsilon$ per $M > M_1(\varepsilon)$.

2°) In base a un lemma di LEUTERT ([**5**], pag. 248), per χ verificante (15), $1 \leqslant \lambda \leqslant [M/3]$ (4), $0 < t_0 \leqslant t < 1$, esiste un $M'(\varepsilon)$ tale che sia $| B_\lambda - A_\lambda | < \varepsilon/M$ per $M > M'(\varepsilon)$. D'altra parte quando χ verifica (15), $[M/3] < \lambda < M$, $0 < t_0 \leqslant t < 1$, si ha:

$$| B_\lambda | \leqslant \varrho^{M^2 t/\chi} \quad (\varrho < 1), \qquad A_\lambda < e^{-\lambda^2\pi^2 t_0} < e^{-M^2\pi^2 t_0/9},$$

e quindi anche in questo caso esiste un $M''(\varepsilon)$ tale che sia

$$| B_\lambda - A_\lambda | < \varrho^{M^2 t/\chi} + e^{-M^2\pi^2 t_0/9} < \varepsilon/M \qquad \text{per } M > M''(\varepsilon).$$

Ne segue che detto $M_2(\varepsilon)$ il massimo fra $M'(\varepsilon)$ e $M''(\varepsilon)$ è $| B_\lambda - A_\lambda | < \varepsilon/M$ per $M > M_2(\varepsilon)$ quando χ verifica (15), $1 \leqslant \lambda \leqslant M - 1$, $0 < t_0 \leqslant t < 1$.

3°) Se è $0 < t_0 \leqslant t < 1$ si ha evidentemente

$$\sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, A_\lambda = \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, e^{-\lambda^2\pi^2 t} < \sum_{1}^{M-1}{}_{\lambda}\, e^{-\lambda\pi^2 t} < 1/(1 - e^{-\pi^2 t_0}).$$

---

(4) Con $[M/3]$ s'indica la parte intera di $M/3$.

Inoltre dall'uniforme convergenza della serie $\sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda}\, e^{-\lambda^2\pi t}\,\frac{\operatorname{sen}|\lambda\pi x|}{\lambda}$ segue l'esistenza di un $M_3(\varepsilon)$ tale che sia $\sum_{M}^{+\infty}{}_{\lambda}\, a_\lambda A_\lambda\,|s_\lambda| < \varepsilon$ per $M > M_3(\varepsilon)$.

Da queste osservazioni discende l'esistenza di un $M_0(\varepsilon)$ tale che sia, in virtù di (19),

$$|\,v(x,\ t) - v^{(M)}(x,\ t)\,| < \varepsilon^2 + \varepsilon + \varepsilon/(1 - e^{-\pi^2 t_0}) + \varepsilon$$

per $M > M_0(\varepsilon)$, $0 < x < 1$, $0 < t_0 \leqslant t < 1$, equivalente alla (16) da dimostrare.

3.3. – Stabilità di $v^{(M)}$. Per ogni χ soddisfacente la (15) tale stabilità è senz'altro assicurata dal criterio di HILDEBRAND ([**4**], pag. 337).

3.4. – I polinomi $P_r(n)$ della Fowler. Per ottenere un'espressione di $v^{(M)}$ agevole per il calcolo pratico, introduciamo, come in [**6**], i polinomi $P_r(n)$, considerati dalla FOWLER ([**2**], pag. 375), dati dai *coefficienti di z^r nello sviluppo di $(1 + az + z^2)^n$ secondo le potenze di z.*

Risulta subito

$$\begin{array}{llll} P_0(n) = 1, & P_1(n) = an & \text{per} & n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots, \\ & P_r(0) = 0 & \text{per} & r = 1,\ 2,\ \dots, \\ & P_r(1) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad r = 2, \\ 0 & \text{per} \quad r = 3,\ 4,\ \dots . \end{cases} \end{array}$$

Associando a queste affermazioni le due relazioni ricorrenti ([**2**], pag. 375)

$$P_r(n) = P_r(n-1) + a\ P_{r-1}(n-1) + P_{r-2}(n-1), \qquad P_{n+r}(n) = P_{n-r}(n), \tag{20}$$

si ha un mezzo per calcolare *immediatamente* tutti i polinomi $P_r(n)$.

Per il seguito è utile tener presenti le seguenti formule ([**2**], pag. 376):

$$(a + 2\ \cos\Phi)^n = \sum_{-n}^{n}{}_r\, P_{n+r}(n)\cdot\cos(r\,\Phi), \tag{21}$$

$$(a + 2\ \cos\Phi)^n \operatorname{sen}(m\Phi) = \sum_{-n}^{n}{}_r\, P_{n+r}(n)\cdot\operatorname{sen}[(r+m)\Phi]\,. \tag{22}$$

3.5. — Espressione polinomiale di $v^{(M)}$. L'espressione (10) di $v^{(M)}$, ponendo $a = 1/\chi - 2$ e tenendo presente la (21), diventa:

$$v^{(M)}[m, n] = 1 - \frac{m}{M} - \frac{2\chi^n}{\pi} \sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda} \left\{ \sum_{-n}^{n}{}_{r} P_{n+r}(n) \cdot \cos\left(r \frac{\lambda\pi}{M}\right) \right\} \frac{\operatorname{sen}(\lambda\pi m/M)}{\lambda}. \tag{23}$$

Per il n. **3.1** e per la (22) si ha

$$v^{(M)}[m, n] = 1 - \frac{m}{M} - \frac{2\chi^n}{\pi} \sum_{-n}^{n}{}_{r} P_{n+r}(n) \sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda} \frac{\operatorname{sen}[\lambda\pi(r+m)/M]}{\lambda}. \tag{24}$$

Posto

$$\theta_{m+r} = \begin{cases} -1 & \text{per} \quad m + r < 0, \\ 0 & \text{per} \quad m + r = 0, \\ 1 & \text{per} \quad m + r > 0, \end{cases}$$

e detto $\alpha = \alpha(r, m)$ il numero dell'intervallo $(0, 2\pi)$ congruo a $\left|\frac{r+m}{M}\pi\right|$ secondo il modulo 2π, la (24) diventa

$$v^{(M)}[m, n] = 1 - \frac{m}{M} - \frac{2\chi^n}{\pi} \sum_{-n}^{n}{}_{r} \theta_{m+r} \cdot P_{n+r}(n) \sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda} \frac{\operatorname{sen}(\lambda\alpha)}{\lambda},$$

od anche infine ([**7**], pag. 70)

$$v^{(M)}[m, n] = 1 - \frac{m}{M} - \frac{\chi^n}{\pi} \sum_{-n}^{n}{}_{r} \theta_{m+r} \cdot (\pi - \alpha) \cdot P_{n+r}(n), \tag{25}$$

dove risulta facile il calcolo del secondo membro essendo facile, come si è visto, il calcolo dei polinomi $P_r(n)$. Si vede agevolmente ([5]) che il secondo membro

---

([5]) Basta ricordare la seconda di (20) e la proprietà seguente ([**2**], pag. 375):

$$\sum_{-n}^{n}{}_{r} P_{n+r}(n) = (a+2)^n = \chi^n.$$

di (25) si annulla per $m > n \geqslant 0$, mentre assume il valore χ^m per $m = n$ [cfr. la (7) del n. **2.2**]; infine per $m < n$ si ha (6)

$$(26) \qquad v^{(M)}[m,\ n] = 1 - \frac{m}{M} - \chi^n \left\{ \sum_{-(m-1)}^{m}{}_r \left[1 - \frac{r+m}{M} \right] P_{n+r}(n) - \frac{2m}{M} \sum_{m+1}^{n}{}_r P_{n+r}(n) \right\}.$$

4. – Espressioni della soluzione generale. Valutazione numerica in due casi particolari.

4.1. – **Espressioni di** $u^{(M)}$. Tali espressioni si ottengono facilmente, una volta assegnato lo spettro di valori $\varphi[n]$, sostituendo nella (6) [o nella (9)] le espressioni di $v^{(M)}$ date da (11) e (25) [o meglio, nel caso di $m = n$ dalla seconda di (7), nel caso di $m < n$ da (26)].

In questo sta appunto l'importanza della formula (6).

4.2. – **Primo caso:** $\varphi(t) \equiv t$. Calcoliamo, per esempio, $u(1/4,\ 1/16)$. Preso $\chi = 1/4$ e quindi $M = 4$ si ha: $m = 1$, $n = 4$, $\varphi(t) \equiv \varphi[n] = (1/64)n$.

Dalla (9) discende

$$u^{(4)}[1,\ 4] = 3/256 + (1/64) \sum_{\nu=1}^{2} \nu \left\{ v^{(4)}[1,\ 4-\nu] - v^{(4)}[1,\ 3-\nu] \right\},$$

cioè

$$(27) \qquad u^{(4)}[1,\ 4] = 3/256 + (1/64) \left\{ v^{(4)}[1,\ 3] + v^{(4)}[1,\ 2] - 2v^{(4)}[1,\ 1] \right\}.$$

Ora per la seconda di (7) è $v^{(4)}[1,\ 1] = 1/4$; da (26) si ha

$$v^{(4)}[1,\ 2] = 1 - 1/4 - (1/4)^2 \left\{ \sum_{0}^{1}{}_r [1 - (r+1)/4] P_{2+r}(2) - (1/2) P_4(2) \right\},$$

---

(6) Analogamente per la sbarra semiinfinita la $v^{(M)}[m,\ n]$ data dalla (17) di [**6**] per $m > n \geqslant 0$ si annulla; per $m = n$ assume il valore χ^m; per $m < n$ si riduce a

$$v^{(M)}[m,\ n] = 1 - \chi^n \left\{ P_{n+m}(n) + \sum_{-(m-1)}^{m-1}{}_r P_{n+r}(n) \right\}.$$

e quindi $v^{(4)}[1,\ 2] = 3/8$. Così si ha:

$$v^{(4)}[1,\ 3] = 3/4 - (1/4)^3 \Big\{ \sum_{0}^{1}{}_r [1 - (r+1)/4] P_{3+r}(3) - (1/2) \sum_{2}^{3}{}_r P_{3+r}(3) \Big\} = 29/64.$$

Sostituendo nella (27) si ottiene

$$u^{(4)}[1,\ 4] = 0{,}01684 \ldots . \tag{28}$$

La soluzione $u(1/4,\ 1/16)$ del problema differenziale è invece data da ([**1**], pag. 86)

$$u(1/4,\ 1/16) = 2\pi \sum_{1}^{+\infty}{}_\lambda \lambda e^{-\lambda^2\pi^2/16} \operatorname{sen}(\lambda\pi/4) \cdot \int_0^{1/16} e^{\lambda^2\pi^2\tau} \cdot \tau \, d\tau . \tag{29}$$

Di qui appare chiaro come il calcolo approssimato di $u(1/4,\ 1/16)$ mediante (29) sia più laborioso di quello alle differenze mediante (27). Eseguendo i calcoli in (29) si ha

$$u(1/4,\ 1/16) = \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{+\infty}{}_\lambda \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen} \frac{\lambda\pi}{4} \cdot \left\{ \frac{1}{16} - \frac{1}{\lambda^2\pi^2} (1 - e^{-\lambda^2\pi^2/16}) \right\} ;$$

e quindi si trova, arrestandoci per brevità ai primi due termini della serie,

$$u(1/4,\ 1/16) \cong 0{,}01901 \ldots ;$$

la (28) può così considerarsi una buona approssimazione per difetto di $u(1/4,\ 1/16)$.

4.3. – **Secondo caso:** $\varphi(t) = \operatorname{sen} t$. Con le stesse posizioni del n. **4.2** risulta qui $\varphi(t) = \varphi[n] = \operatorname{sen}(n/64)$, e da (9) si ha:

$$u^{(4)}[1,\ 4] = (1/4) \operatorname{sen}(3/64) + \sum_{\nu=1}^{2} \operatorname{sen}(\nu/64) \big\{ v^{(4)}[1,\ 4-\nu] - v^{(4)}[1,\ 3-\nu] \big\}, \tag{30}$$

dove $v[1,\ 1]$, $v[1,\ 2]$, $v[1,\ 3]$ sono già state calcolate nel n. **4·2**. Eseguendo i calcoli si trova $u^{(4)}[1,\ 4] \cong 0{,}01681 \ldots$.

La soluzione $u(1/4,\ 1/16)$ del problema differenziale è invece data da ([**1**], pag. 86)

$$u(1/4,\ 1/16) = 2\pi \sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda}\ \lambda\ e^{-\lambda^2\pi^2/16} \operatorname{sen}(\lambda\pi/4) \cdot \int_0^{1/16} e^{\lambda^2\pi^2\tau} \operatorname{sen}\tau\, d\tau$$

ed anche, calcolando l'integrale a secondo membro,

$$u(1/4,\ 1/16) = 2\pi \sum_{1}^{+\infty}{}_{\lambda} \frac{\lambda \operatorname{sen}(\lambda\pi/4)}{\lambda^4\pi^4 + 1} \{ \lambda^2\pi^2 \operatorname{sen}(1/16) - \cos(1/16) + e^{-\lambda^2\pi^2/16} \}, \tag{31}$$

e questa confrontata con (30) mostra ancora una volta quanto sia più agevole il calcolo alle differenze. A conti fatti, quando si considerino solo i primi due termini della serie che figura in (31), si ha

$$u(1/4,\ 1/16) \cong 0{,}022\ldots .$$

È evidente che se, tanto nel primo caso che nel secondo, si assume $M > 4$, il corrispondente $u^{(M)}$ è sempre più prossimo al valore esatto di u.

5. – Bibliografia.

1. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon, Oxford 1948.

2. C. M. FOWLER, *Analysis of numerical solutions of transient heat-flow problems*, Q. Appl. Math. **3**, 361-376 (1945).

3. F. B. HILDEBRAND, *On the convergence of numerical solutions of the heat-flow equation*, J. Math. and Phys. **31**, 35-41 (1952).

4. F. B. HILDEBRAND, *Methods of applied mathematics*, Prentice-Hall, New-York 1954.

5. W. LEUTERT, *On the convergence of unstable approximate solutions of the heat equation to the exact solution*, J. Math. and Phys. **30**, 245-251 (1952).

6. B. MANFREDI, *Soluzioni numeriche in problemi di flusso lineare di calore*, Rivista Mat. Univ. Parma **6**, 141-155 (1955).

7. L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Zanichelli, Bologna 1928.

8. P. WIJDENES, *Noordhoff's Wiskundige Tafels in 5 decimalen*, Noordhoff, Groningen-Holland 1953.