Rivista Mat. Univ. Parma 6, 353-361 (1955)

GIOVANNI RICCI (*)

Sull' insieme dei valori di condensazione del rapporto $(p_{n+1} - p_n)/\ln p_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \dots)$. (**)

1. – Introduzione.

Sia $\{ p_n \} \equiv (p_1, p_2, p_3, \dots)$ la successione crescente dei numeri primi e consideriamo la successione delle differenze $p_{n+1} - p_n$. I classici teoremi di P. TCHEBYCHEFF che confrontano l'andamento di p_n con quello di $n \cdot \ln n$ ci dicono che il valore medio di $p_{n+1} - p_n$ oscilla intorno a $\ln n$; anzi il teorema fondamentale $p_n \sim n \cdot \ln n$ (J. HADAMARD, CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN) ci dice che tale valore medio è $\ln n$ e si è stati indotti a studiare la successione dei rapporti

$$\varrho_n = (p_{n+1} - p_n)/\ln n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Si vede facilmente che $\liminf \varrho_n \leqq 1$ (1), e d'altronde è noto che $\limsup \varrho_n = + \infty$ (E. WESTZYNTHIUS **[10]**) (2).

(*) Professore ord. della Università di Milano, incaricato nella Università di Parma, Indirizzo: Istituto Matematico FEDERIGO ENRIQUES, Università, Milano, Italia.

(**) Comunicazione tenuta al 5° Congresso della « Unione Matematica Italiana » (Pavia-Torino, 6-12 ottobre 1955).

(1) Infatti se, per assurdo, esistesse $\eta > 0$ tale che $\varrho_n > 1 + \eta$ per $n \geqq n_0 = n_0(\eta)$ avremmo:

$$\begin{aligned} p_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (p_{k+1} - p_k) \geqq c(\eta) + \sum_{k=1}^{n-1} (1 + \eta) \cdot \ln p_k = c(\eta) + (1 + \eta) \sum_{k=1}^{n-1} \ln p_k \geqq \\ \geqq c(\eta) + (1 + \eta) \sum_{k=1}^{n-1} \ln (k + 1) = c(\eta) + (1 + \eta) \cdot \ln (n!) > \\ > c(\eta) + (1 + \eta)(n \cdot \ln n - n) > (1 + \eta/2)\, n \cdot \ln n \end{aligned}$$

per $n \geqq n_1(\eta)$, mentre è noto, secondo un classico teorema di P. TCHEBYSCHEFF, che esistono infiniti n' pei quali è $p_{n'} < (1 + \eta/2) n' \cdot \ln n'$.

(2) I numeri in neretto entro le parentesi [ ] si riferiscono alla Bibliografia collocata alla fine della presente Nota.

Denotiamo con X l'insieme dei valori limiti x della successione $\{\varrho_n\}$; le osservazioni precedenti ci dicono che $\operatorname{Inf} X \leqq 1$, $\operatorname{Sup} X = +\infty$ (3).

P. ERDÖS (1940, [2]) ha dimostrato che $\liminf \varrho_n < 1$, cioè che è $E = \operatorname{Inf} X < 1$; un calcolo di E condusse alla maggiorazione (R. A. RANKIN, 1947, [4]). Recentemente P. ERDÖS (1955, [3]) ha dimostrato il seguente teorema:

« L'insieme X dei valori x di accumulazione della successione $\{\varrho_n\}$ ha una misura positiva ».

Noi, riprendendo l'idea di P. ERDÖS, vogliamo studiare l'andamento di $\{\varrho_n\}$ con l'intenzione di considerare come trascurabili le successioni parziali di $\{\varrho_n\}$ che hanno densità nulla (4) allo scopo di entrare più vivamente nella struttura della successione $\{\varrho_n\}$ stessa; ci serviremo di alcuni risultati stabiliti in una nostra precedente Memoria [5] (vedasi anche [6], [7], [8] sullo stesso argomento) per giungere ad alcuni teoremi che sono più forti di quelli precedentemente ricordati.

2. – I valori di condensazione della successione $\{\varrho_n\}$.

Poichè la nozione di punto (o valore) di accumulazione non è invariante rispetto alla soppressione o all'aggiunta di successioni parziali di densità nulla, è necessario introdurre i concetti di « densità » e di « valore di condensazione » che risultino invarianti e che descrivano, in un certo senso, la legge secondo cui la successione $\{\varrho_n\}$ lascia cadere i suoi elementi nell'intorno del valore considerato.

Siano ξ, μ, λ numeri reali con $0 \leqq \mu < \lambda$, $\xi > 0$, e denotiamo con $\boldsymbol{A}(\xi;\, \mu,\, \lambda)$ l'insieme dei valori n pei quali

$$\boldsymbol{A}(\xi;\, \mu,\, \lambda) \equiv (\mu < \varrho_n \leqq \lambda,\ p_n \leqq \xi). \tag{2·1}$$

Ci interessano la funzione enumeratrice

$$D(\xi;\, \mu,\, \lambda) = \sum_{A(\xi;\, \mu,\, \lambda)} 1, \tag{2·2}$$

---

(3) Denotiamo con $\operatorname{Inf} X$ l'estremo inferiore e con $\operatorname{Sup} X$ l'estremo superiore di un qualunque insieme X di numeri reali.

(4) Si dice che la successione ϱ_{n_h} $(h = 1, 2, 3, \ldots)$, parziale di $\{\varrho_n\}$, ha *densità nulla* quando $h/n_h \to 0$ per $h \to +\infty$.

il suo rapporto a $\xi/\ln \xi$ (cioè al numero asintotico dei $p_n \leqq \xi$) e, ancora, il rapporto all'ampiezza $\lambda - \mu$ dell'intervallo (μ, λ); pertanto è significativa la funzione

$$(2 \cdot 3) \qquad \omega(\xi;\ \mu,\ \lambda) = \frac{D(\xi;\ \mu,\ \lambda)}{(\lambda - \mu) \cdot \xi / \ln \xi}$$

dei tre argomenti ξ, μ, λ.

Siamo naturalmente condotti, per ogni $u \geqq 0$, a considerare i seguenti limiti iterati:

$$\liminf_{h \to 0+} \ \liminf_{\xi \to +\infty} \omega\,(\xi;\ u,\ u+h), \qquad \liminf_{h \to 0+} \ \limsup_{\xi \to +\infty} \omega\,(\xi;\ u,\ u+h),$$

$$\limsup_{h \to 0+} \ \liminf_{\xi \to +\infty} \omega\,(\xi;\ u,\ u+h), \qquad \limsup_{h \to 0+} \ \limsup_{\xi \to +\infty} \omega\,(\xi;\ u,\ u+h),$$

i quali riguardano l'intorno a destra di u (analoghe considerazioni saranno valide per l'intorno a sinistra e per l'intorno completo). Per la definizione (2·3) di ω, che presenta al denominatore $\xi/\ln \xi$, è evidente che i limiti interni (per $\xi \to +\infty$) sono invarianti per soppressione in $\{\varrho_n\}$ di una qualunque successione parziale di densità nulla: infatti, essendo $\pi(\xi) \sim \xi/\ln \xi$, con tale soppressione si passerà da $D(\xi;\ \mu,\ \lambda)$ a

$$\widetilde{D}(\xi;\ \mu,\ \lambda) = D(\xi;\ \mu,\ \lambda) + o(\xi/\ln \xi).$$

Se uno di quei limiti iterati è positivo esso ci manifesta un certo addensamento dei valori $\{\varrho_n\}$ alla destra di u.

La diretta applicazione dei risultati della nostra precedente Memoria **[5]** ci conduce a considerare il secondo di quei limiti iterati e introdurremo la seguente

Definizione. Si dice che u è un *valore di condensazione a destra* della successione $\{\varrho_n\}$ quando è

$$L^+(u) = \liminf_{h \to 0+} \ \limsup_{\xi \to +\infty} \omega\,(\xi;\ u,\ u+h) > 0;$$

$L^+(u)$ si dirà *densità a destra* nel punto u.

I valori u di condensazione a destra sono caratterizzati dalla seguente proprietà: Si possono coordinare al numero u due altri numeri $\gamma > 0$, $h_0 > 0$ tali che sia

$$D(\xi_s;\ u,\ u+h) \geqq \gamma h \xi_s / \ln \xi_s$$

per ogni $h \leqq h_0$ e pei valori ξ_s di una successione $\{\xi_s\}$, $\xi_s \to +\infty$, che in generale dipenderà da h.

Il numero $L^+(u)$ è l'estremo superiore dei numeri γ possibili.

Denotiamo con U l'insieme dei numeri u pei quali $L^+(u) > 0$.

Si introducono anche le definizioni analoghe:

Definizione. Si dice che v è un *valore di condensazione a sinistra* della successione $\{\varrho_n\}$ quando è

$$L^-(v) = \liminf_{h\to 0+} \limsup_{\xi\to+\infty} \omega(\xi;\ v-h,\ v) > 0;$$

$L^-(v)$ si dirà *densità a sinistra* nel punto v.

Denotiamo con V l'insieme dei punti v pei quali è $L^-(v) > 0$.

Definizione. Si dice che w è un *valore di condensazione* della successione $\{\varrho_n\}$ quando è

$$L(w) = \liminf_{h\to 0+} \limsup_{\xi\to+\infty} \omega(\xi;\ w-h,\ w+h) > 0.$$

Denotiamo con W l'insieme dei punti w pei quali è $L(w) > 0$.

È evidente che, per ogni t, è $2L(t) \geqq L^+(t)$, $2L(t) \geqq L^-(t)$ e quindi $U \subset W$, $V \subset W$; inoltre ogni valore w è, a maggior ragione, un valore di accumulazione e pertanto

$$U \subset W \subset X, \qquad V \subset W \subset X.$$

3. – Alcune proprietà degli insiemi U, V, W.

Noi enunceremo le proprietà per l'insieme U; analoghe proprietà sussisteranno per l'insieme V e, a maggior ragione, per l'insieme W.

Poniamo

$$(3{\cdot}1) \qquad A = \operatorname{Inf} U, \qquad \Omega = \operatorname{Sup} U, \qquad (0 \leqq E \leqq A \leqq \Omega \leqq +\infty).$$

Sussistono i teoremi seguenti:

(I) $\qquad A < 1, \qquad \Omega - A > 0.$

(II) $\qquad A \leqq 1 - H/\mathfrak{C}, \qquad \Omega - A \geqq 2H/\mathfrak{C},$

$$H = \prod_{p\geqq 3}\left\{1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right\} = 0.6601\ldots \text{ (costante di Shah e Wilson)};$$

$\mathcal{C}$ è l'estremo inferiore dei numeri reali e positivi c tali che, per ogni intero positivo a e per ξ abbastanza grande, risulti soddisfatta la disuguaglianza (VIGGO BRUN)

$$\sum_{\substack{p_n \leqq \xi \\ p_{n+1}-p_n=2a}} 1 < c \cdot \Phi(2a) \cdot \xi / \ln^2 \xi,$$

essendo

$$\Phi(2a) = \prod_{3 \leqq p/a} \frac{p-1}{p-2}.$$

È noto che $\mathcal{C} \leqq 16H$ (I. V. ČULANOVSKIĬ [**1**], H. N. SHAPIRO - J. WARGA [**9**]) e quindi è

(II*) $$A \leqq 15/16, \qquad \Omega - A \geqq 1/8 .$$

Questi teoremi (I), (II) e (II*) rinforzano notevolmente il teorema $E < 1$ di P. ERDÖS; ma possiamo ricavare anche delle informazioni sulla misura dell'insieme U(5), e precisamente le seguenti:

(III) $$\mathrm{m}_i(U) > 0,$$

(IV) $$\mathrm{m}_i(U) \geqq 2H/\mathcal{C},$$

(IV*) $$\mathrm{m}_i(U) \geqq 1/8.$$

I teoremi (III) e (IV) sono immediata conseguenza del seguente:

(V) *Sia* U_η *l'insieme dei punti* u *pei quali la densità* $L^+(u) > \eta$ *(in particolare* $U_0 \equiv U$*); allora è*

$$\int_0^{\mathcal{C}/(2H)} \mathrm{m}_i(U_\eta)\, d\eta \geqq 1.$$

Questa proposizione ci informa sull'andamento della funzione $\mathrm{m}_i(U_\eta)$, monotona non crescente al crescere di η, mentre η varia da 0 a $\mathcal{C}/(2H)$. In particolare $\mathrm{m}_i(U_0) \cdot \mathcal{C}/(2H) \geqq 1$.

(5) Denotiamo con $\mathrm{m}(J)$ e $\mathrm{m}_i(J)$ la misura e la misura interna di un qualunque insieme J dell'asse reale.

Sussiste evidentemente come conseguenza il seguente teorema:

Sia $\varDelta = \operatorname*{Sup}_u L^+(u)$; *allora è*

$$\text{(VI)} \qquad \mathrm{m}_i(U) \geqq \operatorname{Max}\left(\frac{1}{\varDelta}, \frac{2H}{\mathcal{C}}\right),$$

$$\text{(VI*)} \qquad \mathrm{m}_i(U) \geqq \operatorname{Max}\left(\frac{1}{\varDelta}, \frac{1}{8}\right).$$

4. – Le funzioni $^*\varLambda(\mu,\ \lambda)$, $\varLambda^*(\mu,\ \lambda)$ della nostra Memoria precedente

Sia $0 \leqq \mu \leqq \lambda \leqq +\infty$, $\xi > 0$, e poniamo (vedasi [**5**], pp. 22-35):

$$\left.\begin{matrix} \liminf\limits_{\xi\to+\infty} \\ \limsup\limits_{\xi\to+\infty} \end{matrix}\right\} \frac{D(\xi;\ \mu,\ \lambda)}{\xi/\ln\xi} = \left\{\begin{matrix} ^*\varLambda(\mu,\ \lambda) \\ \varLambda^*(\mu,\ \lambda) \end{matrix}\right.$$

$$[0 \leqq {}^*\varLambda(\mu,\ \lambda) \leqq \varLambda^*(\mu,\ \lambda) \leqq 1].$$

Le due funzioni $^*\varLambda$ e $\varLambda^*$ hanno le seguenti proprietà:

1°) esse sono monotone non decrescenti quando si dilata l'intervallo $(\mu,\ \lambda)$ e prendono tutti i valori dell'intervallo (aperto) $(0,\ 1)$;

2°) esse sono continue e a rapporti incrementali limitati; precisamente, per $0 \leqq \mu' \leqq \mu < \lambda \leqq \lambda' < +\infty$, sono valevoli le disuguaglianze seguenti:

$$\left.\begin{matrix} ^*\varLambda(\mu,\ \lambda') - {}^*\varLambda(\mu,\ \lambda) \\ \varLambda^*(\mu,\ \lambda') - \varLambda^*(\mu,\ \lambda) \end{matrix}\right\} \leqq (\lambda' - \lambda)\cdot\mathcal{C}/(2H),$$

$$\left.\begin{matrix} ^*\varLambda(\mu,\ \lambda) - {}^*\varLambda(\mu',\ \lambda) \\ \varLambda^*(\mu,\ \lambda) - \varLambda^*(\mu',\ \lambda) \end{matrix}\right\} \geqq -(\mu - \mu')\cdot\mathcal{C}/(2H).$$

Facendo $\mu = 0$ si ottengono le due funzioni $^*\varLambda(0,\ \lambda)$, $\varLambda^*(0,\ \lambda)$ che dipendono dall'unica variabile λ e sono definite per $0 \leqq \lambda \leqq +\infty$, monotone non decrescenti, da 0 a 1, continue, a rapporto incrementale limitato e, quindi, assolutamente continue e quasi-ovunque derivabili; i loro numeri derivati sono limitati. Denotiamo con $(^*A,\ ^*\Omega)$ il massimo intervallo nel cui interno è $0 < {}^*\varLambda(0,\ \lambda) < 1$

(necessariamente $0 \leqq {}^*\Lambda < {}^*\Omega \leqq +\infty$) e sia (Λ^*, Ω^*) l'intervallo analogo per $\Lambda^*(0, \lambda)$. Allora è evidentemente

$$0 \leqq \Lambda^* \begin{cases} \leqq {}^*\Lambda < \\ < \Omega^* \leqq \end{cases} {}^*\Omega \leqq +\infty$$

e abbiamo dimostrato che è (vedasi [**5**], Teor. (D), p. 33)

$$0 \leqq \Lambda^* \leqq {}^*\Lambda \leqq 1 - H/\mathfrak{C}, \tag{4·1}$$

$$\Omega^* - \Lambda^* \geqq 2H/\mathfrak{C}, \qquad {}^*\Omega - {}^*\Lambda \geqq 2H/\mathfrak{C}\,. \tag{4·2}$$

Per le proprietà segnalate sopra delle due funzioni ${}^*\Lambda(0, t)$, $\Lambda^*(0, t)$ abbiamo

$$\begin{cases} 0 \leqq {}^*\Lambda'(0, t) \leqq 2H/\mathfrak{C}, \qquad {}^*\Lambda(0, \lambda) = \int\limits_{{}^*\Lambda}^{\lambda} {}^*\Lambda'(0, t)\, dt, \\ 0 \leqq \Lambda^{*\prime}(0, t) \leqq 2H/\mathfrak{C}, \qquad \Lambda^*(0, \lambda) = \int\limits_{\Lambda^*}^{\lambda} \Lambda^{*\prime}(0, t)\, dt \end{cases} \tag{4·3}$$

(dove con l'apice si sono indicate le derivate che esistono quasi ovunque o i numeri derivati superiori dove le derivate non esistono).

5. – Dimostrazione dei Teoremi (II) e (V).

Si vede facilmente che la densità a destra $L^+(t)$ verifica per ogni $t \geqq 0$ la disuguaglianza

$$L^+(t) \geqq \mathrm{Max}\,({}^*\Lambda'(0, t),\ \Lambda^{*\prime}(0, t)) \tag{5·1}$$

e che inoltre [vedasi le definizioni (3·1)]

$$\Lambda \leqq \Lambda^*, \qquad {}^*\Omega \leqq \Omega\,. \tag{5·2}$$

Infatti, la funzione

$$h \cdot \omega(\xi;\ t,\ t+h) = D(\xi;\ t,\ t+h)/(\xi/\ln \xi)$$

è quella che conduce alle funzioni $^*\Lambda$ e Λ^* e precisamente

(5·3) $$\limsup_{\xi\to+\infty}\{ h\cdot\omega(\xi;\ t,\ t+h)\} = \Lambda^*(t,\ t+h)$$

e quindi

(5·4) $$L^+(t) = \liminf_{h\to 0+}\{ \Lambda^*(t,\ t+h)/h\}.$$

Dalle disuguaglianze evidenti

$$\Lambda^*(t,\ t+h)\begin{cases}\geqq \Lambda^*(0,\ t+h) - \Lambda^*(0,\ t)\\ \geqq {}^*\Lambda(0,\ t+h) - {}^*\Lambda(0,\ t)\end{cases}$$

si deduce, tenendo conto di (5·4),

(5·5) $$L^+(t) \geqq {}^*\Lambda'(0,\ t), \qquad L^+(t) \geqq \Lambda^{*\prime}(0,\ t)$$

e vale la (5·1).

Se in un punto t è $L^+(t) = 0$ sono nulli necessariamente le derivate o i numeri derivati delle due funzioni $\Lambda^*(0,\ t)$, $^*\Lambda(0,\ t)$, dunque l'insieme U dei punti u tali che $L^+(u) > 0$ contiene la riunione dei due insiemi di punti t nei quali rispettivamente è $\Lambda^{*\prime}(0,\ t) > 0$, $^*\Lambda'(0,\ t) > 0$. Per la definizione di Λ^* e $^*\Omega$ (vedasi n. **4**) si deducono le (5·2).

Dunque i teoremi (I) e (II) sono conseguenza delle (4·1) e (4·2) stabilite nella nostra precedente Memoria.

Veniamo a dimostrare il Teorema (V). Per ogni $\eta > 0$, sia J_η l'insieme dei valori di t pei quali

$$\Lambda'(t) = \mathrm{Max}\,({}^*\Lambda'(0,\ t),\ \ \Lambda^{*\prime}(0,\ t)) > \eta;$$

allora in forza della (5·1) è $U_\eta > J_\eta$ e quindi $\mathrm{m}_i(U_\eta) \geqq \mathrm{m}(J_\eta)$. D'altronde, per le (4·3) è $\Lambda'(t) \leqq \mathfrak{C}/(2H)$ $(=\beta)$ e quindi J_η risulta vuoto per $\eta > \beta$; veniamo a stabilire, in conseguenza, una valutazione al disotto:

$$\int_0^\beta \mathrm{m}_i(U_\eta)\,\mathrm{d}\eta \geqq \int_0^\beta \mathrm{m}(J_\eta)\,\mathrm{d}\eta = \int_0^\beta \mathrm{m}(\Lambda'(t) > \eta)\,\mathrm{d}\eta \geqq$$

$$\geqq \int_0^\beta \mathrm{m}(\Lambda^{*\prime}(0,\ t) > \eta)\,\mathrm{d}\eta = \int_{\Lambda^*}^{\Omega^*} \Lambda^{*\prime}(0,\ t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \Lambda^*(0,\ \Omega^*) - \Lambda^*(0,\ \Lambda^*) = 1 - 0 = 1,$$

e con questo, essendo $\beta = \mathfrak{C}/(2H)$, la (V) è dimostrata.

La funzione $\mathrm{m}_i(U_\eta)$ è monotona non crescente al crescere di η e pertanto $\beta \cdot \mathrm{m}_i(U_0) = \beta \cdot \mathrm{m}_i(U) \geqq 2H/\mathfrak{C}$ e (IV) è dimostrata: lo stesso si dica per (III).

Le proposizioni (II*), (IV*), (VI*) sono specificazioni numeriche immediate delle (III), (IV), (VI).

Per gli insiemi V e W sono valide le proprietà analoghe.

Bibliografia.

1. I. V. Čulanovskiĭ, *Alcune valutazioni connesse con un nuovo metodo di Selberg ...* (in lingua russa), Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) **63**, 491-494 (1938).

2. P. Erdös, *The difference of consecutive primes*, Duke Math. J. **6**, 438-441 (1940).

3. P. Erdös, *Some problems on the distribution of prime numbers*, 8 pp. contenuto in *Teoria dei Numeri*, C.I.M.E., Varenna (Como) 1955.

4. R. A. Rankin, *The difference between consecutive prime numbers*, III, J. London Math. Soc. **22**, 226-230 (1947).

5. G. Ricci, *Sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi*, Rivista Mat. Univ. Parma **5**, 3-54 (1954).

6. G. Ricci, *Funzioni aritmetiche e quasi-asintoticità*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **24**, 87-106 (1952-53).

7. G. Ricci, *Sur la différence entre nombres premiers consécutifs*, Proc. Intern. Math. Congress Amsterdam **II**, 56-57 (1954).

8. G. Ricci, *Sul pennello di quasi-asintoticità della differenza di interi primi consecutivi*, Rend. Accad. Naz. Lincei (8) **17**, 192-196, 347-351 (1954).

9. H. N. Shapiro and J. Warga, *On the representation of large integers as sums of primes*, I, Communications Pure Appl. Math. **3**, 153-176 (1950).

10. E. Westzynthius, *Über die Verteilung der Zahlen, die zu den n ersten Primzahlen teilerfremd sind*, Comment. Phys.-Math. **5**, n. 25, Helsingfors 1911.