Rivista Mat. Univ. Parma 6, 215-237 (1955)

BRUNO PINI (*)

Sul primo problema di valori al contorno per le equazioni paraboliche lineari. (**)

Consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_0\, u = 0 \tag{1}$$

con a_0, a_1, a_2 funzioni definite in un campo $\mathcal{A}$ e ivi a_2 di segno costante. Sotto ben note condizioni di regolarità la (1) può ridursi alla forma canonica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + c\, u = 0.$$

Noi però ci riferiremo all'equazione

$$\mathcal{L}[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b\, u = 0 \tag{2}$$

e supporremo a, b, $\partial a/\partial x$ soddisfacenti in $\mathcal{A}$ una condizione di HÖLDER. Assegnate due curve γ_1 e γ_2 di equazioni $x = X_1(y)$, $x = X_2(y)$ con $X_1(y)$ e $X_2(y)$ continue su $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ e $X_1(y) < X_2(y)$, indichiamo con $\mathfrak{D}$ il dominio $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$,

(*) Professore s. della Università di Cagliari. Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Cagliari, Italia.
(**) Ricevuto il 6-XII-1955.

$X_1(y) \leqslant x \leqslant X_2(y)$, che supporremo contenuto in $\mathfrak{A}$, e con $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ la frontiera di $\mathfrak{D}$ privata dei punti $y = y_2$, $X_1(y_2) < x < X_2(y_2)$.

Comunque si fissi su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ una funzione continua φ può darsi che abbia soluzione ordinaria il problema

$$\mathfrak{L}[u] = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}, \qquad u = \varphi \quad \text{su} \quad \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}};$$

in tale caso diremo che $\mathfrak{D}$, o $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, è *regolare* per il primo problema di valori al contorno relativo all'equazione $\mathfrak{L}[u] = 0$.

Nel caso che ciò non si verifichi diremo che $\mathfrak{D}$, o $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, è *irregolare*.

A una arbitraria funzione continua φ si può però sempre associare una funzione u che in $\mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ è soluzione di $\mathfrak{L}[u] = 0$ e che coincide con la soluzione ordinaria del primo problema coi valori φ su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, quando questa esiste; tale funzione si chiamerà *soluzione generalizzata*.

Un punto P_0 di γ_1 o di γ_2 si dirà *regolare* se, qualunque sia φ, la soluzione generalizzata $u(P)$ converge a $\varphi(P_0)$ in senso ordinario per $P \to P_0$; in caso contrario si dirà *irregolare*.

Scopo del presente lavoro è di mostrare che se un punto di γ_1 o di γ_2 è regolare, o irregolare, per il primo problema di valori al contorno relativo al dominio $\mathfrak{D}$ e all'equazione

$$\mathfrak{L}_0[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

esso è regolare, o rispettivamente irregolare, per il medesimo problema relativo allo stesso dominio $\mathfrak{D}$ e alla (2).

A questo scopo occorre dapprima l'introduzione della soluzione generalizzata nel senso di WIENER per la (2) (1) e la conseguente caratterizzazione della regolarità di un punto di γ_1 o di γ_2 mediante una funzione barriera; il confronto tra la regolarità di un punto di γ_1 o di γ_2 relativamente alle equazioni (2) e (3) si realizza poi adattando opportunamente certi ragionamenti di OLEJNIK (2).

---

(1) Per il caso dell'equazione del calore cfr. B. PINI, *Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **23**, 422-434 (1954). In questo lavoro i ragionamenti sono svolti per l'equazione in due variabili. Essi però sono validi per un numero qualunque di variabili; cfr. O. MONTALDO, *Sul primo problema di valori al contorno per l'equazione del calore*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **25**, 1-14 (1955).

(2) O. A. OLEJNIK, *Sul problema di Dirichlet per le equazioni di tipo ellittico*, Mat. Sbornik **24**, 3-14 (1949) (in russo).

Il risultato stabilito nel presente lavoro si prova, con facili estensioni, che sussiste ancora se alla coppia di equazioni (2) e (3) si sostituisce la coppia

$$\sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + \sum_{1}^{n}{}_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu = 0, \tag{2'}$$

$$\sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3'}$$

e al dominio $\mathfrak{D}$ si sostituisce il suo analogo nello spazio $(n+1)$-dimensionale.

Poichè la più generale equazione parabolica lineare omogenea in tre variabili

$$\sum_{1}^{2}{}_{ij}\, a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1}^{2}{}_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji}),$$

se la forma quadratica $\sum_{1}^{2}{}_{ij}\, a_{ij}\lambda_i\lambda_j$ è definita e b è di segno costante, può, sotto note ipotesi di regolarità dei coefficienti, ricondursi alla forma canonica (2′), possiamo, almeno sotto queste ipotesi di regolarità dei coefficienti, ritenere esaurito il confronto tra la regolarità o irregolarità della frontiera di un dominio nei riguardi del primo problema di valori al contorno tra l'equazione del calore e la più generale equazione parabolica lineare omogenea anche nel caso di tre variabili.

In un successivo lavoro tratteremo l'analoga questione relativamente alle equazioni

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

e (3′).

Soluzione generalizzata del primo problema di valori al contorno relativo all'equazione $\mathcal{L}[u] = 0$.

1. – Chiameremo *normale* un dominio $\mathfrak{D}$ del tipo specificato nell'introduzione se $X_1(y)$ e $X_2(y)$ sono dotate di derivate prime continue su $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$.

Cominciamo col richiamare alcuni risultati di LEVI e GEVREY [3].

[3] E. E. LEVI, *Sull'equazione del calore*, Ann. Mat. Pura Appl. (3) **14**, 187-264 (1907); M. GEVREY, *Équations aux dérivées partielles du type parabolique*, J. Math. Pures Appl. (6) **9**, 305-471 (1913).

Poniamo

$$U_0(x,\ y;\ \xi,\eta) = \begin{cases} (y-\eta)^{-1/2}\cdot \exp\left[-(x-\xi)^2/\{4(y-\eta)\}\right] & \text{per } y>\eta, \\ 0 & \text{per } y \leqslant \eta. \end{cases}$$

Posto $x_i = X_i(y_1)$ $(i=1,\ 2)$, sia assegnata su $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ una funzione $f(x)$ continua insieme alle derivate prima e seconda; fissati due numeri a_1 ed a_2 tali che $a_1 < x_1 < x_2 < a_2$, continuiamo ad indicare con $f(x)$ una funzione continua insieme alle sue derivate prima e seconda su $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$, tale che $f(a_1) = f(a_2) = 0$, $f'(a_1) = f'(a_2) = 0$, e che coincide con la data su $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. La funzione che su $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y = y_1$, coincide con $f(x)$ e che altrove in $\mathfrak{D}$ coincide con

$$v(x,\ y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{a_1}^{a_2} f(\xi)\ U_0(x,\ y;\ \xi,\ y_1)\ d\xi \tag{4}$$

è una soluzione regolare di (3) in $\mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, continua e dotata delle derivate $\partial^2 v/\partial x^2$ e $\partial v/\partial y$ continue anch'esse in tutto $\mathfrak{D}$.

Date due funzioni $\Phi_i(y)$ $(i=1,\ 2)$, continue insieme alle derivate prime su $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, tali che $\Phi_i(y_1) = f(x_i)$, poniamo $\Psi_i(y) = \Phi_i(y) - v(X_i(y),\ y)$. La $\Psi_i(y)$, nulla per $y = y_1$, è dotata di derivata prima continua in tutto $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ perchè tale è la $v(X_i(y),\ y)$. La soluzione di (3) in $\mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, nulla per $y = y_1$ e che su γ_i coincide con Ψ_i $(i=1,\ 2)$, si può porre sotto la forma

$$u(x,\ y) = \sum_1^2{}_i \int_{y_1}^{y} \psi_i(\eta)\, U_0(x,\ y;\ X_i(\eta),\ \eta)\ d\eta\,. \tag{5}$$

Poichè le $\Psi_i(y)$ sono dotate di derivate prime continue, si ha che le $\psi_i(y)$ sono continue (ed eguali a zero per $y = y_1$). La u e la $\partial u/\partial x$ sono continue in tutto $\mathfrak{D}$ (ed eguali a zero per $y = y_1$).

Chiamiamo $\mathfrak{D}_y$ la porzione di $\mathfrak{D}$ appartenente al semipiano $\eta \leqslant y$. Sia $G_0(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$ la funzione di GREEN relativa all'equazione (3) e a $\mathfrak{D}$, cioè

$$G_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(U_0 - V_0),$$

essendo V_0 la soluzione dell'equazione

$$\mathfrak{M}_0[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

che coincide con U_0 se il punto (ξ, η) per $\eta < y$ appartiene a γ_1 o a γ_2 ed è zero per $\eta = y$, $X_1(y) \leqslant x \leqslant X_2(y)$.

Assegnata una funzione $f(x, y)$ hölderiana in $\mathfrak{D}$, la funzione

$$w(x, y) = -\iint\limits_{\mathfrak{D}_y} f(\xi, \eta)\, G_0(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

è la soluzione di $\mathfrak{L}_0[u] = f$ in $\mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, nulla su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$. Essa è hölderiana in $\mathfrak{D}$ insieme alla derivata $\partial w/\partial x$ (anche se f si suppone soltanto integrabile).

Siano α e β due funzioni hölderiane in $\mathfrak{D}$. La soluzione del problema

$$\mathfrak{L}_0[z] = \alpha \frac{\partial z}{\partial x} + \beta z \qquad \text{in} \qquad \mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}},$$

$$z = \begin{cases} f(x) & \text{per} \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \quad y = y_1, \\ \Phi_i(y) & \text{per} \quad x = X_i(y), \ y_1 \leqslant y \leqslant y_2 \qquad (i = 1, 2) \end{cases}$$

si esprime, con procedimento di approssimazioni successive (4), mediante la serie

$$z = z_0 + \sum_1^\infty {}_n\, z_n,$$

ove

$$z_0 = u + v,$$

$$z_n(x, y) = -\iint\limits_{\mathfrak{D}_y} \left(\alpha \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + \beta z_{n+1}\right) G_0(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Le z e $\partial z/\partial x$ risultano continue in tutto $\mathfrak{D}$.

2. – Indichiamo con $\mathfrak{M}$ l'operatore aggiunto di $\mathfrak{L}$. Non è restrittivo supporre che sia $b < 0$, $b - \partial a/\partial x < 0$.

Sia $G(x, y; \xi, \eta)$ la funzione di Green relativa all'equazione (2) e al dominio $\mathfrak{D}$, contenuto in $\mathfrak{A}$, già considerato. Si ha $G \geqslant 0$; ciò si vede immediata-

---

(4) Il procedimento è di J. Hadamard, *Sur la solution fondamentale des équations aux dérivées partielles du type parabolique*, C. R. Acad. Sci. Paris **152**, 1148-1149 (1911); la discussione esauriente è di M. Gevrey, l. c. in (3).

mente perchè se per una coppia di punti (x, y) e (ξ, η) fosse $G < 0$, riuscendo allora $G < 0$ anche in tutti i punti (ξ', η') di un intorno I di (ξ, η), detta $f(\xi', \eta')$ una funzione che in un intorno contenuto in I è positiva, che è nulla fuori di questo intorno ed è dappertutto hölderiana, la soluzione di $\mathfrak{L}[u] = f$ in $\mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, nulla su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, è data da

$$u(x, y) = -\iint_{\mathfrak{D}_y} G(P, Q')\, f(Q')\, dQ' > 0\,. \tag{6}$$

D'altra parte è noto (⁵) che se è $b < 0$, una soluzione regolare di $\mathfrak{L}[u] = f$ non può avere in $\mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ un massimo positivo qualora sia $f \geqslant 0$; allora la u dovrebbe essere sempre $\leqslant 0$, contrariamente alla (6).

Ora, posto per brevità $A \equiv (X_1(y_1), y_1)$, $B \equiv (X_2(y_1), y_1)$, $M \equiv (X_1(y), y)$, $N = (X_2(y), y)$, se v è dotata delle derivate $\partial^2 v/\partial x^2$ e $\partial v/\partial y$ continue in $\mathfrak{A}$, dalla formola di GREEN

$$v(x, y) = \int_{\overline{AB}} v\, G(P, Q)\, d\xi - \int_{\widehat{BN}+\widehat{MA}} v\, \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \xi}\, d\eta - \iint_{\mathfrak{D}_y} \mathfrak{L}[v]\, G(P, Q)\, dQ,$$

segue che v è sub-$\mathfrak{L}$ se $\mathfrak{L}[v] \geqslant 0$, è super-$\mathfrak{L}$ se $\mathfrak{L}[v] \leqslant 0$; con ciò s'intende che, comunque si fissi in $\mathfrak{A}$ un dominio normale $\mathfrak{D}$, la v è $\leqslant$, o rispettivamente $\geqslant$, della soluzione di $\mathfrak{L}[u] = 0$ che coincide con v su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$.

Sia ora $\overline{A'B'}$ un segmento interno ad $\overline{AB}$. Proviamo che, se $P \equiv (x, y)$ è un punto interno a $\mathfrak{D}$, è $G(P, Q) > 0$ per $Q \equiv (\xi, \eta) \subset \overline{A'B'}$. Comunque si fissi un $\varepsilon > 0$, la $G(P, Q)$ è soluzione regolare di $\mathfrak{M}_Q[u] = 0$ nell'interno del dominio $\mathfrak{D}_{y-\varepsilon}$. Ora se Q_0 appartiene a $\mathfrak{D}_{y-\varepsilon}$, detto $\sigma(Q_0)$ l'insieme dei punti Q di $\mathfrak{D}_{y-\varepsilon}$ che possono essere congiunti con Q_0 mediante una curva semplice interna a $\mathfrak{D}_{y-\varepsilon}$ in modo che procedendo da Q a Q_0 la η sia non crescente, si ha che (⁶) se u è una soluzione di $\mathfrak{M}[u] = 0$ che si annulla in Q_0 ed è $\geqslant 0$ in $\sigma(Q_0)$, allora è $u \equiv 0$ in $\sigma(Q_0)$. Ora G è non negativa in $\mathfrak{D}_{y-\varepsilon}$; perciò, se si annullasse in un punto Q_0 di $\overline{A'B'}$, dovrebbe annullarsi in $\mathfrak{D}_{y-\varepsilon}$; ciò è assurdo perchè in un intorno arbitrario di P esistono punti ove G prende valori comunque grandi. Infatti, supponiamo per semplicità che l'insieme $\mathfrak{A}$, ove i coefficienti a e b hanno la

---

(⁵) Cfr. M. GEVREY, l. c. in (³), e per il caso generale M. PICONE, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **7**,145-160 (1929-1930).

(⁶) Cfr. L. NIRENBERG, *A strong maximum principle for parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **6**, 167-177 (1953).

regolarità specificata all'inizio, sia un rettangolo $\mathfrak{R}$: $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant y \leqslant b_2$; allora la soluzione fondamentale relativa ad $\mathfrak{M}$ è [7]

$$U(P,\, Q) = U_0(P,\, Q) + \iint\limits_{\mathfrak{R}_{y,\eta}} f(P,\, T)\; U_0(T,\, Q)\,\mathrm{d}T \tag{7}$$

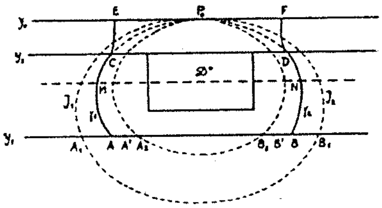
con $f(P,\, Q)$ (hölderiana per $Q \neq P$) soluzione dell'equazione integrale $2\sqrt{\pi}\, f(P,\, Q) = \mathfrak{M}\,[U_0(P,\, Q)] + \iint\limits_{\mathfrak{R}_{y,\eta}} f(P,\, T)\, \mathfrak{M}\,[U_0(T,\, Q)]\;\mathrm{d}T$, ove $\mathfrak{R}_{y,\eta}$ sta ad indicare la porzione di $\mathfrak{R}$ compresa tra le caratteristiche y ed η. L'integrale in (7) è limitato; d'altra parte

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,(U - V), \tag{8}$$

essendo V la soluzione di $\mathfrak{M}_Q[u] = 0$ che è nulla se Q appartiene ad $\overline{MN}$ e coincide con U se Q appartiene a quelle porzioni degli archi γ_1 e γ_2 che si trovano nel semipiano $\eta < y$. Infine in ogni intorno di P vi sono punti Q per cui $U_0(P,\, Q)$ prende valori arbitrariamente grandi.

3. – Come si è già detto, al variare di P e Q, l'integrale di (7) è limitato; supponiamo che esso sia in modulo maggiorato da una quantità positiva M.

Chiamiamo $\mathcal{C}(P,\, \varrho)$ la curva di equazione $U_0(P,\, Q) = 1/\varrho$. Fissato un punto P_0 e un numero $\delta > 2M$, consideriamo le curve



$$\begin{cases} \mathcal{C}(P_0,\quad 1/(\delta - 2M)), \\ \mathcal{C}(P_0,\quad 1/(\delta + 2M)) \end{cases} \tag{9}$$

e due caratteristiche $\eta = y_1$, $\eta = y_2$, con $y_1 < y_2 < y_0$, secanti entrambe le curve (9).

Siano $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ i segmenti che la corona individuata dalle (9) stacca dalla caratteristica $y = y_1$. Poichè U è continua su $\overline{A_1A_2}$ e in A_1 prende un valore compreso tra $\delta - 3M$ e $\delta - M$ mentre in A_2 prende un valore compreso tra $\delta + M$ e $\delta + 3M$, vi sarà nell'interno di $\overline{A_1A_2}$ un punto A tale che $U(P_0,\, A) = \delta$.

---

(7) La soluzione fondamentale di (2) è contenuta nel lavoro di Gevrey citato in (3); la soluzione fondamentale per la più generale equazione parabolica lineare è stata costruita da F. G. Dressel, *The fundamental solution of the parabolic equation*, Duke Math. J. **7**, 186-203 (1940).

È

$$\frac{\partial U_0}{\partial \xi} = \frac{x_0 - \xi}{2\cdot(y_0-\eta)}\, U_0 \quad \begin{cases} > 0 & \text{per } \xi < x_0, \\ < 0 & \text{per } \xi > x_0 \end{cases} \tag{10}$$

e sulla curva $\mathcal{C}(P_0, \varrho)$ risulta

$$\frac{\partial U_0}{\partial \xi} = \pm \frac{1}{\sqrt{y_0-\eta}} \sqrt{\frac{1}{2}\cdot \lg \frac{\varrho^2}{y_0-\eta}} \cdot \frac{1}{\varrho}. \tag{11}$$

Ora se p, h sono due costanti positive con $0 < h < 1$ e α è una variabile $\geqslant 0$, esiste una costante positiva K tale che

$$\alpha^p \cdot \exp(-\alpha) < K \cdot \exp(-h\alpha)\,.$$

Inoltre, posto

$$W(x,\ y;\ \xi,\ \eta;\ \alpha,\ h) = \begin{cases} (y-\eta)^{-\alpha}\cdot \exp\left[-h\,\dfrac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right] & \text{per } y > \eta, \\ 0 & \text{per } y \leqslant \eta, \end{cases}$$

riesce [8]

$$\int_{\eta}^{y}\int_{a_1}^{a_2} W(x, y; s, \tau; \alpha, h)\, W(s, \tau; \xi, \eta; \beta, l)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}\tau \leqslant \tag{12}$$

$$\leqslant K\ (\alpha, \beta, l, h)\ W(x, y; \xi, \eta; \beta + \alpha - \frac{3}{2}, p)\,,$$

se è $0 \leqslant \alpha$, $\beta < 3/2$ e h, l sono costanti positive; $4p = \min(h, l)$, $K(\alpha, \beta, l, h)$ è una costante dipendente da α, β, l, h. Ora la derivata rispetto a ξ dell'integrale che figura in (7) è del tipo (12) con $\alpha = \beta = 1$. Ne segue che esiste una costante H tale che per ogni coppia di punti P, Q è

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\eta}^{y}\int_{a_1}^{a_2} f(P,\ T)\ U_0(T,\ Q)\ \mathrm{d}T \right| < \frac{H}{\sqrt{y-\eta}}\,. \tag{13}$$

(8) Cfr. il lavoro di DRESSEL citato in (7).

Pertanto, dette J_1 ed J_2 le porzioni della corona limitata dalla curve (9), per cui è $\eta \geqslant y_1$ e rispettivamente $\xi < x_0$, $\xi > x_0$, risulta

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} > 0 \quad \text{in} \quad J_1, \qquad\qquad \frac{\partial U}{\partial \xi} < 0 \quad \text{in} \quad J_2,$$

non appena δ è sufficientemente grande, come si deduce tenendo presenti le (10), (11) e (13).

Ciò premesso, per il teorema di DINI sulle funzioni implicite, l'equazione $U(P_0, Q) = \delta$ individuerà un arco γ_1 contenuto in J_1 uscente da A, che si potrà prolungare in J_1 fino a P_0. Un analogo arco si avrà in J_2. Gli archi γ_1 e γ_2 limitatamente alla striscia $y_1 \leqslant \eta \leqslant y_2$, comunque si fissi $y_2 < y_0$, saranno suscettibili di rappresentazioni del tipo $x = X_1(y)$, $x = X_2(y)$, con $X_1(y)$ e $X_2(y)$ funzioni dotate di derivate prime continue.

Osserviamo che nelle regioni $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, $x < X_1(y)$ e $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, $x > X_2(y)$, risulta $U(P_0, P) \leqslant \delta$. Ragioniamo relativamente alla prima di queste regioni. Se in un punto P_1 di essa fosse $U(P_0, P_1) > \delta$, comunque si fissi un $\varepsilon > 0$ per cui sia $U(P_0, P_1) \geqslant \delta + \varepsilon$ si individuerebbero, almeno per ε molto piccolo, due archi, uno da una parte e l'altro dall'altra rispetto a γ_1, di equazione $U(P_0, P) = \delta + \varepsilon$. Ora se A' e A'' sono due punti uno dell'uno e l'altro dell'altro di questi due archi, situati sulla stessa caratteristica, in un punto intermedio dovrebbe essere $\partial U / \partial \xi = 0$; d'altra parte, se ε è abbastanza piccolo, tali archi sono contenuti in J_1 dove $\partial U / \partial \xi > 0$. Di qui l'assurdo. Ciò osservato, prolunghiamo gli archi $\widehat{AC}$ e $\widehat{BD}$, costituenti le porzioni rispettivamente di γ_1 e di γ_2 contenute nella striscia $y_1 \leqslant \eta \leqslant y_2$, mediante due archi $\widehat{CE}$ e $\widehat{DF}$ terminanti in due punti della caratteristica $\eta = y_2$, in modo che gli archi $\bar{\gamma}_1 = \widehat{ACE}$ e $\bar{\gamma}_2 = \widehat{BDF}$ siano rispettivamente di equazioni $x = \overline{X}_1(y)$, $x = \overline{X}_2(y)$ con $\overline{X}_1(y)$ e $\overline{X}_2(y)$ dotate di derivate prime continue su $y_1 \leqslant y \leqslant y_0$ e $\overline{X}_1(y) < \overline{X}_2(y)$. Allora il dominio $\overline{\mathfrak{D}} = ABDFECA$ è normale.

Consideriamo un dominio $\mathfrak{D}^*$ contenuto in $ABDCA$, per esempio rettangolare e con un lato appartenente ad $\eta = y_2$. Fissiamo poi due punti in $\overline{AB}$, uno A' appartenente ad J_1 e l'altro B' appartenente ad J_2. Siano x_1' e x_2' le loro ascisse, x_1 e x_2 quelle di A e B. Sia $u(x, y)$ una soluzione regolare in $\overline{\mathfrak{D}} - \mathcal{S}_{\overline{\mathfrak{D}}}$ di $\mathfrak{L}[u] = 0$ con valori non negativi su $\mathcal{S}_{\overline{\mathfrak{D}}}$. Si ha

$$u(x, y) = \int_{\overline{AB}} u\, G(P, Q)\, d\xi - \int_{\widehat{BN} + \widehat{MA}} u \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \xi}\, d\eta. \tag{14}$$

Poniamo

$$\alpha(x) = \int_x^{x_1'} u(\xi, y_1)\, d\xi, \qquad\qquad \beta(x) = \int_{x_2'}^{x} u(\xi, y_1)\, d\xi\,.$$

$\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono funzioni non negative rispettivamente su $x_1 \leqslant x \leqslant x_1'$, $x_2' \leqslant x \leqslant x_2$. Da (14) si deduce

$$(15) \qquad u(x, y) = \int_{x_1'}^{x_2'} u(\xi, y_1)\, G(P, Q)\, d\xi + \int_{x_1}^{x_1'} \alpha(\xi) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \xi} d\xi -$$

$$- \int_{x_2'}^{x_2} \beta(\xi) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \xi} d\xi + \int_{y_1}^{y} \left(u \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \xi}\right)_{\gamma_1} d\eta - \int_{y_1}^{y} \left(u \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \xi}\right)_{\gamma_2} d\eta .$$

Se $Q \subset \overline{A'B'}$ è $G(P_0, Q) > 0$; se $Q \subset \widehat{CA} + \overline{AA'}$ è $\partial U/\partial\xi > 0$; se $Q \subset \widehat{BD} + \overline{BB'}$ è $\partial U/\partial \xi < 0$. Torniamo alla funzione (8) di Green relativa al dominio $\mathfrak{D}$ e al punto P_0. Attualmente V è la soluzione di $\mathfrak{M}\mathfrak{S}_Q[u] = 0$ che su $\overline{EF}$ coincide con U, cioè è zero; sugli archi $\widehat{AC}$ e $\widehat{BD}$ coincide con U e quindi è costante ed uguale a δ; sugli archi $\widehat{CE}$ e $\widehat{DF}$ coincide con U e quindi, per quanto si è osservato indietro, è $\leqslant \delta$. Perciò nell'interno di $\mathfrak{D}$ è $V < \delta$ e quindi

$$\frac{\partial V(P_0, Q)}{\partial \xi} \leqslant 0 \qquad \text{per } Q \subset \widehat{CA},$$

$$\frac{\partial V(P_0, Q)}{\partial \xi} \geqslant 0 \qquad \text{per } Q \subset \widehat{BD}.$$

Esisterà quindi una costante positiva K tale che

$$\frac{\partial G(P_0, Q)}{\partial \xi} \geqslant K \qquad \text{per } Q \subset \widehat{CA} + \overline{AA'},$$

$$-\frac{\partial G(P_0, Q)}{\partial \xi} \geqslant K \qquad \text{per } Q \subset \widehat{BD} + \overline{BB'},$$

se A' e B' si prendono sufficientemente prossimi rispettivamente ad A e a B. Si può quindi trovare una costante positiva H tale che al variare di P in $\mathfrak{D}^*$ sia

$$\frac{\partial G(P, Q)}{\partial \xi} < H \frac{\partial G(P_0, Q)}{\partial \xi} \qquad \text{per } Q \subset \widehat{CA} + \overline{AA'},$$

$$-\frac{\partial G(P, Q)}{\partial \xi} < -H \frac{\partial G(P_0, Q)}{\partial \xi} \qquad \text{per } Q \subset \widehat{BD} + \overline{BB'},$$

$$G(P, Q) < H\, G(P_0, Q) \qquad \text{per } Q \subset \overline{A'B'}.$$

Dalla (15) si deduce allora che al variare di P in $\mathfrak{D}^*$ è

$$(16) \qquad u(x, y) < H \cdot \left[\int_{x_1'}^{x_2'} u(\xi, y_1)\, G(P_0, Q)\, d\xi + \int_{x_1}^{x_1'} \alpha(\xi)\, \frac{\partial G(P_0, Q)}{\partial \xi}\, d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_{x_2'}^{x_2} \beta(\xi)\, \frac{\partial G(P_0, Q)}{\partial \xi}\, d\xi + \int_{y_1}^{y} \left(u\, \frac{\partial G(P_0, Q)}{\partial \xi} \right)_{\gamma_1} d\eta - \int_{y_1}^{y} \left(u\, \frac{\partial G(P_0, Q)}{\partial \xi} \right)_{\gamma_2} d\eta \right].$$

D'altra parte la $\partial G/\partial \xi$ è, come facilmente si deduce dalla formola di GREEN, non negativa su $\widehat{CE}$ e non positiva su $\widehat{DF}$. Perciò dalla (16), sostituendo nei due ultimi integrali la y con y_0 e tornando ad esprimere i primi tre integrali con un unico integrale su $\overline{AB}$, si ha

$$(17) \quad u(x, y) < H \cdot \left[\int_{\overline{AB}} u\, G(P_0, Q)\, d\xi - \int_{\widehat{BDF} + \widehat{ECA}} u\, \frac{\partial G(P_0, Q)}{\partial \xi}\, d\eta \right] = H\, u(x_0, y_0)\,.$$

4. - La formola (17) permette, con un ragionamento noto, di stabilire la seguente estensione al caso parabolico del secondo teorema di HARNACK: *Sia* $\{ u_n(P) \}$ *una successione monotona di soluzioni di* $\mathfrak{L}[u] = 0$ *regolari in un dominio* $\mathfrak{D}$; *se essa converge in un punto* (x_0, y_0) *di* $\mathfrak{D}$, *allora converge uniformemente in ogni dominio* $\mathfrak{D}'$ *completamente interno a* $\mathfrak{D}_{y_0}$ (9).

Sia ora $\mathfrak{D}$: $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, $X_1(y) \leqslant x \leqslant X_2(y)$, con $X_1(y)$ e $X_2(y)$ due funzioni soltanto continue e tali che $X_1(y) < X_2(y)$, un dominio contenuto nel rettangolo $\mathfrak{R}$ ove i coefficienti di $\mathfrak{L}$ hanno la regolarità già specificata.

(9) Nella Nota citata in (1) si è stabilita questa proposizione per l'equazione del calore, prendendo domini rettangolari e sfruttando la conoscenza esplicita della funzione di GREEN. In un lavoro contemporaneo al nostro e con analogo procedimento la stessa proposizione è stata stabilita da J. HADAMARD, *Extension à l'équation de la chaleur d'une théorème de A. Harnack*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **3**, 337-346 (1954). La presente trattazione, svincolata dalla conoscenza esplicita della funzione di GREEN, può facilmente imitarsi per ottenere l'estensione alla più generale equazione parabolica lineare omogenea in quante si vogliano variabili. I ragionamenti del testo seguono in parte altri dovuti a L. LICHTENSTEIN, *Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Unendliche Folgen positiver Lösungen*, Rend. Circ. Mat. Palermo (1) **33**, 210-211 (1912); e *Bemerkungen zu der Abhandlung*: « *Beiträge zur Theorie der...* », Rend. Circ. Mat. Palermo (1) **34**, 278-279 (1912).

A una funzione $\varphi(P)$ continua su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ si può associare una ben determinata funzione che in $\mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ è soluzione regolare di $\mathfrak{L}[u] = 0$ e che coincide con la soluzione ordinaria del primo problema di valori al contorno tutte le volte che questa esiste. Essa è la soluzione generalizzata nel senso di WIENER.

Essendo γ_1 e γ_2 gli archi che limitano lateralmente $\mathfrak{D}$, prolunghiamo γ_1 e γ_2 secondo $y+$ mediante due segmenti eguali γ_1' e γ_2'; chiamiamo $\overline{\mathfrak{D}}$ il nuovo dominio che così si ottiene e prolunghiamo con continuità la $\varphi(P)$ in tutto $\overline{\mathfrak{D}}$.

Fissiamo una successione monotona di domini normali $\{\overline{\mathfrak{D}}_n\}$ invadenti $\overline{\mathfrak{D}}$ e, per esempio, limitati superiormente dalla stessa caratteristica che limita superiormente $\overline{\mathfrak{D}}$. Consideriamo la successione $\{u_n\}$ di funzioni così definite:

$$u_1 = \varphi \qquad \text{in } \overline{\mathfrak{D}},$$

$$u_{n+1} = \begin{cases} \varphi & \text{in } \overline{\mathfrak{D}} - \overline{\mathfrak{D}}_n \\ v_n & \text{in } \overline{\mathfrak{D}}_n, \end{cases}$$

essendo v_n la soluzione di $\mathfrak{L}[v] = 0$ in $\overline{\mathfrak{D}}_n - \mathfrak{S}_{\overline{\mathfrak{D}}_n}$, coincidente con φ su $\mathfrak{S}_{\overline{\mathfrak{D}}_n}$. Tenendo presente che se u è una soluzione regolare di $\mathfrak{L}[u] = 0$ $(b < 0)$ in un dominio normale $\mathfrak{D}^*$, essa in $\mathfrak{D}^* - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}^*}$ non può avere nè un massimo positivo nè un minimo negativo, facendo ricorso alla definizione di funzione super-$\mathfrak{L}$, si vede che, se φ è super-$\mathfrak{L}$, la $\{u_n\}$ è una successione non crescente di funzioni super-$\mathfrak{L}$ che, essendo inferiormente limitata, converge, in base al teorema di HARNACK, uniformemente in ogni dominio contenuto in $\mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, a una funzione u soluzione di $\mathfrak{L}[u] = 0$. Con ragionamenti noti si vede poi che, assegnata una arbitraria funzione $\varphi(P)$ continua su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, comunque la si prolunghi con continuità in $\overline{\mathfrak{D}}$ e comunque si scelga la successione monotona $\{\overline{\mathfrak{D}}_n\}$ di domini normali invadenti $\overline{\mathfrak{D}}$, la successione $\{u_n\}$ converge, uniformemente in ogni dominio contenuto in $\mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, alla stessa funzione u. Questa è la soluzione generalizzata nel senso di WIENER.

Si ha poi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il primo problema di valori al contorno relativo a $\mathfrak{D}$ e all'equazione $\mathfrak{L}[u] = 0$ abbia soluzione ordinaria per arbitrari assegnati valori continui su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ è che ad ogni punto P_0 di $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ si possa associare una funzione barriera $V(P, P_0)$ super-$\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{D}$, positiva in $\mathfrak{D} - P_0$ e convergente a zero per $P \to P_0$ [10].

---

[10] Cfr. il lavoro citato in [1].

Confronto tra le soluzioni del primo problema di valori al contorno di $\mathfrak{L}_0[u]=0$ ed $\mathfrak{L}[u]=0$, relative al medesimo dominio $\mathfrak{D}$.

5. – Sia $\mathfrak{D}$ un dominio, contenuto in $\mathfrak{R}$, del tipo di quello del n. precedente. Un punto P_0 di $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ si dirà *regolare* o *irregolare* per il primo problema di valori al contorno relativamente all'equazione $\mathfrak{L}[u]=0$ se, fissata a piacere una funzione $\varphi(P)$ continua su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, la soluzione generalizzata del problema

$$\mathfrak{L}[u]=0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D}-\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}, \qquad u=\varphi \quad \text{su} \quad \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$$

converge o non converge (in senso ordinario) a $\varphi(P_0)$ per $P \to P_0$.

Cominciamo col far vedere che:

Per particolari valori assegnati su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ un punto P_0 di $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ può essere tale che la soluzione del primo problema relativo a una equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta u=0$$

converga, per $P \to P_0$, al valore fissato in P_0, mentre ciò può non essere della soluzione dello stesso problema relativo a un'altra equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha'\frac{\partial u}{\partial x}+\beta' u=0\,.$$

Detta $\mathfrak{C}(P_0, r)$ la curva

$$\begin{cases} x = x_0-\sqrt{2}\, r\cdot \operatorname{sen}\theta\cdot\sqrt{\lg\left(1/\operatorname{sen}^2\theta\right)} \\ y=y_0-r^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta \end{cases} \qquad (-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$$

e $\mathfrak{D}(P_0, r)$ il dominio limitato che ha la $\mathfrak{C}(P_0, r)$ per frontiera, supponiamo $\mathfrak{D}$ così fatto che, essendo P_0 un punto di $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, per un certo valore di r, $\mathfrak{D}(P_0, r)$ appartenga a $\mathfrak{D}$ e abbia in comune con $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ il solo punto P_0.

Se si prende $\varphi=1$, la soluzione generalizzata relativa all'equazione del calore converge ad 1 in senso ordinario in tutti i punti di $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, qualunque sia $\mathfrak{D}$. Consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}+a\,u=0 \qquad (a<0)\,.$$

Se $u(x, y)$ è una soluzione regolare di questa in $\mathfrak{D} - \mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$, fissato a piacere un punto $P \equiv (x, y)$ in $\mathfrak{D} - \mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$, per tutti i ϱ per cui $\mathfrak{D}(P, \varrho)$ è contenuto in $\mathfrak{D} - \mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$ si ha

$$(18)\qquad u(x,\ y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u)_{\mathcal{C}(P,\varrho)} \cdot \cos\theta \cdot \sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta + $$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\varrho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\, u \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\varrho}\right) \frac{t^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta}{\sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta)}}\, dt\ d\theta .$$

Perciò, se $u(x, y)$ è la soluzione generalizzata del primo problema corrispondente ai valori $\varphi = 1$ su $\mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$ e P_0 è un punto regolare, per continuità dovrebbe aversi

$$(19)\qquad 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u)_{\mathcal{C}(P_0,r)} \cdot \cos\theta \cdot \sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta)}\, d\theta + $$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\, u \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right) \frac{\varrho^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta}{\sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta)}}\, d\varrho\ d\theta .$$

D'altra parte, in tutto $\mathfrak{D}$ è $0 \leqslant u \leqslant 1$, è $a < 0$, ed è

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \cdot \sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta)}\, d\theta = 1 ;$$

la (19) è pertanto impossibile, perchè il primo termine a secondo membro è $\leqslant 1$ mentre il secondo è < 0.

6. – Come si è sempre fatto precedentemente, indichiamo con γ_1 e γ_2 gli archi che limitano lateralmente il solito dominio $\mathfrak{D}$. Dimostriamo che:

Ogni punto P_0 di γ_1 o γ_2, regolare per l'equazione $\mathcal{L}[u] = 0$, è regolare anche per l'equazione $\mathcal{L}_0[u] = 0$ (11).

---

(11) Non prendiamo in considerazione i punti della base di $\mathfrak{D}$; essi sono tutti regolari. Che ciò sia vero relativamente all'equazione $\mathcal{L}_0[u] = 0$ è stato già osservato nel lavoro citato in (1). Ciò è vero anche relativamente all'equazione $\mathcal{L}[u] = 0$. Infatti sia P_1 un punto della base di $\mathfrak{D}$ e $\overline{\mathfrak{D}}$ un dominio normale contenente $\mathfrak{D}$ e limitato inferiormente dalla stessa caratteristica $y = y_1$ che limita inferiormente $\mathfrak{D}$; sia v la soluzione del problema $\mathcal{L}[v] = 0$ in $\overline{\mathfrak{D}} - \mathcal{S}_{\overline{\mathfrak{D}}}$, $v = 1$ su $\mathcal{S}_{\overline{\mathfrak{D}}}$. Allora la funzione $\omega = 1 + \frac{1}{h}[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] - v$ che è positiva in $\mathfrak{D} - P_1$ e super-$\mathcal{L}$, se si prende h in modo che sia $2[1 + (y_2 - y_1) + \max_{\mathfrak{D}} |a(x - x_1)|] < - bh$, è una barriera in P_1 per $\mathfrak{D}$ relativamente all'equazione $\mathcal{L}[v] = 0$.

Per provare l'asserto basta far vedere che se un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, per esempio di γ_1, non è regolare per l'equazione $\mathcal{L}_0[u] = 0$, non lo è neppure per l'equazione $\mathcal{L}[u] = 0$. Sia $v(P)$ la soluzione generalizzata del problema

$$\mathcal{L}_0[v] = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}, \qquad v = d(P) \quad \text{su} \quad \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$$

con

$$d(P) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2. \tag{20}$$

La $v(P)$ non può tendere a $d(P_0) = 0$ per $P \to P_0$ perchè altrimenti essa stessa, essendo una funzione super-$\mathcal{L}_0$, positiva in $\mathfrak{D} - P_0$, costituirebbe una barriera per $\mathfrak{D}$ in P_0; P_0 sarebbe allora regolare.

Consideriamo ora una successione monotona $\{\mathfrak{D}_n\}$ di domini normali invadenti $\mathfrak{D}$. Possiamo prendere in considerazione una particolare successione di domini; per esempio $\mathfrak{D}_n$, per ogni n, sia $y_{1n} \leq y \leq y_2$, $X_{1n}(y) \leq x \leq X_{2n}(y)$ con $y_1 < y_{1n}$, $X_{1n}(y)$ e $X_{2n}(y)$ funzioni dotate di derivate prime continue e $X_{1n}(y) < < X_{2n}(y)$. Chiamiamo γ_{1n} e γ_{2n} gli archi che limitano lateralmente $\mathfrak{D}_n$; per ogni $n \geq 1$ sarà $\mathfrak{D}_n \subset \mathfrak{D}_{n+1} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}_{n+1}}$, $\mathfrak{D}_n \subset \mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ e, fissato a piacere un $\varepsilon > 0$, per n maggiore di un certo $n(\varepsilon)$, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}_n}$ sarà contenuto nell'intorno di raggio ε di $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$.

$\mathfrak{D}$ è per ipotesi contenuto nel rettangolo $\mathfrak{R}$ ove i coefficienti di $\mathcal{L}$ hanno la regolarità specificata precedentemente.

Chiamiamo v_n la soluzione del problema

$$\mathcal{L}_0[u] = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D}_n - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}_n}, \qquad u = d \quad \text{su} \quad \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}_n}.$$

Per la regolarità di $d(P)$, per quanto si è ricordato al n. **1**, si può affermare che v_n e $\partial v_n/\partial x$ sono continue in tutto $\mathfrak{D}_n$.

Inoltre poichè la successione $\{v_n\}$ converge a v uniformemente in ogni dominio contenuto in $\mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, la successione $\{\partial v_n/\partial x\}$ converge uniformemente a $\partial v/\partial x$ in ogni dominio $\mathfrak{D}_\mu$.

Mostriamo ora che *esiste una costante positiva M tale che*

$$\iint_{\mathfrak{D}_n} \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 dx\, dy < M \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

Fissiamo un punto Q_0 sulla base superiore di $\mathfrak{D}$ e appartenente a tutti i $\mathfrak{D}_n$. Consideriamo una funzione $\Phi(P)$ continua insieme a $\partial^2\Phi/\partial x^2$ e $\partial\Phi/\partial y$ in tutto $\mathfrak{D}$

e coincidente con $d(P) - U_0(Q_0, P)$ in una zona attorno a $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, per esempio quella staccata da $\mathfrak{D}$ da $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}_1}$. Indichiamo con E ed F gli estremi della base superiore di $\mathfrak{D}$, con E_n ed F_n gli estremi della base superiore di $\mathfrak{D}_n$. Si ha

$$v_n(Q_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{E_nA_nB_nF_n} \left\{ U_0\, v_n\, dx + \left[U_0 \frac{\partial v_n}{\partial x} - v_n \frac{\partial U_0}{\partial x} \right] dy \right\},$$

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{E_nA_nB_nF_n} \left\{ \Phi\, v_n\, dx + \left[\Phi \frac{\partial v_n}{\partial x} - v_n \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] dy \right\} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{\mathfrak{D}_n} v_n\, \mathfrak{M}_0[\Phi]\, dx\, dy,$$

e quindi, sommando e tenendo presente che $\Phi + U_0 = d$ su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}_n}$, si ha

$$(22) \qquad -\int\limits_{y_{1n}}^{y_2} \left(d \frac{\partial v_n}{\partial x} \right)_{\gamma_{1n}} dy + \int\limits_{y_{1n}}^{y_2} \left(d \frac{\partial v_n}{\partial x} \right)_{\gamma_{2n}} dy = 2\sqrt{\pi}\; v_n(Q_0) -$$
$$- \int\limits_{E_nA_nB_nF_n} \left[(U_0 + \Phi)\, v_n\, dx - v_n \frac{\partial(\Phi + U_0)}{\partial x} dy \right] - \iint\limits_{\mathfrak{D}_n} v_n\, \mathfrak{M}_0[\Phi]\, dx\, dy.$$

D'altra parte, integrando la $v_n\, \mathfrak{L}_0[v_n] = 0$ su un dominio contenuto in $\mathfrak{D}_n$ con frontiera per esempio parallela a quella di $\mathfrak{D}_n$, eseguendo delle integrazioni per parti e facendo poi tendere questo dominio a $\mathfrak{D}_n$, si ha

$$(23) \qquad \iint\limits_{\mathfrak{D}_n} \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 dx\, dy = -\int\limits_{y_{1n}}^{y_2} \left(d \frac{\partial v_n}{\partial x} \right)_{\gamma_{1n}} dy + \int\limits_{y_{1n}}^{y_2} \left(d \frac{\partial v_n}{\partial x} \right)_{\gamma_{2n}} dy + \frac{1}{2} \int\limits_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}_n} v_n^2\, dx.$$

Poichè $|v_n| \leq \max_{\mathfrak{D}} |d|$ e $U_0(Q_0, P)$ e $\Phi(P)$ sono regolari su $E_nA_nB_nF_n$, da (22) e (23) segue subito l'asserto.

Sia ora $G(P, Q)$ la funzione di GREEN relativa ad $\mathfrak{R}$ e ad $\mathfrak{L}$. Poniamo

$$(24) \qquad W_n(P) = \iint\limits_{\mathfrak{D}_n} a \frac{\partial v_n}{\partial \xi} G(P, Q)\, dQ,$$

onde

$$\mathfrak{L}[W_n] = - a \frac{\partial v_n}{\partial x}$$

in ogni punto P interno a $\mathfrak{D}_n$, causa la hölderianità di a.

Poniamo

$$V_n(P) = \iint_{\mathfrak{D}_n} b\, v_n\, G(P, Q)\, dQ, \tag{25}$$

onde

$$\mathfrak{L}[V_n] = -b\, v_n$$

in ogni punto P interno a $\mathfrak{D}_n$, causa la hölderianità di b.

Poniamo infine

$$\psi_n = W_n + V_n \tag{26}$$

e

$$w_n = v_n + \psi_n . \tag{27}$$

Si ha

$$\mathfrak{L}[w_n] = 0 \tag{28}$$

perchè

$$\mathfrak{L}[v_n] = a \frac{\partial v_n}{\partial x} + b\, v_n, \qquad \mathfrak{L}[\psi_n] = -a \frac{\partial v_n}{\partial x} - b\, v_n .$$

La successione $\{ v_n \}$ mantenendosi limitata in tutto $\mathfrak{D}$ converge uniformemente in ogni dominio contenuto in $\mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ alla funzione v. Perciò $\{ V_n \}$ *converge uniformemente in tutto* $\mathfrak{D}$ *a una funzione* V.

Mostriamo che anche *la successione* $\{ W_n \}$ *converge uniformemente in tutto* $\mathfrak{D}$ *a una funzione* W.

Essendo ϱ un certo numero positivo, a ogni punto $P \equiv (x, y)$ di $\mathfrak{D}$ associamo il rettangolo $\mathfrak{R}_\varrho$: $\quad y - \varrho \leqslant \eta \leqslant y, \quad x - \varrho \leqslant \xi \leqslant x + \varrho$. Fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, cominciamo col provare che si può prendere ϱ in modo che per ogni P di $\mathfrak{D}$ e per ogni n sia

$$\left| \iint_{\mathfrak{R}_\varrho \cdot \mathfrak{D}} a \frac{\partial v_n}{\partial \xi}\, G(P, Q)\, dQ \right| < \varepsilon, \tag{29}$$

ove conveniamo di porre zero al posto di $\partial v_n / \partial x$ nei punti di $\mathfrak{R}_\varrho \cdot \mathfrak{D}$ non appartenenti a $\mathfrak{D}_n$.

Per ogni η tale che $y-\varrho \leqslant \eta \leqslant y$, siano x'_η ed x''_η le ascisse dei punti che la corrispondente caratteristica ha in comune con la $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}_\varrho \cdot \mathfrak{D})$. Si ha

(30) $$\iint\limits_{\mathfrak{R}_\varrho \cdot \mathfrak{D}} a \frac{\partial v_n}{\partial \xi} G(P, Q)\, \mathrm{d}Q = \int\limits_{y-\varrho}^{y} \mathrm{d}\eta \int\limits_{x'_\eta}^{x''_\eta} \frac{\partial}{\partial \xi}(a\, v_n\, G)\, \mathrm{d}\xi - \iint\limits_{\mathfrak{R}_\varrho \cdot \mathfrak{D}} v_n \frac{\partial (aG)}{\partial \xi}\, \mathrm{d}Q,$$

(31) $$\left| \int\limits_{x'_\eta}^{x''_\eta} \frac{\partial}{\partial \xi}(a\, v_n\, G)\, \mathrm{d}\xi \right| = \left| [a\, v_n\, G]_{x'_\eta}^{x''_\eta} \right| \leqslant 2 \max_{\mathfrak{D}} |d| \cdot \max_{\mathfrak{D}} |a| \cdot \max_{y'=\eta} G(P,P'),$$

tenendo presente che $|v_n| \leqslant \max_{\mathfrak{D}} |d|$.

Ora la funzione G è del tipo (8) ove la soluzione fondamentale è data da (7). $V(P, Q)$ è regolare al variare di P e Q in $\mathfrak{D}$; l'integrale che figura in (7) è limitato, mentre

(32) $$\max_{y'=\eta} U_0(P, P') = 1/\sqrt{y-\eta}.$$

Da (31) a (32) segue che il primo integrale a secondo membro della (30) si può perciò maggiorare con $C\sqrt{\varrho}$, ove C è una opportuna costante positiva indipendente da P e da n. Il secondo integrale a secondo membro della (30) si scrive

$$\iint\limits_{\mathfrak{R}_\varrho \cdot \mathfrak{D}} v_n \frac{\partial a}{\partial \xi} G\, \mathrm{d}Q + \iint\limits_{\mathfrak{R}_\varrho \cdot \mathfrak{D}} v_n\, a \frac{\partial G}{\partial \xi}\, \mathrm{d}Q.$$

Poichè

$$\iint\limits_{\mathfrak{R}_\varrho} U_0\, \mathrm{d}Q \sim \varrho\sqrt{\varrho}, \qquad \iint\limits_{\mathfrak{R}_\varrho} \left| \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right| \mathrm{d}Q \sim \sqrt{\varrho},$$

si ha in definitiva che esiste una costante positiva K tale che

$$\left| \iint\limits_{\mathfrak{R}_\varrho \cdot \mathfrak{D}} a \frac{\partial v_n}{\partial \xi} G\, \mathrm{d}Q \right| < K \sqrt{\varrho},$$

qualunque sia P di $\mathfrak{D}$ e per ogni n. Prendendo ϱ abbastanza piccolo sussiste allora la (29).

Ora, fissato un numero naturale μ, per ogni coppia m, $n > \mu$ si ha

$$(33) \qquad |W_n(P) - W_m(P)| \leqslant \left| \iint\limits_{\mathfrak{R}_\varrho \cdot \mathfrak{D}_\mu} a\, G \frac{\partial(v_n - v_m)}{\partial\xi}\, \mathrm{d}Q \right| + \left| \iint\limits_{\mathfrak{D}_\mu - \mathfrak{R}_\varrho \cdot \mathfrak{D}_\mu} a\, G \frac{\partial(v_n - v_m)}{\partial\xi}\, \mathrm{d}Q \right| + \left| \iint\limits_{\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_\mu} a\, G \frac{\partial(v_n - v_m)}{\partial\xi}\, \mathrm{d}Q \right| ,$$

intendendo di porre $\partial v_n/\partial x$ e $\partial v_m/\partial x$ eguali a zero fuori di $\mathfrak{D}_n$ e $\mathfrak{D}_m$ rispettivamente. Scegliamo μ in modo che la mis$(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_\mu)$ sia così piccola che riesca

$$\left| \iint\limits_{\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_\mu} a\, G \frac{\partial(v_n - v_m)}{\partial\xi}\, \mathrm{d}Q \right| \leqslant \left(\iint\limits_{\mathfrak{D}} \left[\frac{\partial(v_n - v_m)}{\partial\xi} \right]^2 \mathrm{d}Q \right)^{1/2} \left(\iint\limits_{\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_\mu} (a\, G)^2\, \mathrm{d}Q \right)^{1/2} < \varepsilon/3,$$

il che è possibile ricordando la (21) e tenendo presente che G, al pari di U_0, è sommabile in $\mathfrak{D}$ con ogni sua potenza di esponente < 3. Fissiamo poi ϱ in modo che sia

$$\left| \iint\limits_{\mathfrak{R}_\varrho \cdot \mathfrak{D}} a\, G \frac{\partial(v_n - v_m)}{\partial\xi}\, \mathrm{d}Q \right| < \varepsilon/3,$$

il che è possibile per la (29). Infine in $\mathfrak{D}_\mu - \mathfrak{R}_\varrho \cdot \mathfrak{D}_\mu$ la funzione $G(P, Q)$ è limitata; inoltre, fissato un $\delta > 0$, si ha in $\mathfrak{D}_\mu$

$$\left| \frac{\partial(v_n - v_m)}{\partial\xi} \right| < \delta$$

non appena n ed m sono maggiori di un certo N. Si può allora scegliere δ, e quindi N, in modo che anche il secondo integrale al secondo membro di (33) sia $< \varepsilon/3$. Perciò

$$|W_m(P) - W_n(P)| < \varepsilon \qquad \text{per} \quad m,\ n > N,$$

il che assicura la convergenza uniforme in tutto $\mathfrak{D}$ della $\{W_n\}$.

Allora la $\{\psi_n\}$ definita dalla (26) converge uniformemente in tutto $\mathfrak{D}$; sia ψ la funzione limite. Chiamiamo $\overline{\psi}$ una funzione continua in tutto $\mathfrak{D}$ che coincida con ψ su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, con ψ_n su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}_n}$.

Ora la funzione $w = v + \psi$ è la soluzione generalizzata del primo problema di valori al contorno relativo al dominio $\mathfrak{D}$ e all'equazione $\mathfrak{L}[u] = 0$ coi valori $\overline{\psi} + d = \psi + d$ su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$. Infatti w_n, ove si tengano presenti le (27) e (28), è la soluzione del primo problema di valori al contorno relativo al dominio $\mathfrak{D}_n$, all'equazione $\mathfrak{L}[u] = 0$ e ai valori $\overline{\psi} + d$ su $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}_n}$. Ma $w(P)$ non tende a $\overline{\psi}(P_0) = \overline{\psi}(P_0) + d(P_0)$ per $P \to P_0$ perchè ψ è continua, e tende perciò a $\overline{\psi}(P_0)$, mentre $v(P)$ non tende a zero per $P \to P_0$.

Dunque P_0 non è regolare per la $\mathfrak{L}[u] = 0$.

7. – Proviamo ora che:

Ogni punto P_0 di γ_1 o γ_2, regolare per l'equazione $\mathfrak{L}_0[u] = 0$, è regolare anche per l'equazione $\mathfrak{L}[u] = 0$.

Supponiamo che P_0 appartenga a γ_1. Possiamo anche supporre che P_0 sia interno a γ_1, perchè nel caso contrario si potrebbero prolungare convenientemente γ_1 e γ_2. Sia dunque $y_1 < y_0 < y_2$. Consideriamo una successione monotona $\{\mathfrak{D}_n\}$ di domini invadenti $\mathfrak{D}$ come quelli del n. 6. Indichiamo con u_n la soluzione del problema

$$\mathfrak{L}[u_n] = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D}_n - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}_n}, \qquad\qquad u_n = 1 \quad \text{su} \quad \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}_n}.$$

Le funzioni u_n e $\partial u_n/\partial x$ sono continue in tutto $\mathfrak{D}_n$, per ogni n. Fissato un $\overline{y}$ tale che $y_0 < \overline{y} < y_2$, chiamiamo $\overline{\mathfrak{D}}$ e $\overline{\mathfrak{D}}_n$ quelle porzioni di $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}_n$ che appartengono al semipiano $y \leqslant \overline{y}$. Proviamo che esiste una costante positiva M, indipendente da n, tale che

$$\iint\limits_{\overline{\mathfrak{D}}_n} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < M \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)\,. \tag{34}$$

Consideriamo un dominio interno a $\overline{\mathfrak{D}}_n$ con frontiera parallela a quella di $\overline{\mathfrak{D}}_n$; integriamo su tale dominio l'espressione $u_n \cdot \mathfrak{L}[u_n] = 0$; eseguendo qualche integrazione per parti e facendo poi tendere a $\overline{\mathfrak{D}}_n$ il dominio scelto, si ha

$$\iint\limits_{\overline{\mathfrak{D}}_n} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\overline{\mathfrak{D}}_n} \left(b - \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial x}\right) u_n^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\mathfrak{F}\overline{\mathfrak{D}}_n} \left[\left(u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{1}{2}\, a\, u_n^2\right)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\, u_n^2\,\mathrm{d}x\right]. \tag{35}$$

Su $\mathcal{S}_{\mathfrak{D}_n}$ è $u_n = 1$ e in $\mathfrak{D}_n$ è $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Per provare la (34) basta allora mostrare che è limitato l'integrale

$$\int\limits_{\mathcal{F}\overline{\mathfrak{D}}_n} \frac{\partial u_n}{\partial x}\,\mathrm{d}y = -\int\limits_{y_{1n}}^{\bar{y}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)_{\gamma_{1n}} \mathrm{d}y + \int\limits_{y_{1n}}^{\bar{y}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)_{\gamma_{2n}} \mathrm{d}y\,. \tag{36}$$

Sia ora Q_0 un punto della base superiore di $\mathfrak{D}$, contenuto in ogni $\mathfrak{D}_n$. Fermo restando il significato di A, B, E, F, A_n, B_n, E_n, F_n, si ha

$$u_n(Q_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{E_n A_n B_n F_n} \left[U_0 \cdot (\mathrm{d}x + a\,\mathrm{d}y) + U_0 \frac{\partial u_n}{\partial x}\,\mathrm{d}y - \frac{\partial U_0}{\partial x}\,\mathrm{d}y \right] + $$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{\mathfrak{D}_n} u_n\, \mathfrak{M}[U_0]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

e

$$1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{E_n A_n B_n F_n} \left[U_0 \cdot (\mathrm{d}x + a\,\mathrm{d}y) - \frac{\partial U_0}{\partial x}\,\mathrm{d}y \right] + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{\mathfrak{D}_n} (\mathfrak{M}[U_0] - b\,U_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

dove U_0 sta ad indicare $U_0(Q_0, P)$.

Ne segue che

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{E_n A_n B_n F_n} U_0 \frac{\partial u_n}{\partial x}\,\mathrm{d}y = u_n(Q_0) - 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{\mathfrak{D}_n} \left\{ (u_n - 1)\, \mathfrak{M}[U_0] + b\,U_0 \right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{37}$$

Chiamiamo M_n ed N_n i punti in cui la caratteristica $y = \bar{y}$ incontra γ_{1n} e γ_{2n}. Su γ_{1n} e γ_{2n} è $U_0(Q_0, P) \geqslant 0$, mentre esiste una costante positiva K tale che $U_0(Q_0, P) > K$ al variare di P sulle porzioni di γ_{1n} e γ_{2n} appartenenti al semipiano $y \leqslant \bar{y}$. L'integrale doppio in (37) è limitato perchè $\mathfrak{M}[U_0] = (b - \partial a/\partial x)\,U_0 - a\,\partial U_0/\partial x$ e $\partial U_0/\partial x$ è sommabile su $\mathfrak{D}$. D'altra parte, perchè $u_n = 1$ su $\mathcal{S}_{\mathfrak{D}_n}$ e $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ in $\mathfrak{D}_n$, si ha

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)_{\gamma_{1n}} \leqslant 0, \qquad \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)_{\gamma_{2n}} \geqslant 0\,.$$

Pertanto

$$0 \leqslant \int\limits_{M_n A_n B_n N_n} U_0 \frac{\partial u_n}{\partial x} \mathrm{d}y \leqslant \int\limits_{E_n A_n B_n F_n} U_0 \frac{\partial u_n}{\partial x} \mathrm{d}y =$$

$$= u_n(Q_0) - 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{\mathfrak{D}_n} \{ (u_n - 1) \mathfrak{M}[U_0] + b U_0 \} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < H ,$$

per una certa costante H indipendente da n. Perciò

$$0 \leqslant - \int_{y_{1n}}^{\bar{y}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)_{\gamma_{1n}} \mathrm{d}y + \int_{y_{1n}}^{\bar{y}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)_{\gamma_{2n}} \mathrm{d}y < \frac{H}{K} .$$

Dopo di ciò, da (35) e (36) segue subito la (34).

Consideriamo ora le funzioni

$$W_n(P) = - \iint\limits_{\mathfrak{D}_n} a \frac{\partial u_n}{\partial x} G_0(P, \ Q) \, \mathrm{d}Q, \qquad V_n(P) = - \iint\limits_{\mathfrak{D}_n} b \, u_n \, G_0(P, \ Q) \, \mathrm{d}Q,$$

essendo G_0 la funzione di GREEN relativa al rettangolo $\mathfrak{R}$ e all'equazione $\mathfrak{L}_0[u] = 0$. Con ragionamenti simili a quelli svolti nel n. **6** si ha che $\{ W_n \}$ e $\{ V_n \}$ convergono uniformemente in tutto $\overline{\mathfrak{D}}$ a due funzioni W e V. In $\overline{\mathfrak{D}}_n - \mathfrak{S}_{\overline{\mathfrak{D}}_n}$ è

$$\mathfrak{L}_0[W_n + V_n] = a \frac{\partial u_n}{\partial x} + b \, u_n, \qquad \mathfrak{L}_0[u_n] = - a \frac{\partial u_n}{\partial x} - b \, u_n$$

e quindi

$$\mathfrak{L}_0[u_n + V_n + W_n] = 0 .$$

Pertanto $u + V + W$ è in $\mathfrak{D} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ soluzione di $\mathfrak{L}_0[v] = 0$.

Supponiamo ora che P non sia regolare per $\mathfrak{L}[v] = 0$. La funzione $u(P)$ non può allora convergere a 1 per $P \to P_0$; in caso contrario, detto h un numero positivo tale che sia $2[1 + y_2 - y_1 + \max_{\mathfrak{D}} | a(x - x_0) |] < - b \, h,$ la funzione $\omega(P) = 1 + \frac{1}{h} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - u(P)$, positiva in $\mathfrak{D} - P_0$, che è super-$\mathfrak{L}$ perchè $\mathfrak{L}[\omega] < 0$, sarebbe una barriera per $\mathfrak{D}$ in P_0 e quindi P_0 sarebbe regolare. D'altra parte $V + W$ è continua in tutto $\overline{\mathfrak{D}}$ e quindi converge a $V(P_0) + W(P_0)$ per $P \to P_0$. Ma $u + V + W$ è la soluzione generalizzata del problema $\mathfrak{L}_0[v] = 0$ in $\overline{\mathfrak{D}} - \mathfrak{S}_{\overline{\mathfrak{D}}}$, $v = 1 + V + W$ su $\mathfrak{S}_{\overline{\mathfrak{D}}}$; essa non converge ad $1 + V(P_0) + W(P_0)$ per $P \to P_0$. Pertanto P_0 è irregolare per il primo problema di valori al contorno relativo a $\mathfrak{D}$ e a $\mathfrak{L}_0[v] = 0$.