Rivista Mat. Univ. Parma 6, 163-191 (1955)

JAURÈS CECCONI (*)

Sulla esistenza del minimo degli integrali del Calcolo delle variazioni estesi ad una superficie di forma parametrica.

1. – Recentemente L. CESARI [5] e indipendentemente J. M. DANSKIN [6], A. G. SIGALOV [8], hanno provato l'esistenza della superficie minimizzante un integrale doppio $\mathfrak{J}(S)$ di forma parametrica (quasi regolare, definito positivo) nella classe delle superficie di FRÉCHET S che si appoggiano ad una data curva di JORDAN γ.

La dimostrazione di L. CESARI [5], alla quale ci riferiremo nel corso di questo lavoro, è fondata essenzialmente su di un nuovo processo di livellamento eseguito su di una opportuna successione di superficie poliedriche del tipo della 2-cella, non degeneri, le cui linee contorno tendono a γ. Mediante questo procedimento è possibile ottenere da tale successione una sotto-successione convergente ad una superficie di FRÉCHET che si appoggia a γ e minimizza l'integrale $\mathfrak{J}(S)$.

In questa Nota vogliamo usufruire del procedmento di livellamento introdotto da L. CESARI per stabilire un teorema di esistenza del minimo di un integrale doppio $\mathfrak{J}(\sum)$ nella classe delle superficie di FRÉCHET $\sum$ del tipo della 2-sfera che avvolgono un opportuno insieme aperto e limitato Ω.

2. – Sia E_3 lo spazio dei punti $x=(x^1, x^2, x^3)$. Sia A un insieme chiuso e limitato di E_3. Sia Ω un insieme aperto tale (1) che $\Omega + \Omega^* \subset (A)^0$.

(*) Indirizzo: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.

(1) In tutto questo lavoro, se E è un insieme, E^* indicherà la sua frontiera, $(E)^0$ indicherà l'insieme dei punti interni a E.

Sia $\sum$ una superficie orientata, del tipo della 2-sfera, il cui sostegno $[\sum]$ appartiene ad A ed avvolgente Ω; tale cioè che per ogni $x \in \Omega$ sia $O(x, \sum) \neq 0$, essendo $O(x, \sum)$ l'indice topologico di x rispetto a $\sum$.

Supponiamo che l'insieme A sia convesso, in relazione a Ω supponiamo invece che esso sia «sufficientemente liscio» in modo da soddisfare ad una opportuna condizione.

Precisamente supponiamo che Ω soddisfi la seguente condizione $[C_\lambda]$.

Esiste un numero $\lambda > 1$ tale che:

a) detto $\Omega(\delta)$ $(\delta \geq 0)$ l'insieme dei punti $x \in \Omega$ la cui distanza da Ω^* è $> \delta$, l'insieme $\Omega(\delta)$ è connesso se $\delta < 1/\lambda$;

b) per ogni linea poligonale semplice chiusa p il cui sostegno $[p]$ non incontro $\Omega(\delta)$ $(\delta < 1/\lambda)$, e per la quale è $\text{diam}\,[p] < 1/\lambda$, esiste un poliedro P, del tipo della 2-cella, soddisfacente le seguenti condizioni: b·1) il sostegno $[P]$ di P non incontra $\Omega(\delta)$, b·2) il contorno $\vartheta(P)$ di P è p, b·3) area $[P] < \lambda \cdot (\text{lungh}\, p)^2$, b·4) $\text{diam}\,[P] < \lambda \cdot \text{diam}\,[p]$ (2).

Ciò posto dimostreremo, nella presente Nota, il seguente

T e o r e m a. *Sia W la classe di tutte le superficie orientate di* F r é c h e t $\sum$ *del tipo della 2-sfera, di area secondo* L e b e s g u e *finita, il cui sotegno* $[\sum]$ *appartiene ad un insieme chiuso convesso A e che avvolgono un insieme Ω, soddisfacente la condizione $[C_\lambda]$, per il quale $\Omega + \Omega^* \subset (A)^0$.*

Sia $\mathfrak{J}(\sum)$ un integrale quasi regolare, definito positivo (vedasi n. **6**) *esteso alla superficie di classe W.*

Allora, supposta la classe W non vuota, esiste in W il minimo di $\mathfrak{J}(\sum)$.

Preliminari.

3. – Sia $\sum$ una superficie orientata di FRÉCHET del tipo della 2-sfera, e sia

$$(\mathfrak{T}, \mathfrak{C}): \qquad x^1 = x^1(u), \quad x^2 = x^2(u), \quad x^3 = x^3(u), \quad u = (u^1, u^2, u^3) \in \mathfrak{C}$$

una rappresentazione di $\sum$ sulla sfera unitaria

$$\mathfrak{C}: \qquad (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = 1.$$

---

(2) Si riconosce facilmente che ogni sfera, ogni ellissoide, ogni poliedro non necessariamente convesso e, più generalmente, ogni insieme di E_3 la cui frontiera è costituita da una superficie semplice dotata di rappresentazione sufficientemente regolare, soddisfa la condizione $[C_\lambda]$.

dello spazio $u = (u^1, u^2, u^3)$, sulla quale si è fissata come indicatrice positiva quella corrispondente al verso $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ sul triangolo sferico che ha gli stessi vertici.

Siano $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ rispettivamente l'emisfero superiore ($u^3 \geqslant 0$) e quello inferiore ($u^3 \leqslant 0$) di $\mathfrak{C}$.

Sia $(\Psi_1, \mathfrak{C}_1)$ $[(\Psi_2, \mathfrak{C}_2)]$ la trasformazione conforme di $\mathfrak{C}_1$ $[\mathfrak{C}_2]$ nel cerchio C del piano $u^3 = 0$ ottenuta proiettando $\mathfrak{C}_1$ $[\mathfrak{C}_2]$ dal punto $(0, 0, -1)$ $[(0, 0, +1)]$ sul piano $u^3 = 0$. Sia (Ψ_1^{-1}, C) $[(\Psi_2^{-1}, C)]$ la trasformazione inversa.

Sia (T, Q) una certa trasformazione, conforme, alla quale sempre nel seguito ci riferiremo, del quadrato unitario $Q: 0 \leqslant u^1, u^2 \leqslant 1$ del piano (u^1, u^2) nel cerchio C. [Il piano (u^1, u^2) è orientato in modo che la terna di assi u^1, u^2, u^3 sia levogira.]

Consideriamo infine le trasformazioni $(\mathfrak{S} \cdot \Psi_1^{-1} \cdot T, Q)$, $(\mathfrak{S} \cdot \Psi_2^{-1} \cdot T, Q)$. Esse determinano due superficie orientate di Fréchet del tipo della 2-cella, S_1, S_2, aventi il medesimo contorno, che diremo ottenute da $\sum$ tagliando $\sum$ lungo a linea $\mathfrak{S}(\mathfrak{C}_1^*) = \mathfrak{S}(\mathfrak{C}_2^*)$.

4. – Sia A un insieme chiuso dello spazio E_3 dei punti $x = (x^1, x^2, x^3)$. Sia $F(x, p)$, con $p = (p^1, p^2, p^3)$, una qualunque funzione reale degli argomenti x, p, tale che:

a) $F(x, p)$ è continua come funzione di (x, p) per $x \in A$ e per ogni p per il quale $|p| = [(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2]^{1/2} \neq 0$;

b) $F(x, tp) = t \cdot F(x, p)$ per ogni $x \in A$, $p \neq 0$, $t > 0$.

Sia S una superficie di Fréchet del tipo della 2-cella e sia

$$(T, Q): \quad x = x(v): \quad x^1 = x^1(v), \; x^2 = x^2(v), \; x^3 = x^3(v), \; v = (u^1, u^2) \in Q$$

una rappresentazione di S sul quadrato $Q: 0 \leqslant u^1, u^2 \leqslant 1$, del piano (u^1, u^2).

Supponiamo che l'insieme $[S]$ dei punti x appartenenti alla superficie S (tale insieme sarà detto nel seguito *sostegno* $[S]$ di S) appartenenza ad A, supponiamo altresì che l'area secondo Lebesgue, $a(S)$, di S sia finita.

In queste condizioni è stato introdotto, da L. Cesari **[3]**, il concetto di integrale di Weierstrass di $F(x, p)$ sulla superficie S, che sarà indicato con la notazione

$$\mathfrak{J}(S) = (S) \iint F(x, p).$$

L'integrale $\mathfrak{J}(S)$ è indipendente dalla rappresentazione di S e gode delle proprietà che sono espresse dai seguenti teoremi:

Teorema (L. CESARI [**3**]). Se la rappresentazione (T, Q) di S è dotata quasi ovunque in Q di Jacobiani ordinari $J = (J^1, J^2, J^3)$ e se si ha

$$a(S) = \iint_Q |J| \, du^1 du^2, \qquad |J| = [(J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2]^{1/2},$$

allora è anche

$$\mathfrak{J}(S) = \iint_Q F(x, J) \, du^1 du^2,$$

gli integrali essendo intesi nel senso di LEBESGUE.

Teorema (*L.* CESARI) [**3**]). Se S, S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sono superficie di FRÉCHET del tipo della 2-cella, di aree secondo LEBESGUE finite, se $[S]$, $[S_n] \subset A$, $\| S, S_n \| \to 0$ ($\| S, S_n \|$ è la distanza secondo FRÉCHET fra S e S_n), $a(S_n) \to a(S)$, allora anche $\mathfrak{J}(S_n) \to \mathfrak{J}(S)$.

5. – Siano A e $F(x, p)$ definiti come nel n. precedente.

Sia $\sum$ una superficie di FRÉCHET del tipo della 2-sfera, di area secondo LEBESGUE, $a(\sum)$, finita, il cui sostegno $[\sum]$ appartenga all'insieme A. Sia $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ una rappresentazione di $\sum$ sulla sfera unitaria orientata $\mathfrak{C}$.

È possibile definire anche in questo caso l'integrale

$$\mathfrak{J}(\textstyle\sum) = (\sum) \iint F(x, p)$$

di $F(x, p)$ su $\sum$. Tale integrale è indipendente dalla rappresentazione di $\sum$ e gode della proprietà espressa dal secondo teorema enunciato nel n. precedente.

Supponiamo che la linea immagine secondo $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ della circonferenza C^* in cui $\mathfrak{C}$ incontra il piano $u^3 = 0$ sia di lunghezza finita (3). Allora, dette S_1 e S_2 le superficie del tipo della 2-cella dedotte da $\sum$ come nel n. **3**, si ha

$$\mathfrak{J}(\textstyle\sum) = \mathfrak{J}(S_1) + \mathfrak{J}(S_2),$$

in particolare si ha

$$a(\textstyle\sum) = a(S_1) + a(S_2).$$

Questo fatto è stato essenzialmente provato da L. CESARI (4).

(3) O, più generalmente, che abbiano misura 2-dimensionale secondo LEBESGUE nulla i sostegni delle curve che si ottengono proiettando sui piani coordinati la linea $(\mathfrak{T}, C^*)$.

(4) Vedasi, ad esempio, la Nota: *Sulle superficie di Fréchet*, Rivista Mat. Univ. Parma **1**, 19-44 (1950).

6. – Siano A, $F(x, p)$, S, $\sum$, $\mathfrak{J}(S)$, $\mathfrak{J}(\sum)$ definiti come nei nn. **3**, **4**, **5**.

Diremo che $\mathfrak{J}(S)$ $[\mathfrak{J}(\sum)]$ è *definito* in A se si ha $F(x, p) > 0$ per ogni $x \in A$ e $|p| \neq 0$. Supponiamo che le derivate $F_s(x, p) = \dfrac{\partial F(x, p)}{\partial p^s}$ $(s = 1, 2, 3)$ esistano e siano continue.

Diremo che $\mathfrak{J}(S)$ $[\mathfrak{J}(\sum)]$ è *quasi regolare positivo* in A se si ha

$$E(x, p, \bar{p}) = F(x, \bar{p}) - \sum_s \bar{p}^s F_s(x, p) \geqslant 0$$

per ogni $x \in A$, $p \neq \bar{p}$, p, $|\bar{p}| \neq 0$.

Diremo che $\mathfrak{J}(S)$ $[\mathfrak{J}(\sum)]$ è *inferiormente semicontinuo* su S_0 $[\sum_0]$, rispetto ad una famiglia $\{S\}$ $[\{\sum\}]$, se per ogni $\varepsilon > 0$ si può determinare un $\delta > 0$ tale che per ogni $S \in \{S\}$ $[\sum \in \{\sum\}]$ per cui è $\| S, S_0 \| < \delta$ $[\| \sum, \sum_0 \| < \delta]$ si abbia

$$\mathfrak{J}(S) > \mathfrak{J}(S_0) - \varepsilon \quad [\mathfrak{J}(\textstyle\sum) > \mathfrak{J}(\textstyle\sum_0) - \varepsilon] .$$

Sussiste il seguente

Teorema (L. Cesari [4]). Se $\mathfrak{J}(S)$ è definito positivo e quasi regolare in A, allora è inferiormente semicontinuo su ogni superficie S_0 per la quale si ha $a(S_0) < \infty$, $[S_0] \subset A$, rispetto ad ogni classe di superficie $\{S\}$ per cui $a(S) < \infty$, $[S] \subset A$.

Un analogo risultato sussiste anche per superficie $\sum$ del tipo della 2-sfera.

7. – Sia S una superficie del tipo della 2-cella, data come nel n. **4**. Diremo che una rappresentazione di S, sia per semplicità la rappresentazione (T, Q): $x = x(v)$, $v \in Q$, considerata nel n. **4**, è *di classe* L_2 se:

a) le funzioni $x^i(u^1, u^2) = x^i(v)$ $(i = 1, 2, 3)$ sono assolutamente continue secondo Tonelli (A.C.T.) su Q,

b) le derivate $x^i_{u^r} = \dfrac{\partial x^i}{\partial u^r}$ $(r = 1, 2;\ i = 1, 2, 3)$ di queste funzioni sono di quadrato integrabile su Q.

Per ogni trasformazione (T, Q) di classe L_2 consideriamo:

$$E = \sum_i (x^i_{u^1})^2 = | x_{u^1} |^2, \quad G = \sum_i (x^i_{u^2})^2 = | x_{u^2} |^2, \quad F = \sum_i x^i_{u^1} x^i_{u^2} = x_{u^1} x_{u^2}$$

e gli integrali

$$D[T, Q] = D[x, Q] = (1/2) \iint_Q (E + F)\, du^1\, du^2,$$

$$I[T, Q] = I[x, Q] = \iint_Q | EG - F |^{1/2}\, du^1\, du^2 = \iint_Q | J |\, du^1\, du^2 .$$

Sussiste il seguente

Teorema (L. CESARI [2]). Se (T, Q): $x = x(v)$, $v \in Q$, è una rappresentazione di classe L_2 di S, allora si ha

$$a(S) = I[x, \ Q] = D[x, \ Q] < +\infty.$$

Diremo che una rappresentazione di S: $x = x(v)$, $v \in Q$, è *quasi conforme* se è di classe L_2 e se inoltre si ha, quasi dappertutto su Q, $E = G$, $F = 0$.

8. – Siano S e (T, Q): $x = x(v)$, $v \in Q$, definite come al n. **4**.

Consideriamo, per ogni $x \in [S]$, l'insieme $T^{-1}(x)$ costituito dai punti $v \in Q$ la cui immagine secondo (T, Q) è in x. L'insieme $T^{-1}(x)$ è chiuso ed i suoi componenti sono continui di Q, eventualmente ridotti a punti.

Diremo che S è *non degenere* se esiste una sua rappresentazione, sia la stessa (T, Q), per la quale i componenti di $T^{-1}(x)$ sono, per ogni $x \in [S]$, tutti ridotti a punti.

Sussiste il seguente

Teorema (C. B. MORREY [7], L. CESARI [2]). Se S è una superficie del tipo della 2-cella non degenere, di area secondo LEBESGUE finita, esiste una sua rappresentazione, sia essa $(\overline{T}, Q)$: $x = \overline{x}(v)$, $v \in Q$, che è quasi conforme. In conseguenza della quasi conformità si ha inoltre

$$a(S) = I[x, \ Q] = D[x, \ Q].$$

9. – Siano $\sum$ e $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ definite come nel n. **3**. Per ogni $x \in [\sum]$ sia $\mathfrak{T}^{-1}(x)$ l'insieme dei punti di $\mathfrak{C}$ la cui immagine secondo $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ è in x.

Diremo che $\sum$ è *non degenere* se esiste una sua rappresentazione, sia la stessa $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$, tale che per ogni $x \in [\sum]$ i componenti dell'insieme chiuso $\mathfrak{T}^{-1}(x)$ sono ridotti a punti.

Diremo che una rappresentazione $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ di una superficie $\sum$, del tipo della 2-sfera, è *quasi conforme* se, per ogni regione di JORDAN $\mathfrak{R}$ di $\mathfrak{C}$ e per ogni rappresentazione conforme $(\Phi, \mathfrak{R})$ di $\mathfrak{R}$ su di una regione di JORDAN r del piano (u^1, u^2), risulta quasi conforme, nel senso del n. **7**, la trasformazione $(\mathfrak{T} \cdot \Phi^{-1}, r)$.

Sussiste il seguente

Teorema (C. B. MORREY [7]). Se $\sum$ è una superficie del tipo della 2-sfera, non degenere, di area secondo LEBESGUE finita, allora esiste una rappresentazione di $\sum$, sia la stessa $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$, che è quasi conforme.

10. – Sussiste il seguente

Teorema. Dati due numeri positivi N, ε, esiste un numero $\eta = \eta(N, \varepsilon)$ che gode della seguente proprietà: ad ogni coppia di trasformazioni continue

$$\{(T_1, Q): x = x_1(v); \quad (T_2, Q): x = x_2(v); \quad v \in Q\},$$

per le quali è $D[x_1, Q] + D[x_2, Q] < N$, possiamo far corrispondere un numero $\delta = \delta[N, \varepsilon, x_1(v), x_2(v)]$, $\eta < \delta < \varepsilon$, ed una suddivisione di Q, mediante corde parallele ai lati di Q, in rettangoli r le cui dimensioni sono comprese fra δ e 2δ, tale che l'immagine di ogni lato di r (che non appartiene a Q^*) secondo (T_i, Q) $(i = 1, 2)$ sia una curva rettificabile di lunghezza $\varepsilon/4$.

Questo teorema si ottiene modificando in modo ovvio la dimostrazione di un analogo teorema di L. C. Young [**9**].

11. – Sussistono i seguenti teoremi (L. Cesari [**5**]), sul secondo dei quali è fondato il procedimento di livellamento del quale faremo uso nel presente lavoro.

Teorema. Sia C una poligonale semplice chiusa in E_3, l la sua lunghezza, π^* un poligono semplice del piano E_2 di (u^1, u^2). Sia $x = x(v)$, $v \in \pi^*$, una rappresentazione quasi lineare di C. Allora esistono una superficie poliedrica S, la cui frontiera $\vartheta(S) = C$, e una sua rappresentazione quasi lineare $S: X = X(v)$, $v \in \pi$, di S su π tali che $X(v) = x(v)$ se $v \in \pi^*$, $a(S) = l^2/4$, $[S]$ appartiene al minimo insieme convesso contenente il sostegno $[C]$ di C.

Teorema. Sia S una superficie poliedrica e $(T, Q): x = x(v)$, $v \in Q$, una rappresentazione quasi lineare di S su Q, sia $C = \vartheta(S)$ la curva contorno di S, sia L la lunghezza di $\vartheta(S)$, sia D una costante $\geqslant$ diam C, sia K una costante > 0, sia $x_0 = x(v_0)$ con $v_0 \in Q^*$.

Allora esiste una superficie poliedrica S_0 ed una rappresentazione quasi lineare $(T_0, Q): x = x_0(v)$, $v \in Q$, dotata delle seguenti proprietà:

a) $[S_0]$ è contenuta in una sfera di centro x_0 e raggio $\varrho \leqslant 2D + 3[K\, a(S)]^{1/2}$.

b) Esiste un insieme aperto $\pi \in Q$, che è la somma $\sum \pi_i$ di un numero finito di poligoni semplici disgiunti π_i $(i = 1, 2, ..., n)$, tale che $x_0(v) = x(v)$ su $Q - \pi$, quindi $x_0(v) = x(v)$ su ogni π_i^* e su Q^*. Indichiamo con σ, σ_0, $[\sigma_i, \sigma_{0i}]$ le superficie poliedriche rappresentate da $x(v)$, $x_0(v)$ su $\pi\,[\pi_i$ $(i = 1, 2, ..., n)]$ e con $a(\sigma)$, $a(\sigma_0)$ le loro aree totali:

$$\sigma = \sum \sigma_i, \qquad \sigma_0 = \sum \sigma_{0i}, \qquad a(\sigma) = \sum a(\sigma_i), \qquad a(\sigma_0) = \sum a(\sigma_{0i}).$$

Ogni superficie σ_{0i} è contenuta nel minimo corpo convesso contenente la curva $\vartheta(\sigma_i) = \vartheta(\sigma_{0i})$. Se, essendo $i = 1, 2, \ldots, n$, indichiamo con p_i le curve $\vartheta(\sigma_i) = \vartheta(\sigma_{0i})$ ed anche le loro lunghezze, indichiamo con $\mathfrak{L}$ la famiglia di curve p_i ed anche la loro lunghezza totale $\mathfrak{L} = \sum p_i$, allora:

c) $\mathfrak{L}^2 = (\sum p_i)^2 \leqslant K^{-1} \cdot a(\sigma)$,

d) $a(\sigma_0) = (1/4) K^{-1} \cdot a(\sigma)$,

e) ogni continuo $c \subset Q$ tale che $c \cdot Q^* \neq 0$, diam$x(c) < D$ è completamente contenuto in $Q - \pi$.

12. – Siano Ω e $\Omega(\delta)$ definiti come nel n. **2**, sia inoltre Ω di classe $[C_\lambda]$.

Un riesame della dimostrazione del secondo Teorema enunciato nel precedente n. ci consente di affermare che se, oltre alle ipotesi ivi fatte, il sostegno $[S]$ della superficie poliedrica S non incontra l'insieme $\Omega(\delta)$ $(\delta < 1/\lambda)$, e si ha $2D + 3[K \cdot a(S)]^{1/2} < 1/(2\lambda)$, allora è possibile anche determinare una superficie poliedrica S_0' ed una sua rappresentazione quasi lineare $x = x_0'(v)$, $v \in Q$, tali che:

a′) $[S_0']$ non incontra $\Omega(\delta)$ ed è contenuta nella sfera di centro x_0 e raggio $\varrho < \{2D + 3[K \cdot a(S)]^{1/2}\}(2\lambda + 1)$.

b′) Essendo π e π_i gli insiemi aperti di cui al b) dell'enunciato precedente, ed essendo σ_0' e σ_{0i}' le superficie poliedriche definite da $x = x_0'(v)$, su π e π_i ciascuna delle superficie σ_{0i}' ha diametro minore di $\lambda \cdot$diam $\vartheta(\sigma_i)$ ed è contenuta nel minimo insieme convesso contenente $\vartheta(\sigma_i)$ oppure dista dalla frontiera $[\Omega(\delta)]^*$ di $\Omega(\delta)$ per meno di $(1 + \lambda) \cdot$diam $\vartheta(\sigma_i)$.

c′) Essendo $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$ la lunghezza complessiva delle curve $\vartheta(\sigma_i) = \vartheta(\sigma_{0i}) = \vartheta(\sigma_{0i}')$ si ha $\mathfrak{L}'^2 \leqslant K^{-1} \cdot a(\sigma)$.

d′) $a(\sigma_0') \leqslant \lambda K^{-1} \cdot a(\sigma)$.

e′) Ogni continuo $c \subset Q$ tale che $c \cdot Q^* \neq 0$, diam $x(c) < D$ è completamente contenuto in $Q - \pi$.

Per la dimostrazione di questa proposizione consideriamo gli insiemi aperti π_i e le superficie poliedriche σ_{0i} su di essi definiti in virtù del Teorema del n. **11.** Per ognuna di tali superficie, sia essa σ_{0i}, che non incontra $\Omega(\delta)$ facciamo $\sigma_{0i}' = \sigma_{0i}$. Sia, invece, per ogni σ_{0i} che incontra $\Omega(\delta)$, σ_{0i}' la superficie poliedrica avente lo stesso contorno di σ_{0i}, non incontrante $\Omega(\delta)$, per la quale si abbia inoltre

$$a(\sigma_{0i}') = \lambda \cdot \{\text{lungh}\ \vartheta(\sigma_{0i})^2\}, \qquad \text{diam}\,[\sigma_{0i}'] = \lambda \cdot \text{diam}\,[\vartheta(\sigma_{0i})]\,.$$

Tale superficie certamente esiste per le ipotesi fatte su Ω e S.

Si vede allora ([5]) che il vettore quasi lineare $x = x_0'(v)$, $v \in Q$, che coincide con $x = x(v)$ su $Q - \pi$ e rappresenta linearmente su ciascun π_i la superficie poliedrica σ_{0i}', soddisfa le condizioni a'), c'), d'), e') dell'enunciato.

Quanto alla condizione b') basta osservare che se σ_{0i} non incontra $\Omega(\delta)$ allora $\sigma_{0i}' = \sigma_{0i}$ e la nostra affermazione discende da Teorema del n. **11**. Se invece σ_{0i} incontra $\Omega(\delta)$ allora si ha, per ogni punto $x \in [\sigma_{0i}']$,

$$d\{x,\ [\Omega(\delta)]^*\} \leqslant d\{x,\ \bar{x}\} \leqslant d\{x,\ \bar{\bar{x}}\} + d\{\bar{\bar{x}},\ \bar{x}\},$$

essendo $\bar{x} \in [\Omega(\delta)]^* \cdot [\sigma_{0i}]$ e $\bar{\bar{x}} \in [\vartheta(\sigma_{0i})]$.

Si ha perciò, in questo caso,

$$d\{x,\ [\Omega(\delta)]^*\} \leqslant \lambda \cdot \operatorname{diam}[\vartheta(\sigma_{0i})] + \operatorname{diam}[\vartheta(\sigma_{0i})]$$

e quindi

$$d\{[\sigma_{0i}'],\ [\Omega(\delta)]^*\} \leqslant (\lambda + 1) \cdot \operatorname{diam}[\vartheta(\sigma_i)].$$

13. – Sia $\mathcal{S}$ un poliedro del tipo della 2-sfera, non degenere, sia $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ una sua rappresentazione quasi conforme.

Per ogni $-1 < \varrho < 1$ sia C_ϱ la circonferenza intersezione di $\mathfrak{C}$ con il piano π_ϱ di equazione $u^3 = \varrho$.

Sia $\gamma(\varrho)$ la linea di Fréchet, non orientata, $(\mathfrak{T}, C_\varrho)$ e sia $l(\varrho)$ la sua lunghezza, eventualmente $+\infty$.

La funzione $l(\varrho)$ è, in virtù di note proprietà della lunghezza, una funzione inferiormente semicontinua, e pertanto misurabile di ϱ in $(-1, +1)$.

Affermo che, in queste condizioni, per almeno un valore di ϱ, $l(\varrho)$ è finito.

A questo scopo mi limito a considerare l'intervallo $(0, 1/2)$ della variabile ϱ.

([5]) Per ciò che concerne a') si osservi che se $x \in [\sigma_{0i}']$ (essendo σ_{0i}' diversa da σ_{0i}), detto $\bar{x} \in [\vartheta(\sigma_{0i}')] = [\vartheta(\sigma_i)] \subset [S_0]$, si ha

$$d\{x_0,\ x\} \leqslant d\{x_0,\ \bar{x}\} + d\{\bar{x},\ x\} \leqslant \{2D + 3[K \cdot a(S)]^{1/2}\} + \lambda \cdot \operatorname{diam}[\vartheta(\sigma_i)] \leqslant$$
$$\leqslant (2\lambda + 1) \cdot \{2D + 3[K \cdot a(S)]^{1/2}\}.$$

Per ciò che concerne d') si tenga presente la Memoria [**5**] di L. Cesari e si utilizzi nel ragionamento dei nn. **22**, **24** di quella Memoria la condizione $[C_\lambda]$.

Sia, come nel n. **3**, $(\Psi_1, \mathfrak{S}_1)$ la trasformazione, conforme, ottenuta proiettando la calotta $u^3 \geqslant 0$ di $\mathfrak{S}$ dal punto $(0, 0, -1)$ sul piano $u^3 = 0$. L'insieme dei punti di $\mathfrak{S}$ per i quali è $0 \leqslant u^3 \leqslant 1/2$ si trasforma nella corona

$$\overline{C}: \qquad \frac{1}{3} \leqslant (u^1)^2 + (u^2)^2 \leqslant 1, \qquad u^3 = 0 .$$

Se diciamo $\mathfrak{L}(r)$ la lunghezza della linea di JORDAN immagine, secondo $(\mathfrak{T}\cdot\Psi_1^{-1}, \overline{C}_r)$, della circonferenza

$$\overline{C}_r: \qquad (u^1)^2 + (u^2)^2 = r^2, \qquad u^3 = 0,$$

è $\mathfrak{L}(r) = l(\varrho)$ con $r = [1 - \varrho^2]^{1/2}/(1 + \varrho)$. Ora si ha, per i nn. **7**, **9** e per la disuguaglianza di SCHWARZ,

$$a(\mathfrak{S}) \geqslant \frac{1}{2} \iint_{\overline{C}} (E + G)\, \mathrm{d}u^1\, \mathrm{d}u^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \left\{ [(\bar{x}_r^1)^2 + (\bar{x}_r^2)^2 + (\bar{x}_r^3)^2] + \frac{1}{r^2} [(\bar{x}_\theta^1)^2 + (\bar{x}_\theta^2)^2 + (\bar{x}_\theta^3)^2] \right\} r\, \mathrm{d}\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [(\bar{x}_\theta^1)^2 + (\bar{x}_\theta^2)^2 + (\bar{x}_\theta^3)^2]\, \mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \mathrm{d}r \left\{ \int_0^{2\pi} [(\bar{x}_\theta^1)^2 + (\bar{x}_\theta^2)^2 + (\bar{x}_\theta^3)^2]^{1/2}\, \mathrm{d}\theta \right\}^2 \geqslant \frac{1}{8\pi} \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \mathfrak{L}^2(r)\, \mathrm{d}r,$$

essendo $(\mathfrak{T}\cdot\Psi_1^{-1}, \overline{C}): x = \bar{x}(r, \theta) = [\bar{x}^1(r, \theta), \bar{x}^2(r, \theta), \bar{x}^3(r, \theta)], (r, \theta) \in \overline{C}$.

Da questa, in virtù di noti teoremi sulla integrazione, discende il nostro asserto.

14. – Sia $\mathfrak{P}$ un poliedro di tipo della 2-sfera, sia $(\mathfrak{T}, \mathfrak{S}): x = x(u), u \in \mathfrak{S}$, una sua rappresentazione quasi conforme sulla sfera.

Per ogni $-1 < \varrho < 1$ sia C_ϱ la circonferenza intersezione di $\mathfrak{S}$ con il piano π_ϱ di equazione $u^3 = \varrho$. Siano $\mathfrak{S}_{1,\varrho}$ e $\mathfrak{S}_{2,\varrho}$ le regioni di JORDAN di $\mathfrak{S}$ sulle quali è, rispettivamente, $u^3 > \varrho$, $u^3 < \varrho$.

Consideriamo la trasformazione continua $(\Psi_\varrho, \mathfrak{S})$ di $\mathfrak{S}$ in se stessa che è definita nella seguente maniera.

Sia $(\Psi_{1\varrho}, \mathfrak{C}_{1\varrho})$ la proiezione di $\mathfrak{C}_{1\varrho}$ dal punto $(0, 0, -1)$ sul piano $u^3 = 0$.

Sia $\overline{C}_{1\varrho}$ il cerchio immagine di $\mathfrak{C}_{1\varrho}$ secondo $(\Psi_{1\varrho}, \mathfrak{C}_{1\varrho})$. Sia $(\overline{\Psi}_\varrho, \overline{C}_{1\varrho})$ la rappresentazione conforme di $\overline{C}_{1\varrho}$ nel cerchio C del piano $u^3 = 0$ che si ottiene facendo corrispondere ad ogni punto $(u^1, u^2, 0) \in \overline{C}_{1\varrho}$ il punto $(hu^1, hu^2, 0) \in C$, essendo h il rapporto fra 1 e il raggio di $\overline{C}_{1\varrho}$.

Per ogni $u \in C_{1\varrho}$ sia allora $\Psi_\varrho(u) = \Psi_1^{-1} \cdot \overline{\Psi}_\varrho \cdot \Psi_{1\varrho}(u)$.

In modo analogo sia definito $\Psi_\varrho(u)$ se $u \in \mathfrak{C}_2$.

Osserviamo che $(\mathfrak{T} \cdot \Psi_\varrho, \mathfrak{C})$ costituisce una nuova rappresentazione quasi conforme (6) del poliedro $\mathcal{S}$.

15. – Dalle proposizioni dei nn. **13**, **14** discende la seguente:

Sia $\mathcal{S}$ un poliedro non degenere, del tipo della 2-sfera, sia $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ una sua rappresentazione quasi conforme.

Siano, per ogni $-1 < \varrho < 1$, $S_{1,\varrho}$ e $S_{2,\varrho}$ i due poliedri del tipo della 2-cella rappresentati rispettivamente da $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C}_{1\varrho})$ e $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C}_{2\varrho})$. Si ha allora

$$a(\mathcal{S}) = a(S_{1\varrho}) + a(S_{2\varrho}) .$$

Osserviamo che questa è senz'altro vera se si ha, con le notazioni del n. **13**, $l(\varrho) < +\infty$. Basta infatti in tal caso effettuare la costruzione del n. precedente e tenere presente l'osservazione in fine del n. **5**.

Nel caso generico la nostra affermazione discende dal caso particolare considerato, dall'osservazione del n. **14** e dal Teorema enunciato in fine del n. **7** (7).

---

(6) Qui utilizziamo la seguente nota proprietà: Se J_1, J_2, J_3 sono regioni di JORDAN (appartenenti ad un piano o ad una sfera) e se (T_1, J_1) è una rappresentazione conforme di J_1 su J_2, (T_2, J_2) è una rappresentazione conforme di J_2 su J_3, allora (T_2T_1, J_1) è una rappresentazione conforme di J_1 su J_3.

(7) Abbiamo infatti, detto $\overline{\varrho}$ un valore tale che $l(\overline{\varrho}) < \infty$ e supposto $\overline{\varrho} < \varrho$,

$$\begin{aligned} a(\mathcal{S}) &= a(S_{1\overline{\varrho}}) + a(S_{2\overline{\varrho}}) = (1/2) \iint\limits_{C_1(\overline{\varrho})} (E + G)\, du^1\, du^2 + (1/2) \iint\limits_{C_2(\overline{\varrho})} (E + G)\, du^1\, du^2 = \\ &= (1/2) \iint\limits_{C_1(\varrho)} (E + G)\, du^1\, du^2 + (1/2) \iint\limits_{C_1(\varrho, \overline{\varrho})} (E + G)\, du^1\, du^2 + (1/2) \iint\limits_{C_2(\overline{\varrho})} (E + G)\, du^1\, du^2 = \\ &= a(S_{1\varrho}) + (1/2) \iint\limits_{C_2(\overline{\varrho}, \varrho)} (E + G)\, du^1\, du^2 + (1/2) \iint\limits_{C_2(\overline{\varrho})} (E + G)\, du^1\, du^2 = \\ &= a(S_{1\varrho}) + (1/2) \iint\limits_{C_2(\varrho)} (E + G)\, du^1\, du^2 = a(S_{1\varrho}) + a(S_{2\varrho}), \end{aligned}$$

essendo $C_1(\varrho)$, $C_1(\overline{\varrho})$, $C_1(\varrho, \overline{\varrho})$ $[C_2(\varrho)$, $C_2(\overline{\varrho})$, $C_2(\overline{\varrho}, \varrho)]$ le proiezioni delle regioni di $\mathfrak{C}$ nelle quali è rispettivamente $u^3 > \varrho$, $u^3 > \overline{\varrho}$, $\overline{\varrho} < u^3 < \varrho$ $[u^3 < \varrho$, $u^3 < \overline{\varrho}$, $\overline{\varrho} < u^3 < \varrho]$ sopra il piano $u^3 = 0$ ed essendo E, G definite come nel n. **7**.

17. – Sussiste il seguente

Teorema. *Sia $\mathscr{S}$ un poliedro del tipo della 2-sfera, non degenere. Allora esiste una sua rappresentazione* $(\overline{\mathfrak{T}}, \mathfrak{C}): x = x(u)$, $u \in \mathfrak{C}$, *quasi conforme, per la quale si ha:*

$$a[(\overline{\mathfrak{T}}, \mathfrak{C}_i)] = (1/2)a(\mathscr{S}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

essendo $\mathfrak{C}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ *le porzioni di* $\mathfrak{C}$ *sulle quali si ha rispettivamente* $u^3 > 0$, $u^3 < 0$, $u^2 > 0$, $u^2 < 0$, $u^1 > 0$, $u^1 < 0$, *ed essendo* $a[(\overline{\mathfrak{T}}, \mathfrak{C}_i)]$ *l'area della superficie definita da* $(\overline{\mathfrak{T}}, \mathfrak{C})$ *su* $\mathfrak{C}_i$.

Dimostrazione. Siano $(\Psi_1, \mathfrak{C}_1)$ e $(\Psi_2, \mathfrak{C}_2)$ le trasformazioni conformi, definite nel n. **3**, di $\mathfrak{C}_1$ e $\mathfrak{C}_2$ sul cerchio unitario C del piano $u^3 = 0$.

Consideriamo le trasformazioni $(\mathfrak{T} \cdot \Psi_1^{-1}, C)$, $(\mathfrak{T} \cdot \Psi_2^{-1}, C)$ le quali rappresentano conformemente su C i poliedri S_1 e S_2 definiti da $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ su $\mathfrak{C}_1$ e $\mathfrak{C}_2$ rispettivamente.

Per il n. **15** e per i nn. **7**, **9** avremo:

$$a(\mathscr{S}) = a(S_1) + a(S_2) = (1/2) \iint_C (E_1 + G_1)\, du^1\, du^2 + (1/2) \iint_C (E_2 + G_2)\, du^1\, du^2,$$

essendo E_1, G_1, E_2, G_2 definite come nel n. **7** in relazione a $(\mathfrak{T} \cdot \Psi_1^{-1}, C)$ e $(\mathfrak{T} \cdot \Psi_2^{-1}, C)$.

Per ogni $0 < \varrho < 1$ sia $C(\varrho)$ il cerchio concentrico a C e raggio ϱ; sia $F_i(\varrho)$ la funzione così definita:

$$F_i(\varrho) = \frac{1}{2} \iint_{C(\varrho)} (E_i + G_i)\, du^1\, du^2 .$$

La funzione

$$F(z) = \begin{cases} F_1(z) & \text{se} \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ F_1(1) + F_2(z-1) & \text{se} \quad 1 \leqslant z \leqslant 2 \end{cases}$$

è continua e non decrescente in $(0, 2)$ e tale che

$$F(0) = 0, \qquad F(2) = a(\mathscr{S}) .$$

Esiste perciò un valore $0 < \bar{z} < 2$ tale che $F(\bar{z}) = (1/2)\, a(\mathscr{S})$.

Sia $\bar{\varrho}$ il valore $\in(-1, 1)$ che si ottiene da $\bar{z}$ nella seguente maniera. Se $0 < \bar{z} < 1$, allora $\bar{\varrho}$ è la coordinata u^3 dei punti di $\mathfrak{C}$ che sono immagini di $[C(z)]^*$ secondo (Ψ_1^{-1}, C), altrimenti $\bar{\varrho}$ è la terza coordinata dei punti di $\mathfrak{C}$ che sono immagini dei punti di $[C(z)]^*$ secondo (Ψ_2^{-1}, C).

Sia quindi $(\bar{\bar{\mathfrak{T}}}, \mathfrak{C})$ la rappresentazione quasi conforme di $\mathcal{S}$ che si ottiene da $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ operando come nel n. **14** a partire dal valore $\bar{\varrho}$.

Risulterà intanto, per il n. **15**,

$$a[(\bar{\bar{\mathfrak{T}}}, \mathfrak{C}_5)] = (1/2)a(\mathcal{S}), \qquad a[(\bar{\bar{\mathfrak{T}}}, \mathfrak{C}_6)] = a(\mathcal{S}) - (1/2)a(\mathcal{S}) = (1/2)a(\mathcal{S}).$$

Giunti a questo punto permutiamo circolarmente per due volte consecutive l'ufficio delle coordinate u^1, u^2, u^3 e ripetiamo tutte le operazioni effettuate finora su u^3.

Ciascuna di queste operazioni lascia invariato il segno delle rimanenti due coordinate di ciascun punto di $\mathfrak{C}$.

Il nostro Teorema è così provato.

Dimostrazione del Teorema del n. 2.

17. – La funzione $F(x, p)$ è, in virtù delle ipotesi, continua nell'insieme chiuso e limitato I costituito dai punti (x, p) per i quali $x \in A$, $|p| = [(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2]^{1/2} = 1$. Inoltre è $F(x, p) > 0$ per ogni $(x, p) \in I$. Siano m e M il minimo e il massimo di $F(x, p)$ in I. Sarà $0 < m \leqslant F(x, p) \leqslant M$ per $(x, p) \in I$ e perciò, in virtù della condizione b) del n. **4**, si avrà, per ogni (x, p) $(x \in A$, $|p| \neq 0)$, $0 < m|p| \leqslant F(x, p) \leqslant M|p|)$.

Sarà perciò possibile, come nella Memoria [**5**] di L. CESARI, prolungare la funzione $F(x, p)$ fino ad una funzione $F_0(x, p)$ definita per ogni $x \in E_3$, $|p| \neq 0$ in modo che $F_0(x, p)$ sia continua per ogni (x, p) con $p \neq 0$ e si abbia:

a) $\quad 0 < m \leqslant F_0(x, p) \leqslant M \qquad$ per ogni $x \in E_3$, $|p| = 1$,

b) $\quad F_0(x\, p) = |p| \cdot F_0(x, p/|p|) \qquad$ per ogni $x \in E_3$, $|p| \neq 0$.

Osserviamo che in conseguenza delle definizione di $\mathfrak{I}(S)$ e $\mathfrak{I}(\sum)$ si avrà, per ogni superficie S e $\sum$ di area finita,

$$0 < ma(S) \leqslant \mathfrak{I}(S) \leqslant Ma(S),$$

$$0 < ma(\textstyle\sum) \leqslant \mathfrak{I}(\sum) \leqslant Ma(\sum).$$

18. – Siano Ω e A definiti come nel n. **2**.

Sia, per ogni $\delta \geqslant 0$, $A(\delta)$ l'insieme convesso chiuso formato da tutti i punti di E_3 la cui distanza da A è $\leqslant \delta$. Sarà $A(\delta) \supset A$, $A(0) = A$. Sia, per ogni $\delta \geqslant 0$, $\Omega(\delta)$ l'insieme aperto, eventualmente vuoto, costituito da tutti i punti di E_3 che appartengono ad Ω e che distano dalla frontiera Ω^* di Ω per più di δ. Sarà $\Omega(\delta) \subset \Omega$, $\Omega(0) = \Omega$.

Sia, per ogni $\delta \geqslant 0$, $W(\delta)$ la famiglia costituita da tutte le superficie $\sum$, del tipo della 2-sfera, tali che $[\sum] \subset A(\delta)$, $O(x, \sum) \neq 0$ se $x \in \Omega(\delta)$.

Si ha, per ogni $\delta \geqslant 0$, $W(0) \subset W(\delta)$, $W(0) = W$, donde si deduce in particolare che ciascuna delle famiglie $W(\delta)$ non è vuota. Si ha infine $W(\delta') \supset W(\delta)$ se $0 \leqslant \delta \leqslant \delta'$.

Indichiamo con i e $j(\delta)$ gli estremi inferiori di $\mathfrak{I}(\sum)$ quando $\sum \in W$ oppure $\sum \in W(\delta)$.

Risulterà, per ogni $0 \leqslant \delta \leqslant \delta'$, $j(\delta') \leqslant j(\delta) \leqslant i$. Esisterà perciò $\lim_{\delta \to 0+} j(\delta) = j \leqslant i$.

Sia $\lambda^* > 0$ la distanza di Ω^* da A^*. Sia $\lambda > 1$ il numero di cui alla definizione di classe $[C_\lambda]$. Sia $2\bar{\delta} > 0$ il raggio di una sfera tutta contenuta in Ω. Siano M e m definiti come nel n. precedente.

Sia, per ogni $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\varepsilon_n = \frac{\min [2^{-n}, \lambda^*, \bar{\delta}]}{60 [\max (\lambda, M/m)]^3}, \qquad \mu_n = \min \left\{ (n+2)^{-1} \cdot 2^{-(n+2)},\ 2^{-2} M \lambda \varepsilon_n^2,\ \frac{1}{6} m \bar{\delta}^2 \right\},$$

sia $0 < \delta_n < \min \left(\frac{1}{2} \bar{\delta}, \frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{n} \right)$ tale che risulti $j(2\delta_n) > j - \mu_n$.

19. – Sia, per ogni $n = 1, 2, \ldots$, $\sum_n \in W(\delta_n)$ tale che

$$j(\delta_n) \leqslant \mathfrak{I}(\textstyle\sum_n) \leqslant j(\delta_n) + \mu_n .$$

Sarà possibile determinare, per ogni $n = 1, 2, \ldots$, un poliedro $P_n \in W(2\delta_n)$, non degenere, in modo che risulti (8)

$$| \mathfrak{I}(\textstyle\sum_n) - \mathfrak{I}(\mathcal{P}_n) | < \mu_n ,$$

e quindi

$$j - \mu_n < j(2\delta_n) = \mathfrak{I}(\mathcal{P}_n) \leqslant j(\delta_n) + 2\mu_n \leqslant j + 2\mu_n .$$

---

(8) Basterà tenere presente il Teorema di Poincaré-Borel [**1**], il secondo teorema ricordato nel n. **4** e modificare eventualmente la posizione di qualche vertice.

Risulterà inoltre, per ogni n,

$$a(\mathcal{S}_n) \leqslant (1/m)\mathfrak{J}(\mathcal{S}_n) \leqslant (1/m)\,(j+1)\,.$$

20. – Ciascuna delle superficie poliedriche della successione $\{\mathcal{S}_n\}$ ora costruita è non degenere ed ha area ([9]) $a(\mathcal{S}_n) \geqslant 4\pi\bar{\delta}^2$.

È pertanto possibile (n. **16**) ottenere, per ogni n, una rappresentazione conforme di $\mathcal{S}_n$, sia essa $(\mathfrak{T}_n,\ \mathfrak{C}) : x = x_n(u),\ u \in \mathfrak{C}$, per la quale risulti

$$a(\mathfrak{T}_n,\ \mathfrak{C}_i) \geqslant 2\pi\bar{\delta}^2 \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ 6),$$

essendo $\mathfrak{C}_i$ $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ 6)$ definite come nel n. **16**.

A partire dalla successione $(\mathfrak{T}_n,\ \mathfrak{C})$ $(n = 1,\ 2,\ \dots)$ ora costruita, formiamo una successione di coppie di trasformazioni, del tipo della 2-cella, $\{(T_{1n},\ Q),\ (T_{2n},\ Q),\ (n = 1,\ 2,\ \dots)\}$, ottenute ponendo

$$(T_{in},\ Q) = (\mathfrak{T}_n \cdot \Psi_i^{-1} T,\ Q) \quad (i = 1,\ 2),$$

essendo $(\Psi_i,\ \mathfrak{C}_i)$ $(i = 1,\ 2)$, $(T,\ Q)$ le trasformazioni continue definite nel n. **3**.

Se indichiamo S_{1n} e S_{2n} le superficie poliedriche rappresentate da $(T_{1n},\ Q)$ e $(T_{2n},\ Q)$ $(n = 1,\ 2, \dots)$, rispettivamente, avremo

$$a(S_{1n}) + a(S_{2n}) = a(\mathcal{S}_n) \leqslant (j+1)/m\,.$$

Indichiamo con $\tau > 0$ un numero tale che se $v', v'' \in Q$ ed è $d\{v',\ v''\} < \tau$ risulti $\pi/8$ la distanza sferica $d_s\{\Psi_i(v'),\ \Psi_i(v'')\}$ dei punti $\Psi_i(v')$, $\Psi_i(v'')$, $(i = 1,\ 2)$, su $\mathfrak{C}$.

21. – Applichiamo il Lemma del n. **10** alla successione di coppie di trasformazioni

$$\{T_{1n},\ Q) : x = x_{1n}(v),\ v \in Q; \quad (T_{2n},\ Q) : x = x_{2n}(v),\ v \in Q; \quad (n = 1,\ 2,\ \dots)\}$$

considerate nel n. precedente.

([9]) In virtù della ipotesi che $\mathcal{S}_n$ avvolge $\Omega(2\delta_n)$ e della disuguaglianza isoperimetrica spaziale. Per questa disuguaglianza cfr.: T. Radó, *The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area*, Trans. Amer. Math. Soc. **61**, 530-555 (1947).

Indichiamo con ν un generico intero ($\nu = 1, 2, \ldots$) e con $\xi_\nu > 0$ un numero reale. Facendo, nel Lemma del n. **10**, $\varepsilon = \xi_\nu$ possiamo determinare per ogni ν i numeri reali $\eta_\nu > 0$, $\delta_{n\nu} > 0$, $\eta_\nu < \delta_{n\nu} < \xi_\nu$ e suddivisioni $\Delta_{n\nu}$ di Q, mediante corde parallele ai lati di Q, in rettangoli r le cui dimensioni sono comprese fra $\delta_{n\nu}$ e $2\delta_{n\nu}$ tali che l'immagine di ogni lato dei rettangoli $r \in \Delta_{n\nu}$, non su Q^*, secondo (T_{1n}, Q) oppure (T_{2n}, Q), sia una curva di lunghezza $< \xi_\nu/4$. Osserviamo che η_ν dipende unicamente da ν.

Facciamo

$$\xi_\nu = \min\left\{\tau/2,\ \delta_\nu,\ \varepsilon_\nu,\ \eta_{\nu-1}/2^3,\ \eta_{\nu-2}/2^4,\ \ldots,\ \eta_1/2^{\nu+1}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Osserviamo, come nella Memoria [**5**] di L. Cesari, che per ogni ν le dimensioni dei rettangoli $r \in \Delta_{n\nu}$ sono comprese fra η_ν e $\eta_{\nu-1}$, perciò esse sono minori delle dimensioni dei rettangoli $r \in \Delta_{n,\nu-1}$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Osserviamo anche che le immagini secondo (T_{in}, Q) ($i = 1, 2$; $n = 1, 2, \ldots$) dei lati non su Q^* dei rettangoli $r \in \Delta_{n\nu}$ sono perciò archi di lunghezza $< \varepsilon_\nu/4$.

22. – Sia $n = 1, 2, \ldots$ e sia $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Per ogni $r \in \Delta_{n\nu}$ che non incontra Q^* consideriamo le due regioni di Jordan $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{S}$ che sono rispettivamente immagini di r secondo le trasformazioni $(\Psi_1^{-1} \cdot T, Q)$ e $(\Psi_2^{-1} \cdot T, Q)$ considerate nel n. **3**.

Per ogni rettangolo $r \in \Delta_{n\nu}$ che incontra Q^* consideriamo la regione di Jordan $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{S}$ che si ottiene saldando lungo la linea $\Psi_1^{-1} T(r^* \cdot Q^*) = \Psi_2^{-1} T(r^* \cdot Q^*)$ le regioni di Jordan di $\mathfrak{S}$ che sono immagini di r secondo $(\Psi_1^{-1} \cdot T, Q)$ e $(\Psi_2^{-1} \cdot T, Q)$ rispettivamente.

La sfera $\mathfrak{S}$ risulta così decomposta per ogni n e $\nu \leqslant n$ in un gruppo finito di regioni di Jordan $\mathfrak{R}$. Diciamo $\bar{\Delta}_{n\nu}$ tale decomposizione di $\mathfrak{S}$.

Per ogni regione $\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n\nu}$ consideriamo la superficie poliedrica $\sum$ del tipo della 2-cella, definita su $\mathfrak{R}$ da $(\mathfrak{T}_n, \mathfrak{S})$.

Vogliamo provare che si ha

$$a(\textstyle\sum) \leqslant 5\lambda\varepsilon_\nu^2 M/m.$$

23. – Consideriamo in questo n. il caso in cui $\mathfrak{R}$ provenga, nel modo descritto nel n. precedente, da un rettangolo $r \in \Delta_{n\nu}$ che non incontra Q^*.

La superficie $\sum$ è in questo caso la superficie definita su r dalla trasformazione (T_{1n}, Q) oppure dalla (T_{2n}, Q).

Dimostriamo dapprima che esiste una superficie poliedrica $\overline{\sum}$, avente il medesimo contorno di $\sum$, per la quale risulta

$$a(\overline{\textstyle\sum}) \leqslant 4\lambda\varepsilon^2, \qquad [\overline{\textstyle\sum}] \subset A(2\delta_n) - \Omega(2\delta_n).$$

A questo scopo osserviamo che se il sostegno $[\overline{\overline{\sum}}]$ della superficie poliedrica $\overline{\overline{\sum}}$, ottenuta applicando il primo teorema del n. **11** alla linea contorno di $\sum$, non incontra $\Omega(2\delta_n)$, allora facendo $\overline{\sum} = \overline{\overline{\sum}}$ le condizioni richieste sono verificate.

Se invece $\overline{\overline{\sum}}$ incontra $\Omega(2\delta_n)$, è possibile, poichè il contorno di $\sum$ ha lunghezza $< 1/\lambda$, poichè Ω è di classe $[C_\lambda]$ e poichè $2\delta_n < 1/\lambda$, costruire una superficie $\overline{\sum}$ che non incontra $\Omega(2\delta_n)$ e per la quale si ha

$$a(\overline{\sum}) \leqslant 4\lambda\varepsilon_\nu^2, \qquad \operatorname{diam}[\overline{\sum}] < 2\lambda\varepsilon_\nu .$$

Risulta pertanto, per ogni $x \in [\overline{\sum}]$,

$$d\{x,\ [\Omega(2\delta_n)]^*\} \leqslant d\{x,\ \bar{\bar{x}}\} + d\{\bar{\bar{x}},\ \bar{x}\},$$

essendo $\bar{x} \in [\Omega(2\delta_n)]^* \cdot [\overline{\overline{\sum}}]$ e $\bar{\bar{x}} \in [\vartheta(\sum)]$, dalla quale si deduce

$$d\{x,\ [\Omega(2\delta_n)]^*\} \leqslant 2\lambda\varepsilon_\nu + 2\varepsilon_\nu = 4\lambda\varepsilon_\nu < \lambda^*,$$

e quindi che $[\overline{\sum}] \subset A \subset A(2\delta_n)$.

Indichiamo con $(\mathfrak{T}'_{n\nu},\ \mathfrak{R}) : x = x'_{n\nu}(u)$, $u \in \mathfrak{R}$, una rappresentazione continua di $\overline{\sum}$ su $\mathfrak{R}$ per la quale risulti $x'_{n\nu}(u) = x_n(u)$ se $u \in \mathfrak{R}^*$; indichiamo con $(\mathfrak{T}''_{n\nu},\ \mathfrak{C} - \mathfrak{R}) : x = x''_{n\nu}(u)$, $u \in \mathfrak{C} - \mathfrak{R}$, una rappresentazione continua di $\overline{\sum}$ su $\mathfrak{C} - \mathfrak{R}$ per la quale risulti ancora $x''_{n\nu}(u) = x_n(u)$ se $u \in \mathfrak{R}^*$.

Sia $\mathcal{S}_n^*$ il poliedro del tipo della 2-sfera che è rappresentato dalla trasformazione $(\mathfrak{T}_n^*,\ \mathfrak{C})$ coincidente con $(\mathfrak{T}_n,\ \mathfrak{C})$ su $\mathfrak{C} - \mathfrak{R}$ e $(\mathfrak{T}'_{n\nu},\ \mathfrak{R})$ su $\mathfrak{R}$; sia $\mathcal{S}_n^{**}$ il poliedro del tipo della 2-sfera che è rappresentato dalla trasformazione $(\mathfrak{T}_{n\nu}^{**},\ \mathfrak{C})$ coincidente con $(\mathfrak{T}_n,\ \mathfrak{C})$ su $\mathfrak{R}$ e con $(\mathfrak{T}''_{n\nu},\ \mathfrak{C} - \mathfrak{R})$ su $\mathfrak{C} - \mathfrak{R}$.

Dimostriamo che $\mathcal{S}_n^* \in W(2\delta_n)$. Poichè dal ragionaento di sopra segue che $[\mathcal{S}_n^*] \subset A(2\delta_n)$, rimane solo da provare che per ogni $x \in \Omega(2\delta_n)$ si ha $O(x,\ \mathcal{S}_n^*) \neq 0$.

Osserviamo che i sostegni $[\mathcal{S}_n^*]$ e $[\mathcal{S}_n^{**}]$ dei poliedri $\mathcal{S}_n^*$ e $\mathcal{S}_n^{**}$ non incontrano l'insieme connesso $\Omega(2\delta_n)$, di modo che gli indici topologici $O(x,\ \mathcal{S}_n^*)$ e $O(x,\ \mathcal{S}_n^{**})$ si conservano invariati al variare di x in $\Omega(2\delta_n)$. Osserviamo inoltre che, per note proprietà dell'indice topologico, si ha

$$O(x,\ \mathcal{S}_n) = O(x,\ \mathcal{S}_n^*) + O(x,\ \mathcal{S}_n^{**}), \qquad \text{se } x \in \Omega(2\delta_n).$$

La nostra affermazione sarà così provata non appena si sarà provato che per ogni $x \in \Omega(2\delta_n)$ si ha $O(x,\ \mathcal{S}_n^{**}) = 0$.

Ora ove fosse $O(x,\ \mathcal{S}_n^{**}) \neq 0$, per ogni $x \in \Omega(2\delta_n)$, poichè $[\mathcal{S}_n^{**}] \subset A(2\delta_n)$, si avrebbe $\mathcal{S}_n^{**} \in W(2\delta_n)$; e ciò è assurdo.

Infatti, in tal caso dovremo avere

$$\mathfrak{I}(\mathcal{S}_n^{**}) \geqslant j(2\delta_n),$$

mentre, per essere $J(\sum)$ definito positivo in A e per essere $a(\mathcal{S}_n - \sum) \geqslant 2\pi\bar{\delta}^2 \geqslant \bar{\delta}^2$, si ha (cfr. n. **20**) ([10])

$$\mathfrak{I}(\mathcal{S}_n^{**}) = \mathfrak{I}(\textstyle\sum) + \mathfrak{I}(\overline{\textstyle\sum}) = \mathfrak{I}(\mathcal{S}_n) - \mathfrak{I}(\mathcal{S}_n - \textstyle\sum) + \mathfrak{I}(\overline{\textstyle\sum}) \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{I}(\mathcal{S}_n) - ma(\mathcal{S}_n - \textstyle\sum) + Ma(\overline{\textstyle\sum}) \leqslant j + 2\mu_n - m\bar{\delta}^2 + 4M\lambda\varepsilon_\nu^2 \leqslant j - \mu_n < j(2\delta_n),$$

poichè risulta

$$3\mu_n \leqslant m\bar{\delta}^2/2, \qquad \varepsilon_\nu^2 \leqslant m\bar{\delta}^2/(8M\lambda) .$$

Abbiamo così provato che $\mathcal{S}_n^* \in W(2\delta_n)$.

Possiamo ora provare che, nel caso considerato all'inizio del n. **23**, si ha $a(\sum) \leqslant 5M\lambda\varepsilon_\nu^2/m$.

Ove fosse infatti $a(\sum) > 5M\lambda\varepsilon_\nu^2/m$ dovremmo avere, con le medesime notazioni,

$$j(2\delta_n) \leqslant \mathfrak{I}(\mathcal{S}_n^*) \leqslant \mathfrak{I}(\mathcal{S}_n) - \mathfrak{I}(\textstyle\sum) + \mathfrak{I}(\overline{\textstyle\sum}) = j + 2\mu_n - ma(\textstyle\sum) + Ma(\overline{\textstyle\sum}) <$$

$$< j + 2\mu_n - 5M\lambda\varepsilon_\nu^2 + 4M\lambda\varepsilon_\nu^2 \leqslant j + 2\mu_n - M\lambda\varepsilon_\nu^2 ,$$

e quindi, per il n. **16** e per essere $\nu \leqslant n$,

$$j - \mu_\nu \leqslant j - \mu_n \leqslant \mathfrak{I}(\mathcal{S}_n^*) < j + 2\mu_n - M\lambda\varepsilon_\nu^2 \leqslant j + 2\mu_\nu - M\lambda\varepsilon_\nu^2 \leqslant j - 2\mu_\nu$$

che è contradittoria.

24. – Nel caso rimanente la dimostrazione si conduce alla stessa maniera. Basta solo osservare che anche in questo caso il contorno di $\sum$ ha lunghezza $< 2\varepsilon_\nu$ e che è ancora valida la disuguaglianza $a(\mathcal{S}_n - \sum) > \bar{\delta}^2$ per il modo come si è scelto τ nel n. **20** e per la rappresentazione di $\mathcal{S}_n$ adottata nello stesso n. **20**.

([10]) Si tenga anche presente la proprietà additiva di $J(S)$ citata in fine del n. **5**.

25. – Per ogni $n = 1, 2, \ldots$ e $\nu = 1, 2, \ldots, n$ sia $\bar{\Delta}_{n\nu}$ la decomposizione di $\mathfrak{C}$ in regioni di JORDAN $\mathfrak{R}$ considerata nel n. **22**.

Per ogni $\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n\nu}$ facciamo applicazione (11) del Lemma del n. **12** alla superficie poliedrica S, definita su $\mathfrak{R}$ da $(\mathfrak{T}_n, \mathfrak{C})$, in relazione ad un punto $\mathfrak{T}_n(u)$, $u \in \mathfrak{R}^*$, $K = 4\lambda M/m$, $D = 2\varepsilon_\nu$.

Ciò è possibile poichè, per quanto si è visto nei nn. **21** e **22**, si ha $2D + 3[K \cdot a(S)]^{1/2} < 1/(2\lambda)$.

Indichiamo con $\mathfrak{T}_{n\nu}$ la classe delle regioni aperte semplici di JORDAN $\bar{\pi} \subset \mathfrak{R}$ definite in ordine al Lemma del n. **12** sulla regione $\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n\nu}$. In accordo con il Lemma del n. **12** ciascuna di queste regioni $\bar{\pi}$ è interna a $\mathfrak{R}$.

Sia $(\mathfrak{T}_{n\nu}, \mathfrak{C}) : x = x_{n\nu}(u)$, $u \in \mathfrak{C}$, la trasformazione continua definita mediante l'applicazione del Lemma di livellamento, introdotto nel n. **12**, ad ognuna delle regioni $\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n\nu}$.

Per ogni $\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n\nu}$ siano $\bar{\sigma}$ e $\bar{\sigma}_0$ le famiglie di superficie poliedriche $\bar{\sigma}_i$, $\bar{\sigma}_{0i}$ definite sulle regioni di JORDAN $\bar{\pi} \in \mathfrak{T}_{n\nu}$, $\bar{\pi} \subset \mathfrak{R}$, dalle trasformazioni $(\mathfrak{T}_n, \mathfrak{C})$ e $(\mathfrak{T}_{n\nu}, \mathfrak{C})$ rispettivamente. Per ciascuna di tali superficie $\bar{\sigma}_i$, $\bar{\sigma}_{0i}$ si ha $\vartheta(\bar{\sigma}_i) = \vartheta(\bar{\sigma}_{0i})$.

26. – Per ogni $n = 1, 2, \ldots$ e $\nu = 1, 2, \ldots, n$ sia $\mathcal{S}_n$ la superficie poliedrica del tipo della 2-sfera definita dalla trasformazione $(\mathfrak{T}_{n\nu}, \mathfrak{C})$ considerata nel n. precedente.

Vogliamo provare che $\mathcal{S}_{n\nu} \in W(2\delta_n)$. Basterà allo scopo provare che $[\mathcal{S}_{n\nu}] \subset A(2\delta_n)$ e che per ogni $x \in \Omega(2\delta_n)$ si ha $O(x, \mathcal{S}_{n\nu}) \neq 0$.

Per ciò che concerne la prima parte della nostra affermazione osserviamo che questa discende dalla condizione b') del Teorema del n. **12**, in quanto che il sostegno $[\bar{\sigma}_{0i}]$ di ciascuna delle superficie σ_{0i} della famiglia $\bar{\sigma}_0$ appartiene al minimo insieme convesso contenente $\vartheta(\bar{\sigma}_{0i})$ e perciò a $A(2\delta_n)$, oppure in quanto che, per essere

$$2 \ \mathrm{diam}\,[\mathfrak{T}_n(\mathfrak{R}^*)] + 3[Ka(\mathfrak{T}_n, \ \mathfrak{R})]^{1/2} = \{4 + 15M\lambda/m\}\,\varepsilon_\nu < 1/(2\lambda),$$

si ha, dal medesimo n. **12** e dal n. **16**,

$$d\{[\bar{\sigma}_{0i}], \ [\Omega(2\delta_n)]^*\} < (\lambda + 1)\ \mathrm{diam}\,[\vartheta(\bar{\sigma}_{0i})] \leqslant 2\lambda\{4 + 15M/m\}\,\varepsilon_\nu < \lambda^*,$$

ciò che prova, in virtù della definizione di λ^*, che $[\bar{\sigma}_{0i}] \subset A \subset A(2\delta_n)$.

(11) Il fatto che il campo base di S non sia un rettangolo R e che la rappresentazione di S non sia quasi lineare su R non costituisce evidentemente nessuna variante, eccetto la sostituzione di poligoni aperti semplici $\pi \subset R$ con regioni di JORDAN $\bar{\pi}$ aperte semplici $\subset \mathfrak{R}$.

Per ciò che concerne la seconda parte della nostra affermazione, consideriamo per una generica $\mathfrak{N}\in\bar{\Delta}_{n\nu}$ le trasformazioni continue $(\mathfrak{T}_{n\nu},\ \mathfrak{N})$ e $(\bar{\mathfrak{T}}_{n\nu},\ \mathfrak{C}-\mathfrak{N})$ ottenute rappresentando su $\mathfrak{N}$ e $\mathfrak{C}-\mathfrak{N}$, rispettivamente, la superficie poliedrica che si ottiene applicando alla superficie $(\mathfrak{T}_n,\ \mathfrak{N})$ il procedimento di livellamento del n. **12** ed in modo che $\mathfrak{T}_{n\nu}(u)=\bar{\mathfrak{T}}_{n\nu}(u)=\mathfrak{T}_n(u)$ se $u\in\mathfrak{N}^*$.

Consideriamo quindi la trasformazione continua $(\mathfrak{T}^*_{n\nu},\ \mathfrak{C})$ che coincide con $(\mathfrak{T}_n,\ \mathfrak{C})$ su $\mathfrak{C}-\mathfrak{N}$ e con $(\mathfrak{T}_{n\nu},\ \mathfrak{N})$ su $\mathfrak{N}$ ed infine la trasformazione continua $(\mathfrak{T}^{**}_{n\nu},\ \mathfrak{C})$ che coincide con $(\mathfrak{T}_n,\ \mathfrak{C})$ su $\mathfrak{N}$ e con $(\bar{\mathfrak{T}}_{n\nu},\ \mathfrak{C}-\mathfrak{N})$ su $\mathfrak{C}-\mathfrak{N}$.

Diciamo $\mathcal{P}^*_{n\nu}$ e $\mathcal{P}^{**}_{n\nu}$ i poliedri rappresentati rispettivamente da $(\mathfrak{T}^*_{n\nu},\ \mathfrak{C})$ e $(\mathfrak{T}^{**}_{n\nu},\ \mathfrak{C})$ e osserviamo che si passa da $\mathcal{P}_n$ a $\mathcal{P}_{n\nu}$ con un numero finito di operazioni analoghe a quelle effettuate per passare da $\mathcal{P}_n$ a $\mathcal{P}^*_{n\nu}$.

Basterà pertanto provare che per ogni $x\in\Omega(2\delta)$ si ha $O(x,\ \mathcal{P}^*_{n\nu})\neq 0$.

In virtù di note proprietà dell'indice topologico e per il fatto che nessuno degli insiemi $[\mathcal{P}^*_{n\nu}]$, $[\mathcal{P}^{**}_{n\nu}]$ incontra l'insieme connesso $\Omega(2\delta_n)$, sarà

$$0\neq O(x,\ \mathcal{P}_n)=O(x,\ \mathcal{P}^*_{n\nu})+O(x,\ \mathcal{P}^{**}_{n\nu}),$$

gli indici topologici conservandosi invarianti al variare di x in $\Omega(2\delta_n)$.

Basterà pertanto provare che $O(x,\ \mathcal{P}^{**}_{n\nu})$ è nullo per $x\in\Omega(2\delta_n)$.

Ora se si avesse $O(x,\ \mathcal{P}^{**}_{n\nu})\neq 0$ per $x\in\Omega(2\delta_n)$, poichè è $[\mathcal{P}^{**}_{n\nu}]\subset A(2\delta_n)$, si avrebbe $\mathcal{P}^{**}_{n\nu}\in W(2\delta_n)$. Quindi, per la disuguaglianza isoperimetrica (n. **20**) e per essere $2\delta_n<\bar{\delta}/2$, avremo che

$$a(\mathcal{P}^{**}_{n\nu})>\pi\bar{\delta}^2.$$

Ma è, in virtù del n. **22** e del Teorema del n. **12**,

$$a(\mathcal{P}^{**}_{n\nu})=a[(\mathfrak{T}_n,\ \mathfrak{N})]+a([\bar{\mathfrak{T}}_{n\nu},\ \mathfrak{N})]\leqslant$$

$$\leqslant 5M\lambda\varepsilon_\nu^2/m+5M\lambda\varepsilon_\nu^2(1+\lambda/K)/m\leqslant 15M\lambda\varepsilon_\nu^2/m<2\bar{\delta}^2,$$

in virtù del modo come fu scelto ε_ν.

Abbiamo così provato che $\mathcal{P}_{n\nu}\in W(2\delta_n)$.

27. – Per ogni intero $n=1,\ 2,\ \ldots$, per ogni $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ e $\mathfrak{N}\in\bar{\Delta}_{n\nu}$, siano $\bar{\sigma}$ e $\bar{\sigma}_0$ le famiglie di superficie poliedriche considerate nel n. **24**. Per il Lemma del n. **12** abbiamo

$$a(\bar{\sigma}_0)\leqslant\lambda K^{-1}\cdot a(\bar{\sigma}).$$

In virtù del n. **17** risulta perciò

$$0 \leqslant \mathfrak{J}(\bar{\sigma}_0) \leqslant Ma(\bar{\sigma}_0) \leqslant M\lambda a(\bar{\sigma})/K = ma(\bar{\sigma})/4 \leqslant \mathfrak{J}(\bar{\sigma})/4.$$

In virtù della definizione di $\mathfrak{S}_{n\nu}$ risulta quindi

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{S}_{n\nu}) \leqslant \mathfrak{J}(\mathfrak{S}_n) \leqslant j + 2\mu_n .$$

D'altra parte, poichè $\mathfrak{S}_{n\nu} \in W(2\delta_n)$, si ha

$$j - \mu_n \leqslant j(2\delta_n) \leqslant \mathfrak{J}(\mathfrak{S}_{n\nu}) .$$

Risulta così:

$$j - \mu_n \leqslant \mathfrak{J}(\mathfrak{S}_{n\nu}) \leqslant \mathfrak{J}(\mathfrak{S}_n) \leqslant j + 2\mu_n .$$

Dalle disuguaglianze di sopra risulta pertanto

$$3\mu_n \geqslant \mathfrak{J}(\mathfrak{S}_n) - \mathfrak{J}(\mathfrak{S}_{n\nu}) = \sum_{\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n\nu}} \left\{ \mathfrak{J}(\bar{\sigma}) - \mathfrak{J}(\bar{\sigma}_0) \right\} \geqslant \sum_{\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n\nu}} (3/4)\mathfrak{J}(\bar{\sigma}) .$$

Si ha così

$$(*) \qquad \sum_{\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n\nu}} \mathfrak{J}(\bar{\sigma}) \leqslant 4\mu_n$$

e quindi

$$\sum_{\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n\nu}} \mathfrak{J}(\sigma_0) \leqslant \mu_n .$$

28. – Per ogni $\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n\nu}$ indichiamo con $\mathfrak{L}$ la lunghezza complessiva dei contorni p di tutte le superficie appartenenti alla famiglia $\bar{\sigma}_0$, cioè delle superficie definite dalle trasformazioni $(\mathfrak{T}_{n\nu}\ \mathfrak{R})$ sulle regioni semplici di JORDAN $\bar{\pi} \in \mathfrak{T}_{n\nu}$.

In virtù del Lemma del n. **12** risulterà, per ogni $\mathfrak{L}$,

$$\mathfrak{L}^2 \leqslant K^{-1} \cdot a(\bar{\sigma}) \leqslant (4\lambda M/m)^{-1} \cdot a(\bar{\sigma}) .$$

Per la disuguaglianza $(*)$ stabilita nel n. precedente risulta pertanto

$$\sum_{\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n\nu}} \mathfrak{L}^2 \leqslant \frac{m}{4\lambda M} \sum_{\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n\nu}} a(\bar{\sigma}) \leqslant \frac{m}{4\lambda M} \sum_{\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n\nu}} \frac{1}{m} J(\bar{\sigma}) \leqslant \frac{\mu_n}{\lambda M},$$

e quindi

$$\sum_{\mathfrak{R}\in\bar{\Delta}_n} \sum_{\bar{\pi}\in\mathfrak{S}_{n\nu}} (\sum p)^2 \leqslant \frac{\mu_n}{\lambda M} \leqslant \varepsilon_\nu,$$

donde si deduce, per ogni regione semplice $\bar{\pi}\in\mathfrak{S}_{n\nu}$,

$$\text{diam } \mathfrak{S}_{n\nu}(\bar{\pi}^*) \leqslant p \leqslant \varepsilon_n \leqslant \varepsilon_\nu .$$

29. – Per ogni $\mathfrak{R}\in\bar{\Delta}_{n\nu}$ indichiamo d'ora in avanti con $\sum$ le superficie poliedriche del tipo della 2-cella definite su $\mathfrak{R}$ dalla trasformazione $(\mathfrak{S}_{n\nu}, \mathfrak{C})$.

Ciascuna di queste superficie $\sum$ è, in forza del Teorema del n. **12** e del Teorema del n. **22**, contenuta in una sfera di centro $\mathfrak{S}_n(u)$, $u\in\mathfrak{R}^*$, e raggio

$$\leqslant (1+2\lambda)\{4\varepsilon_\nu + 3[(4\lambda M/m)(5M\lambda\varepsilon_\nu^2/m)]^{1/2} \leqslant 60\varepsilon_\nu[\max(\lambda,\ M/m)]^2 .$$

Risulta perciò, in particolare,

$$\text{diam } [\sum] = 120\varepsilon_\nu[\max(\lambda,\ M/m)]^2 .$$

30. – Seguendo ancora la Memoria [5] di L. CESARI, indichiano con $\mathfrak{S}'_{n\nu}\subset\mathfrak{S}_{n\nu}$ la collezione formata con le regioni semplici di JORDAN $\bar{\pi}\in\mathfrak{S}_{n\nu}$ nella seguente maniera: una regione $\bar{\pi}$ appartiene a $\mathfrak{S}'_{n1}$ se e solamente se non è contenuta in nessuna delle regioni $\mathfrak{R}\in\bar{\Delta}_{n,2}$, $\bar{\Delta}_{n,3}$, ..., $\bar{\Delta}_{n,n}$.

Indichiamo con $\mathfrak{S}'_{n\nu}\subset\mathfrak{S}_{n\nu}$ $(\nu = 2, ..., n-1)$ la collezione formata dalle regioni $\bar{\pi}\in\mathfrak{S}_{n\nu}$ nella seguente maniera: una regione $\bar{\pi}$ appartiene a $\mathfrak{S}'_{n\nu}$ se non è contenuta (12) nell'insieme $\sum_{s=1}^{\nu-1}\mathfrak{S}'_{ns}$ e se non è contenuta in alcuna delle regioni $\mathfrak{R}\in\bar{\Delta}_{n,\nu+1}$, $\bar{\Delta}_{n,\nu+2}$, ..., $\bar{\Delta}_{n,n}$. Diciamo infine $\mathfrak{S}'_{n,n}\subset\mathfrak{S}_{n,n}$ la collezione delle regioni $\bar{\pi}\in\mathfrak{S}_{nn}$ formata nella seguente maniera: $\bar{\pi}\in\mathfrak{S}'_{nn}$ se non è contenuta in $\sum_{s=1}^{n-1}\mathfrak{S}'_{ns}$.

Sia $\bar{\pi}$ un elemento della collezione $\mathfrak{S}'_{n\nu}$ $(\nu = 1, 2, ..., n)$, sia $\mathfrak{R}\in\bar{\Delta}_{n\nu}$ la regione di JORDAN cui $\bar{\pi}$ appartiene.

Il medesimo ragionamento contenuto nel n. **37** della Memoria [5] di L. CESARI consente di affermare che $\bar{\pi}$ non incontra l'insieme $\mathfrak{R}\cdot(\mathfrak{S}'_{n1} + \mathfrak{S}'_{n2} + \dots + \mathfrak{S}'_{n,\nu-1})$.

---

(12) Con $\mathfrak{S}_{n\nu}$, $\mathfrak{S}'_{n\nu}$, $(\nu = 1, 2, ..., n)$ indichiamo anche l'insieme dei punti di $\mathfrak{C}$ ricoperto dalle regioni (chiuse) di JORDAN $\bar{\pi}$ che appartengono alle collezioni $\mathfrak{S}_{n\nu}$, $\mathfrak{S}'_{n\nu}$.

31. – Seguendo ancora il ragionamento della Memoria **[5]** di L. CESARI, definiamo, per ogni $n = 1, 2, \ldots,$ la trasformazione $(\overline{\mathfrak{S}}_n, \mathfrak{C}) : x = X_n(u)$, $u \in \mathfrak{C}$, nella seguente maniera:

$$x = X_n(u) = \begin{cases} x_{n\nu}(u) & \text{se} \quad u \in \mathfrak{S}'_{n\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \\ x_n(u) & \text{se} \quad u \in \mathfrak{C} - \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{S}'_{n\nu}. \end{cases}$$

Per quanto si è osservato nel n. precedente la trasformazione $(\overline{\mathfrak{S}}_n, \mathfrak{C})$ è continua e quasi lineare.

Sia $\overline{\mathcal{S}}_n$ la superficie poliedrica del tipo della 2-sfera rappresentata da $(\overline{\mathfrak{S}}_n, \mathfrak{C})$.

Con gli stessi argomenti del n. **26** si riconosce che $\overline{\mathcal{S}}_n \in W(2\delta_n)$.

Diciamo $\sigma'_{n\nu 0}$ la famiglia di superficie poliedriche definite dalla trasformazione $(\overline{\mathfrak{S}}_{n\nu}, \mathfrak{C})$ sulle regioni $\pi \in \mathfrak{S}'_{n\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, diciamo $\overline{\sigma}_{n\nu 0}$ la famiglia di superficie poliedriche definite dalla trasformazione $(\mathfrak{S}_{n\nu}, \mathfrak{C})$ su tutte le regioni $\pi \in \mathfrak{S}_{n\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Diciamo $\mathcal{S}_{n0}$ la superficie definita dalla trasformazione $(\overline{\mathfrak{S}}_n, \mathfrak{C})$ su $\mathfrak{C} - \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{S}'_{n\nu}$.

Per i nn. **17** e **27** risulta

$$\mathfrak{J}(\overline{\mathcal{S}}_n) = \mathfrak{J}(\mathcal{S}_{n0}) + \sum_{\nu} \mathfrak{J}(\overline{\sigma}'_{n\nu 0}) \leqslant \mathfrak{J}(\mathcal{S}_{n0}) + \sum_{\nu} \mathfrak{J}(\overline{\sigma}_{n\nu 0}) \leqslant$$
$$\leqslant j + 2\mu_n + \sum_{\nu} \mu_\nu = j + (n+2)\mu_n \leqslant j + 2^{-n}.$$

Poichè d'altra parte si ha

$$j - 2^{-n} \leqslant j - \mu_n \leqslant \mathfrak{J}(\overline{\mathcal{S}}_n),$$

otteniamo così:

$$j - 2^{-n} \leqslant \mathfrak{J}(\overline{\mathcal{S}}_n) \leqslant j + 2^{-n}.$$

32. – Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia μ il più piccolo intero positivo tale che $1100 \cdot \max[\lambda, M/m]^2 \varepsilon_\mu < \varepsilon$ (essendo ε_ν la successione definita nel n. **18**). Sia $\overline{\delta}(\varepsilon) = \eta_\mu$ (essendo $\{\eta_\nu\}$ la successione definita nel n. **21**).

Sia $\delta = \delta(\varepsilon)$ il numero così definito.

Per ogni $0 < \varrho < \pi/2$ sia

$$\omega(\varrho) = \sup_{\substack{u', u'' \in \mathfrak{C}_1 \\ d_s(u', u'') < \varrho}} d\{T^{-1} \cdot \Psi_1(u'), T^{-1} \cdot \Psi_1(u'')\} = \sup_{\substack{u', u'' \in \mathfrak{C}_2 \\ d_s(u', u'') < \varrho}} d\{T^{-1} \cdot \Psi_2(u'), T^{-1} \cdot \Psi_2(u'')\},$$

essendo u', u'' punti di $\mathfrak{C}_i$ $(i = 1, 2)$ la cui distanza sferica $d_s(u', u'')$ è $< \varrho$, essendo $(T^{-1} \cdot \Psi_1, \mathfrak{C}_1)$, $(T^{-1} \cdot \Psi_2, \mathfrak{C}_2)$ le trasformazioni continue definite nel n. **3** ed essendo $d(v', v'')$ la distanza euclidea di due punti $v', v'' \in Q$. La funzione $\omega(\varrho)$ è crescente con ϱ ed è $\lim\limits_{\varrho \to 0+} \omega(\varrho) = 0$.

Sia allora $\delta(\varepsilon)$ l'estremo superiore dei numeri ϱ per i quali è $\omega(\varrho) < \overline{\delta}(\varepsilon)$. Siano u_1, u_2 due punti di $\mathfrak{C}$ la cui distanza sferica è $< \delta(\varepsilon)$. Affermo che per ogni $n \geqslant \mu$ si ha

$$d\{ (\overline{\mathfrak{S}}_n(u_1), \overline{\mathfrak{S}}_n(u_2) \} < \varepsilon,$$

essendo $\overline{\mathfrak{S}}_n(u_1)$, $\overline{\mathfrak{S}}_n(u_2)$ i punti immagini di u_1 e u_2 secondo la trasformazione $(\overline{\mathfrak{S}}_n, \mathfrak{C})$ introdotta nel n. **31**, ed essendo $d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_1), \overline{\mathfrak{S}}_n(u_2) \}$ la distanza in E_3 di tali punti.

33. – Suppongo inizialmente che u_1 e u_2 appartengano a $\mathfrak{C}_1$. Considero, seguendo la Memoria [**5**] di L. CESARI, i vari casi seguenti:

a) u_1 e u_2 appartengono alla stessa regione di JORDAN $\overline{\pi} \in \mathfrak{S}'_{n\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Si ha in questo caso

$$d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_1), \overline{\mathfrak{S}}_n(u_2) \} \leqslant 2(1 + \lambda) \operatorname{diam} \overline{\mathfrak{S}}_n(\overline{\pi}^*) \leqslant 2(1 + \lambda)\varepsilon_n = 4\lambda\varepsilon_n < \varepsilon .$$

b) $u_i \in \overline{\pi}_i$, $\overline{\pi}_i \subset \mathfrak{S}_{n\nu_i}$, $\overline{\pi}_i$ non è contenuta in nessuna delle regioni $\mathfrak{R} \subset \overline{\Delta}_{n\mu}$ Sia $u_i \in \mathfrak{R}_i$, $\mathfrak{R}_i \in \overline{\Delta}_{n\mu}$. Esistono allora due punti $u'_i \in \mathfrak{R}^*_i \cdot \overline{\pi}^*_i$ $(i = 1, 2)$ tali che

$$d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_i), \overline{\mathfrak{S}}_n(u'_i) \} < 2(1 + \lambda)\varepsilon_n \qquad (i = 1, 2) .$$

Detti $v_i = T^{-1} \cdot \Psi_1(u_i)$, $v'_i = T^{-1} \cdot \Psi_{s_i}(u'_i)$, $(i = 1, 2)$ con $s_i = 1$ oppure 2 a seconda che $u'_i \in \mathfrak{C}_1$ oppure $u'_i \in \mathfrak{C}_2$, si ha che $d\{ v_1, v_2 \} < \overline{\delta}(\varepsilon) = \eta_\mu$, donde si deduce che v_1 e v_2 appartengono a due rettangoli r_1 e r_2 aventi almeno un vertice in comune. Si ha perciò

$$\begin{aligned} d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_1), \mathfrak{S}_n(u_2) \} &\leqslant d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_1), \overline{\mathfrak{S}}_n(u'_1) \} + d\{ \overline{\mathfrak{S}}(u'_1), \overline{\mathfrak{S}}_n(u'_2) \} + \\ &+ d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u'_2), \overline{\mathfrak{S}}_n(u_2) \} \leqslant 2(1 + \lambda)\varepsilon_n + d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u'_1), \overline{\mathfrak{S}}_n(u'_2) \} + \\ &+ 2(1 + \lambda)\varepsilon_n \leqslant 4(1 + \lambda)\varepsilon_n + 4\varepsilon_\mu = 12\lambda\varepsilon_\mu < \varepsilon, \end{aligned}$$

in forza del n. **21**, in quanto

$$d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u'_i), \mathfrak{S}_n \cdot \Psi_1^{-1} \cdot T(v'_i) \} = d\{ \mathfrak{S}_n \cdot \Psi_{s_i}^{-1} \cdot T(v'_i), \mathfrak{S}_n \cdot \Psi_1^{-1} \cdot T(v'_i) \} \leqslant \varepsilon_\mu \ (i = 1, 2)$$

ed in quanto che i punti v_1', v_2' possono essere uniti da una poligonale formata al più da quattro segmenti consecutivi appartenenti ai lati di r_1 e r_2 non su Q^*.

c) $u_i \in \bar{\pi}_i, \quad \bar{\pi}_i \in \mathfrak{S}'_{n,\nu_i}, \quad \bar{\pi}_i \in \mathfrak{R}_i, \quad \mathfrak{R}_i \in \bar{\Delta}_{n\mu}, \quad (i = 1, 2).$

Poichè $\bar{\pi}_i$ è contenuta in $\mathfrak{R}_i$, ne viene intanto che $\mu \leqslant \nu_i \leqslant n$ $(i = 1, 2)$. Sia $u_{i,\nu_i+1} \in \bar{\pi}_i^*$, $u_{i,\nu_i+1} \in \mathfrak{C}_1$; si ha

$$d\{\bar{\mathfrak{S}}_n(u_i), \quad \bar{\mathfrak{S}}_n(u_{i,\nu_i+1})\} \leqslant 2(1+\lambda)\varepsilon_n \leqslant 4\lambda\varepsilon_n,$$

$$\bar{\mathfrak{S}}_n(u_{i,\nu_{i+1}}) = \mathfrak{S}_{n\nu_i}(u_{i,\nu_i+1}) = \mathfrak{S}_n(u_{i,\nu_i+1}).$$

Si ha $\bar{\pi}_i \in \mathfrak{S}'_{n\nu_i}$, quindi $\bar{\pi}_i \subset \mathfrak{R}_{i\nu_i}$, $\mathfrak{R}_{i\nu_i} \in \bar{\Delta}_{n\nu_i}$. Per ogni punto $u_{i\nu_i} \in \mathfrak{R}^*_{i\nu_i}$ si ha

$$d\{\mathfrak{S}_n(u_{i\nu_i}), \quad \mathfrak{S}_{n\nu_i}(u_{i,\nu_i+1})\} < 120\varepsilon_{\nu_i}[\max(\lambda, \quad M/m)]^2.$$

Affermo ora che in ogni caso possiamo scegliere $u_{i,\nu_i} \in \mathfrak{R}^*_{i,\nu_i}$ in modo che non sia interno ad alcuna delle regioni delle collezioni $\mathfrak{S}'_{n,1}, \mathfrak{S}'_{n,2}, \ldots, \mathfrak{S}'_{n,\nu_i-1}, \mathfrak{S}_{n,\nu_i-1}$. Infatti $\mathfrak{R}_{i,\nu_i}$ non è contenuta in alcuna delle regioni $\bar{\pi} \in \mathfrak{S}'_{n,\nu_i-1}$. D'altra parte le regioni $\bar{\pi} \in \mathfrak{S}_{n,\nu_i-1} - \mathfrak{S}'_{n,\nu_i-1}$ o sono contenute nelle regioni $\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n,t}$, $t \geqslant \nu_i$ (13), oppure sono contenute in $\sum_{s=1}^{\nu_i-2} \mathfrak{S}'_{ns}$ (14). Perciò possiamo scegliere sopra $\mathfrak{R}^*_{i\nu_i}$ un punto $u_{i\nu_i}$ non interno a nessuna delle regioni della collezione $\mathfrak{S}_{n,\nu_i-1}$ nè ad alcuna delle regioni delle collezioni $\mathfrak{S}'_{ns}$ $(s = 1, \ldots, \nu_i - 2)$. Risulterà così $\mathfrak{S}_{n,\nu_i-1}(u_{i,\nu_i}) = \mathfrak{S}_n(u_{i,\nu_i})$. Il punto u_{i,ν_i} ora scelto appartiene a una regione $\mathfrak{R}_{i,\nu_i-1} \in \bar{\Delta}_{n,\nu_i-1}$ e per ogni punto appartenente a $\mathfrak{R}^*_{i,\nu_i-1}$ si ha

$$d\{\mathfrak{S}_{n,\nu_i-1}(u_{i,\nu_i}), \quad \mathfrak{S}_n(u_{i,\nu_i-1})\} < 120\varepsilon_{\nu_i-1}[\max(\lambda, \quad M/m)]^2.$$

Ripetendo questo procedimento otteniamo un gruppo di punti $u_{i,t} \in \mathfrak{R}^*_{i,t}$ $(t = \nu_i, \nu_{i-1}, \ldots, \mu+1, \mu)$ per i quali $\mathfrak{S}_n(u_{i,t+1}) = \mathfrak{S}_{n,t}(u_{i,t+1})$ e $d\{\mathfrak{S}_n(u_{i,t+1}), \mathfrak{S}_n(u_{i,t})\} < 120\varepsilon_t[\max(\lambda, M/m)]^2$ $(t = \nu_i, \nu_{i-1}, \ldots, \mu)$.

---

(13) E in tal caso non possono contenere $\mathfrak{R}_{i,\nu_i}$ nel loro interno. Infatti $\bar{\pi} \in \mathfrak{S}_{n,\nu_i-1} - \mathfrak{S}'_{n,\nu_i-1}$ non può ovviamente appartenere a $\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n,\nu_i}$ nè può appartenere a $\mathfrak{R} \in \bar{\Delta}_{n,t}$, $t > \nu_i$, perchè allora l'insieme $T^{-1}\cdot\Psi_1(\bar{\pi}\cdot\mathfrak{C}_1) + T^{-1}\cdot\Psi_2(\bar{\pi}\cdot\mathfrak{C}_2)$ dovrebbe contenere un rettangolo $r \in \Delta_{n,\nu_i}$ e dovrebbe essere contenuto in uno dei rettangoli $r \in \Delta_{n,t}$, $t > \nu_i$; e ciò è impossibile perchè le dimensioni dei rettangoli $r \in \Delta_{n,\nu_i}$ sono maggiori delle dimensioni dei rettangoli $r \in \Delta_{nt}$, $t > \nu_i$.

(14) E $\mathfrak{R}_{i,\nu_i} \supset \bar{\pi}_i$ non può essere contenuta in $\sum_{s=1}^{\nu_i-2} \mathfrak{S}'_{n,s}$, poichè $\bar{\pi}_i$ non è contenuta in $\sum_{s=1}^{\nu_i-2} \mathfrak{S}'_{n,s}$.

Abbiamo perciò

$$d\{ \mathfrak{S}_n(u_{i,\nu_i+1}),\ \mathfrak{S}_n(u_{i,\mu}) \} < 120\ [\max(\lambda,\ M/m)]^2 \{ \varepsilon_\mu + \varepsilon_{\mu+1} + \dots + \varepsilon_{\nu_i} \} \leqslant$$
$$\leqslant 120\ [\max(\lambda,\ M/m)]^2\, 2\varepsilon_\mu,$$

poichè è $\varepsilon_{t+1} \leqslant \varepsilon_t/2$.

Indicati in seguito come sopra con v_1 e v_2 i punti $T^{-1}\cdot\Psi_1(u_1)$, $T^{-1}\cdot\Psi_1(u_2)$, consideriamo per ogni t i punti

$$v_{i,t} = T^{-1}\Psi_{s_{i,t}}(u_{i,t}) \qquad (i = 1,\ 2; \qquad t = \nu_i + 1,\ \dots,\ \mu)$$

con $s_{i,t}$ eguale ad 1 oppure 2 secondo che $u_{i,t}$ appartiene a $\mathfrak{C}_1$ oppure a $\mathfrak{C}_2$; indichiamo quindi per comodità con v_i' e v_i'' i punti v_{i,ν_i+1}, $v_{i,\mu}$, $(i = 1,\ 2)$.

Osserviamo che i punti $v_{i,t+1}$, $v_{i,t}$ appartengono al medesimo rettangolo $r \in \Delta_{n,t}$ $(t = \nu_i,\ \dots,\ \mu)$ e quindi

$$d\{ v_{i,t},\ v_{i,t+1} \} \leqslant 4\xi_t \leqslant \eta_{t-1}/2\,.$$

Si ha perciò

$$d\{ v_i',\ v_{i,\mu+1} \} \leqslant \sum_{t=\nu_i}^{\mu+1} d\{ v_{i,t},\ v_{i,t+1} \} \leqslant$$
$$\leqslant 4\xi_{\nu_i} + \dots + 4\xi_{\mu+1} \leqslant (1/2)\eta_\mu + (1/2)^2\eta_\mu + \dots + (1/2)^{\nu_i-\mu}\eta_\mu \leqslant \eta_\mu\,.$$

Questo assicura che il punto $v_{i,\mu+1}$ ha dal punto v_i' distanza minore del minimo delle dimensioni dei rettangoli $r \in \Delta_{n,\mu}$. Perciò se diciamo r_i, $r_i' \in \Delta_{n,\mu}$ i rettangoli cui appartengono rispettivamente v_i e v_i'', allora necessariamente r_i e r_i' hanno almeno un vertice in comune. Quindi per la stessa osservazione fatta in b) i rettangoli r_1', r_2' appartengono ad una catena r_1', r_1, r_2, r_2' di rettangoli $r \in \Delta_{n,\mu}$ che hanno a due a due almeno un vertice in comune.

In conseguenza i punti $v_1'' \in r_1'^* - Q^*$, $v_2'' \in r_2'^* - Q^*$ possono essere uniti mediante una linea poligonale formata al più da 16 segmenti consecutivi appartenenti ai lati di rettangoli $r \in \Delta_{n,\mu}$ non su Q^*. Sarà pertanto

$$d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_1),\ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_2) \} \leqslant$$
$$\leqslant d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_1),\ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_{1,\nu_1+1}) \} + d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_{1,\nu_1+1}),\ \mathfrak{S}_n(u_{1,\mu}) \} + d\{ \mathfrak{S}_n(u_{1,\mu}),\ \mathfrak{S}_n(u_{2,\mu}) \} +$$
$$+ d\{ \mathfrak{S}_n(u_{2,\mu}),\ \mathfrak{S}_n(u_{2,\nu_2+1}) \} + d\{ \mathfrak{S}_n(u_{2,\nu_2+1}),\ \mathfrak{S}_n(u_2) \} \leqslant$$
$$\leqslant 8\lambda\varepsilon_n + 4\cdot 120\varepsilon_\mu\, [\max(\lambda,\ M/m)]^2 + d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n\cdot\Psi_{s_1}^{-1}(v_1''),\ \mathfrak{S}_n\cdot\Psi_{s_2}^{-1}(v_2'') \},$$

essendo s_1, s_2 uguali a 1 oppure 2.

Osserviamo che se nessuno dei rettangoli $r \in \Delta_{n,t}$ che contengono i punti $v_{i,t}$ $(t = \nu_i + 1, \nu_i, \dots, \mu_j)$ incontra Q^* allora è $s_i = 1$; nel caso contrario sarà, per il medesimo ragionamento di sopra [15],

$$d\{ \mathfrak{S}_n \cdot \Psi_{s_i}(v_i''), \quad \mathfrak{S}_n \cdot \Psi_1(v_i'') \} < 3\mu_\mu .$$

Avremo perciò

$$d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_1), \ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_2) \} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \cdot 120 \varepsilon_\mu \cdot [\max(\lambda, \ M/m)]^2 + 8\lambda\varepsilon_\mu + 8\varepsilon_\mu + 6\varepsilon_\mu \leqslant 510\varepsilon_\mu \cdot [\max(\lambda, \ M/m)]^2 < \varepsilon.$$

d) $u_i \in \mathfrak{C}_1 - \sum_{s=1}^{n} \mathfrak{S}'_{ns}$ $(i = 1, 2)$, oppure si è in uno dei casi rimanenti. Seguendo il medesimo ragionamento della Memoria [5] di L. Cesari si ha, in tutti questi casi,

$$d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_1), \ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_2) \} \leqslant 510\varepsilon_\mu \cdot [\max(\lambda, \ M/m)]^2 < \varepsilon .$$

Si ha così in ogni caso, se u_1 e $u_2 \in \mathfrak{C}_1$,

$$d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_1), \ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_2) \} \leqslant 510 \ [\max(\lambda, \ M/m)]^2 \varepsilon_\mu < \varepsilon .$$

34. – Passando al caso in cui u_1 e u_2 siano in posizione generica avremo, detto u' il punto in cui l'arco sul quale si misura la distanza sferica fra u_1 e u_2 incontra il piano $u^3 = 0$,

$$d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_1), \ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_2) \} \leqslant d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_1), \ \overline{\mathfrak{S}}_n(u') \} + d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u'), \ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_2) \} \leqslant$$
$$\leqslant 2(510[\max(\lambda, \ M/m)]^2 \varepsilon_\mu) < \varepsilon .$$

35. – Abbiamo così provato che per ogni $\varepsilon > 0$, arbitrario, esiste un numero $\delta(\varepsilon) > 0$ ed un intero μ tale che se $n \geqslant \mu$ ed u_1 e u_2 sono due punti di $\mathfrak{C}$ la cui distanza sferica è $< \delta(\varepsilon)$, allora

$$d\{ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_1), \ \overline{\mathfrak{S}}_n(u_2) \} < \varepsilon .$$

---

[15] Detto infatti $v_{i,s}$ il primo dei punti $v_{i,t}$ $(t = \nu_i + 1, \nu_i, \dots, \mu)$ per il quale il corrispondente rettangolo $r \in \Delta_{n,s}$ incontra Q^*, si ha $d\{ v_{i,s}, \ v_{i,\mu+1} \} < \eta_\mu$, in modo che, detto r_i'' un rettangolo $\in \Delta_{n,\mu}$ che contiene $v_{i,s}$, allora r_i'' ha in comune con r_i almeno un vertice. Ma le dimensioni di $r \in \Delta_{n,s}$, $s > \mu$, sono minori delle dimensioni di ogni $r \in \Delta_{n,\mu}$, si ha perciò che r_i'' incontra Q^* e quindi che v_i'' può essere unito a Q^* mediante al più due segmenti appartenenti a lati di rettangoli $r \in \Delta_{n,\mu}$, non su Q^*.

Ma le trasformazioni $(\overline{\mathfrak{S}}_n, \mathfrak{C})$ $(n = 1, 2, ..., \mu - 1)$ sono continue, è perciò possibile, in base al medesimo $\varepsilon > 0$ di sopra, determinare $0 < \delta'(\varepsilon) < \delta(\varepsilon)$ tale che se u_1, $u_2 \in \mathfrak{C}$ ed è $d_s(u_1, u_2) < \delta'(\varepsilon)$ risulti, per ogni n,

$$d\{\overline{\mathfrak{S}}_n(u_1), \overline{\mathfrak{S}}_n(u_2)\} < \varepsilon .$$

Le funzioni vettoriali $x = X_n(u)$, $(u \in \mathfrak{C};\ n = 1, 2, ...)$, mediante le quali sono definite le trasformazioni $(\overline{\mathfrak{S}}_n, \mathfrak{C})$ risultano perciò ugualmente continue su $\mathfrak{C}$.

Le stesse funzioni vettoriali sono inoltre ugualmente limitate per essere

$$[\overline{\mathcal{S}}_n] \subset A(2\delta_n) \subset A(2\delta_1) \qquad (n = 1, 2, ...) .$$

36. – Mediante applicazione del teorema di Ascoli è perciò possibile estrarre dalla successione $\{n\}$ una sottosuccessione $\{n_m\}$ tale che la successione di funzioni vettoriali $x = X_{n_m}(u)$, $u \in \mathfrak{C}$, sia uniformemente convergente su $\mathfrak{C}$.

Per semplicità supponiamo che sia $n_m = m$.

Esiste perciò una funzione vettoriale $x = X_0(u)$, $u \in \mathfrak{C}$, verso la quale le funzioni vettoriali $x = X_n(u)$, $u \in \mathfrak{C}$, convergono uniformemente.

Sia $\sum_0$ la superficie del tipo della 2-sfera rappresentata da $(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{C}) : x = X_0(u)$, $u \in \mathfrak{C}$.

Voglio mostrare che $\sum_0 \in W(0) = W$.

Dal fatto che $\overline{\mathcal{S}}_n \in W(2\delta_n)$ $(n = 1, 2, ...)$ e che quindi $[\overline{\mathcal{S}}_n] \subset A(2\delta_n) - \Omega(2\delta_n)$ segue intanto, poichè $\lim \delta_n = 0$, che $[\sum_0] \subset A - \Omega \subset A$.

Per ogni $x \in \Omega$ diciamo $\delta(x)$ la distanza che x ha da Ω^*, diciamo quindi $n(x)$ un intero tale che se $n > n(x)$ sia $2\delta_n < \delta(x)$. Ne segue allora $x \in \Omega(2\delta_n)$ per $n > n(x)$ e pertanto che $O(x, \overline{\mathcal{S}}_n) \neq 0$ per i medesimi $n > n(x)$.

Per il teorema di Poincaré-Bohl [1], per il fatto sopra stabilito che $x \notin [\sum_0]$, e per la convergenza secondo Fréchet di $\overline{\mathcal{S}}_n$ verso $\sum_0$, si ha perciò

$$O(x, \textstyle\sum_0) = \lim_{n \to \infty} O(x, \overline{\mathcal{S}}_n) \neq 0 .$$

È così provato che $\sum_0 \in W(0) = W$, risulta quindi

$$\mathfrak{J}(\textstyle\sum_0) \geqslant i .$$

Ma poichè per le ipotesi e per il Teorema del n. **6** l'integrale $\mathfrak{J}(\sum)$ è inferiormente semicontinuo su $\sum_0$ rispetto alla successione di superficie $\{\overline{\mathcal{S}}_n\}$ si ha anche, per il n. **31**,

$$\mathfrak{J}(\textstyle\sum_0) \leqslant \underline{\lim}_{n \to \infty} \mathfrak{J}(\overline{\mathcal{S}}_n) = \underline{\lim}_{n \to \infty} (j + 2^{-n}) = j .$$

È così

$$i \leqslant \mathfrak{J}(\sum_0) \leqslant j .$$

Ma poichè, per il n. **18**, si ha $j \leqslant i$, rimane così provato che

$$\mathfrak{J}(\sum_0) = i .$$

Il Teorema del n. **2** è così completamente provato.

Bibliografia.

[**1**] P. ALEXANDROFF und H. HOPF, *Topologie*, Berlin 1936.

[**2**] L. CESARI, *Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **12**, 61-84 (1943).

[**3**] L. CESARI, *La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **13**, 73-117 (1947).

[**4**] L. CESARI, *Condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **14**, 47-79 (1948).

[**5**] L. CESARI, *An existence theorem of Calculus of variations for integrals on parametric surfaces*, Amer. J. Math. **74**, 265-295 (1952).

[**6**] J. M. DANSKIN (Jr.), *On the existence of minimizing surfaces in parametric double integral problems of the Calculus of variations*, Rivista Mat. Univ. Parma **3**, 43-53 (1952).

[**7**] C. B. MORREY, *A class of representation of manifolds*, Amer. J. Math.: **55**, 683-687 (1933); **56**, 275-293 (1934).

[**8**] A. G. SIGALOV, *Problemi 2-dimensionali del Calcolo delle variazioni* (in russo), Uspehi Mat. Nauk **6**, 16-101 (1951) [Cfr.: Traduzione No. 83 della Amer. Math. Soc. .]

[**9**] L. C. YOUNG, *Some applications of the Dirichlet integral to the theory of surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 317-335 (1948).