Rivista Mat. Univ. Parma 6, 117-140 (1955)

LETTERIO TOSCANO (*)

Formule di riduzione tra funzioni e polinomi classici. (**)

Introduzione.

Tra i polinomi di HERMITE

$$H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^n n!}\, {}_1F_1\left(-n;\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right),$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^n n!} x\, {}_1F_1\left(-n;\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right)$$

e le funzioni di HERMITE

$$h_{2n}(x) = (-1)^n\, 2^n\, n!\, x\, {}_1F_1\left(-n+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right),$$

$$h_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}\, 2^n\, n!\, {}_1F_1\left(-n-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right)$$

sussiste la relazione

$$h_0(x)\, H_n(x) - H_0(x)\, h_n(x) = e^{x^2/2}\, G_{n-1}(x), \tag{1}$$

dove $G_n(x)$ [polinomio associato a quello di HERMITE] è definito dalle

$$G_0(x) = 1, \quad G_1(x) = x, \quad G_n(x) - xG_{n-1}(x) + nG_{n-2}(x) = 0.$$

(*) Indirizzo: Via Placida 85, Messina, Italia.
(**) Ricevuto il 25-V-1955.

Lo studio dei $G_n(x)$ fu iniziato da N. NIELSEN, e nuovi risultati sono stati da me assegnati recentemente [1].

Ai fini del presente lavoro richiamo le formule di riduzione:

$$h_n(x) = h_0(x)H_n(x) - e^{x^2/2} \sum_{0}^{\leq (n-1)/2} {}_r (-1)^r \binom{n-r-1}{r} r!\, H_{n-2r-1}(x), \tag{2}$$

$$h_n(x) = h_0(x)H_n(x) - e^{x^2/2}(-i)^{n-1} \sum_{0}^{\leq (n-1)/2} {}_r \frac{n!}{r!(n-r)\,(n-2r-1)!} H_{n-2r-1}(ix), \tag{3}$$

$$h_n(x) = h_0(x)H_n(x) - e^{x^2/2} \sum_{0}^{n-1} {}_r \binom{n}{r+1} i^r H_r(ix)\, H_{n-r-1}(x). \tag{4}$$

In esse $h_n(x)$ viene espresso con l'elemento iniziale $h_0(x)$ e con i polinomi $H_s(x)$, $H_s(ix)$, essendo $i^2 = -1$.

D'altra parte quale estensione della (1) si ha

$$h_\nu(x)\, H_{n+\nu}(x) - H_\nu(x)\, h_{n+\nu}(x) = \nu!\, e^{x^2/2} G_{n-1,\nu}(x) \qquad (\nu \geq 0), \tag{5}$$

con $G_{n-1,\nu}(x)$ polinomio di grado $n-1$ in x, definito dalle

$$G_{0,\nu}(x) = 1, \;\; G_{1,\nu}(x) = x, \;\; G_{n,\nu}(x) - xG_{n-1,\nu}(x) + (n+\nu)\, G_{n-2,\nu}(x) = 0. \tag{6}$$

E si presenta naturale la estensione dei risultati noti per i $G_n(x)$ ai $G_{n,\nu}(x)$, al fine di stabilire sopratutto formule generali di riduzione per gli $h_{n+\nu}(x)$ a partire da $h_\nu(x)$. Ciò sarà fatto nella prima parte di questo lavoro. Alla quale seguirà la ricerca di relazioni integrali per stabilire legami tra i polinomi in questione e gli ipergeometrici. E poichè le (6) che definiscono i $G_{n,\nu}(x)$ si lasciano pure studiare per ν intero negativo, saranno assegnati dei risultati relativi a questo caso.

Inoltre sarà stabilita una formula di riduzione tra funzioni e polinomi di LAGUERRE. E chiuderà un'appendice sulla espressione dei polinomi $H_n(x)$ con i $G_n(x)$.

Il lavoro — come si vedrà — ha per i $G_{n,\nu}(x)$ ampiezza maggiore di una semplice estensione, in quanto contiene nuovi risultati, non assegnati nei precedenti lavori ($\nu = 0$) o dedotti ora per $\nu < 0$. Consente un'ampia visione sui

---

[1] L. TOSCANO: *Polinomi associati a polinomi classici*, Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 387-402 (1953); *Le funzioni del cilindro parabolico come caso limite delle funzioni ipergeometriche*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **9**, 29-38 (1954); *Carattere ipergeometrico dei polinomi associati a quelli di Hermite*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **9**, 146-150 (1954).

legami tra funzioni e polinomi di HERMITE con i relativi associati. E con altri risultati sulle funzioni e sui polinomi di LAGUERRE apre la via ad analoghe ricerche.

Polinomi $G_{n,\nu}(x)$ per ν intero positivo, o nullo, e formule di riduzione.

1. – I polinomi $G_{n,\nu}(x)$ per $\nu = -1$ si identificano con quelli di HERMITE, e per $\nu = 0$ con gli associati studiati da NIELSEN e da altri. Si può quindi dire che essi, al variare dell'intero positivo ν, costituiscono una catena di polinomi associati a quelli di HERMITE.

La $G_{-1,\nu}(x)$ è da ritenersi nulla.

Dalla relazione ricorrente (6) si ha facilmente la rappresentazione:

$$(7)\qquad G_{n,\nu}(x) = \begin{vmatrix} x & \nu+n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & \nu+n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \nu+n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x & \nu+3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x & \nu+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Nel determinante moltiplichiamo gli elementi della prima parallela al disotto della diagonale principale rispettivamente per

$$\sqrt{\nu+n}, \qquad \sqrt{\nu+n-1}, \qquad \dots, \qquad \sqrt{\nu+3}, \qquad \sqrt{\nu+2},$$

e dividiamo quelli della prima parallela al disopra rispettivamente per le stesse quantità. Si ha l'altra rappresentazione:

$$(8)\quad G_{n,\nu}(x) = \begin{vmatrix} x & \sqrt{\nu+n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\nu+n} & x & \sqrt{\nu+n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\nu+n-1} & x & \sqrt{\nu+n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\nu+4} & x & \sqrt{\nu+3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{\nu+3} & x & \sqrt{\nu+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sqrt{\nu+2} & x \end{vmatrix}.$$

Il nuovo determinante risulta simmetrico, e per un teorema di CAUCHY e SYLVESTER si può concludere che l'equazione $G_{n,\nu}(x) = 0$ ha tutte le sue radici reali.

Per la più grande radice vale la limitazione (²)

$$|x|_{\max} < \sqrt{\nu + n - 1} + \sqrt{\nu + n}. \tag{9}$$

Sempre dallo stesso determinante si ha

$$\lim_{\nu \to \infty} \nu^{-n/2} G_{n,\nu}(2 \cos \varphi \cdot \sqrt{\nu}) = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\varphi}{\operatorname{sen} \varphi}. \tag{10}$$

2. – In analogia a quanto è stato fatto per gli $H_n(x)$ e i $G_n(x)$, esaminiamo l'espressione

$$\Delta_n(x) = G^2_{n,\nu}(x) - G_{n-1,\nu}(x)\, G_{n+1,\nu}(x)\,.$$

Proveremo che vale lo sviluppo

$$\Delta_n(x) = (\nu + 1, n) + \sum_1^n {}_r \binom{n+\nu}{r-1} (r-1)!\, G^2_{n-r,\nu}(x), \tag{11}$$

e quindi che essa è sempre positiva.

Infatti

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= G_{n,\nu}(x)\,[xG_{n-1,\nu}(x) - (n+\nu)G_{n-2,\nu}(x)] - \\ &- G_{n-1,\nu}(x)\,[xG_{n,\nu}(x) - (n+\nu+1)G_{n-1,\nu}(x)] = \\ &= (n+\nu+1)G^2_{n-1,\nu}(x) - (n+\nu)G_{n-2,\nu}(x)G_{n,\nu}(x) = \\ &= G^2_{n-1,\nu}(x) + (n+\nu)\,[G^2_{n-1,\nu}(x) - G_{n-2,\nu}(x)G_{n,\nu}(x)]\,, \end{aligned}$$

(²) H. WITTMEYER: *Einfluss der Anderung einer Matrix auf die Lösung des zugehörigen Gleichungssystemes, sowie auf die charakteristischen Zahlen und Eigenvektoren*, Z. Angew. Math. Mech. **16**, 287-300 (1936); *Über die Lösung von linearen Gleichungssystemen durch Iteration*, Z. Angew. Math. Mech. **16**, 301-310 (1936).

da cui segue la relazione ricorrente

$$\Delta_n(x) = G^2_{n-1,\nu}(x) + (n+\nu)\Delta_{n-1}(x)\,.$$

Successivamente

$$\Delta_n(x) = G^2_{n-1,\nu}(x) + \binom{n+\nu}{1} 1!\; G^2_{n-2,\nu}(x) + \binom{n+\nu}{2} 2!\; \Delta_{n-2}(x)\,,$$

$$\Delta_n(x) = G^2_{n-1,\nu}(x) + \binom{n+\nu}{1} 1!\; G^2_{n-2,\nu}(x) + \\ + \binom{n+\nu}{2} 2!\; G^2_{n-3,\nu}(x) + \binom{n+\nu}{3} 3!\; \Delta_{n-3}(x)\,.$$

Così procedendo, e tenendo presente che

$$\Delta_0(x) = 1, \qquad \Delta_1(x) = \nu + 2,$$

si perviene alla (11). Essa si può anche presentare nella forma

$$(11') \qquad \Delta_n(x) = (n+\nu)! \left[\frac{1}{\nu!} + \sum_0^{n-1}{}_r \frac{G^2_{r,\nu}(x)}{(\nu+r+1)!}\right].$$

E risulta nota (3) solo per $\nu = -1$ e $\nu = 0$.

3. – Passiamo a stabilire la derivata rispetto a x del polinomio $G_{n,\nu}(x)$, e l'equazione differenziale a cui soddisfa.

Premettiamo intanto un'altra relazione che ci sarà utile anche per tale ricerca.

Combinando la (5) con la (1) si ha subito

$$\nu!\; G_{n,\nu}(x) = H_\nu(x)\, G_{n+\nu}(x) - G_{\nu-1}(x) H_{n+\nu+1}(x),$$

(3) L. Toscano: *Su una disuguaglianza relativa ai polinomi di Hermite*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **7**, 171-173 (1952). L. Koschmieder, *Das Vorzeichen gewisser aus Hermiteschen Polynomen zweiter Art gebildeter Determinanten*, Akad. Wiss. Wien, Math.-Nat. Kl. Anz. 165-167 (1951).

e da questa, con la (6), segue

$$\nu!\ G_{n,\nu}(x) = G_{n+1}(x)\,[xH_{\nu-1}(x) - (\nu-1)H_{\nu-2}(x)] -$$

$$- H_{n+\nu+1}(x)\,[xG_{\nu-2}(x) - (\nu-1)G_{\nu-2}(x)] =$$

$$= x\,[H_{\nu-1}(x)\,G_{n+\nu}(x) - G_{\nu-2}(x)H_{n+\nu+1}(x)] -$$

$$- (\nu-1)\,[H_{\nu-2}(x)\,G_{n+\nu}(x) - G_{\nu-3}(x)H_{n+\nu+1}(x)] =$$

$$= (\nu-1)\,!\,xG_{n+1,\nu-1}(x) - (\nu-1)!\ G_{n+2,\nu-2}(x),$$

cioè

(12) $$\nu\,G_{n,\nu}(x) = x\,G_{n+1,\nu-1}(x) - G_{n+2,\nu-2}(x).$$

Deriviamo ora la (5) rispetto a x, dopo avere sostituito n con $n+1$. Si ha:

$$\nu!\ e^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{n,\nu}(x) + \nu\,!\ e^{x^2/2}\,x\,G_{n,\nu}(x) =$$

$$= \nu\,[h_{\nu-1}(x)H_{n+\nu+1}(x) - H_{\nu-1}(x)\,h_{n+\nu+1}(x)] +$$

$$+ (n+\nu+1)[h_{\nu}(x)H_{n+\nu}(x) - H_{\nu}(x)\,h_{n+\nu}(x)]\,.$$

Per la stessa (5) segue

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{n,\nu}(x) = G_{n+1,\nu-1}(x) + (n+\nu+1)G_{n-1,\nu}(x) - xG_{n,\nu}(x),$$

e per la (6) si conclude

(13) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{n,\nu}(x) = G_{n+1,\nu-1}(x) - G_{n+1,\nu}(x).$$

Ottenuta la derivata prima del polinomio $G_{n,\nu}(x)$, passiamo al calcolo della espressione differenziale

$$F = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G_{n,\nu}(x) + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{n,\nu}(x) + (n+2\nu+2)G_{n,\nu}(x).$$

Si ha, per la (13),

$$F = G_{n+2,\nu-2}(x) - 2G_{n+2,\nu-1}(x) + G_{n+2,\nu}(x) + \\ + xG_{n+1,\nu-1}(x) - xG_{n+1,\nu}(x) + (n + 2\nu + 2)G_{n,\nu}(x).$$

E, per la (12),

$$F = 2xG_{n+1,\nu-1}(x) - 2G_{n+2,\nu-1}(x) + G_{n+2,\nu}(x) - xG_{n+1,\nu}(x) + (n + \nu + 2)G_{n,\nu}(x).$$

E, per la (6),

$$F = 2(n + \nu + 1)G_{n,\nu-1}(x).$$

Si può pertanto concludere che i polinomi $G_{n,\nu}(x)$ verificano l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2}{dx^2}G_{n,\nu}(x) + x\frac{d}{dx}G_{n,\nu}(x) + (n + 2\nu + 2)G_{n,\nu}(x) = 2(n + \nu + 1)G_{n,\nu-1}(x). \tag{14}$$

4. – Dalla (5) si ha

$$\nu!\, e^{x^2/2} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{t^{n+\nu}}{(n+\nu)!} G_{n-1,\nu}(x) = \\ = h_\nu(x) \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{t^{n+\nu}}{(n+\nu)!} H_{n+\nu}(x) - H_\nu(x) \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{t^{n+\nu}}{(n+\nu)!} h_{n+\nu}(x),$$

e aggiungendo e togliendo al secondo membro l'espressione

$$h_\nu(x) \sum_{0}^{\nu}{}_r \frac{t^r}{r!} H_r(x) - H_\nu(x) \sum_{0}^{\nu}{}_r \frac{t^r}{r!} h_r(x) = \\ = -\sum_{0}^{\nu}{}_r \frac{t^r}{r!}[h_r(x)H_\nu(x) - H_r(x)\, h_\nu(x)] = -e^{x^2/2} \sum_{0}^{\nu}{}_r t^r G_{\nu-r-1,r}(x),$$

segue

$$\nu!\, e^{x^2/2} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{t^{n+\nu}}{(n+\nu)!} G_{n-1,\nu}(x) = h_\nu(x) \sum_{0}^{\infty}{}_r \frac{t^r}{r!} H_r(x) - \\ - H_\nu(x) \sum_{0}^{\infty}{}_r \frac{t^r}{r!} h_r(x) + e^{x^2/2} \sum_{0}^{\nu}{}_r t^r G_{\nu-r-1,r}(x).$$

Intanto è noto che [4]

$$\sum_0^\infty{}_r \frac{t^r}{r!} H_r(x) = e^{tx-t^2/2},$$

$$\sum_0^\infty{}_r \frac{t^r}{r!} h_r(x) = e^{tx-t^2/2} h_0(x-t) .$$

Quindi si ottiene lo sviluppo in serie per i polinomi $G_{n,\nu}(x)$:

$$(15)\quad \nu! \sum_1^\infty{}_n \frac{t^{n+\nu}}{(n+\nu)!} G_{n-1,\nu}(x) = e^{-(x-t)^2/2}[h_\nu(x) - H_\nu(x) h_0(x-t)] + \sum_0^\nu{}_r t^r G_{\nu-r-1,r}(x).$$

Da esso risulta poi

$$\nu!\ G_{n-1,\nu}(x) = \left\{ \frac{\mathrm{d}^{n+\nu}}{\mathrm{d}t^{n+\nu}} e^{-(x-t)^2/2}[h_\nu(x) - H_\nu(x) h_0(x-t)] \right\}_{t=0} =$$

$$= (-1)^{n+\nu} h_\nu(x) \left[\frac{\mathrm{d}^{n+\nu}}{\mathrm{d}(x-t)^{n+\nu}} e^{-(x-t)^2/2}\right]_{t=0} -$$

$$-(-1)^{n+\nu} H_\nu(x) \left[\frac{\mathrm{d}^{n+\nu}}{\mathrm{d}(x-t)^{n+\nu}} e^{-(x-t)^2/2} h_0(x-t)\right]_{t=0},$$

e in conclusione

$$(16)\qquad \nu!\ G_{n-1,\nu}(x) = (-1)^{n+\nu} \left[h_\nu(x) \frac{\mathrm{d}^{n+\nu}}{\mathrm{d}x^{n+\nu}} - H_\nu(x) \frac{\mathrm{d}^{n+\nu}}{\mathrm{d}x^{n+\nu}} h_0(x)\right] e^{-x^2/2}.$$

5. – Esprimiamo ora i polinomi $G_{n,\nu}(x)$ con quelli di HERMITE, e stabiliamo il loro carattere ipergeometrico.

Prendiamo le mosse dalla

$$G_n(x) = \sum_0^{\leq n/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r}{r} r!\ H_{n-2r}(x),$$

e passiamo allo sviluppo di $G_{n,1}(x)$.

([4]) Cfr. prima Nota citata in ([1]).

Si ha

$$G_{n,1}(x) = \sum_{0}^{\leq (n+1)/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r+1}{r} r!\ H_1(x) H_{n-2r+1}(x) - H_{n+2}(x) =$$

$$= \sum_{0}^{\leq (n+1)/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r+1}{r} r!\ [H_{n-2r+2}(x) + (n-2r+1) H_{n-2r}(x)] - H_{n+2}(x) =$$

$$= \sum_{1}^{\leq (n+1)/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r+1}{r} r!\ H_{n-2r+2}(x) + \sum_{0}^{\leq n/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r+1}{r+1} (r+1)!\ H_{n-2r}(x) =$$

$$= \sum_{0}^{\leq (n-1)/2}{}_r (-1)^{r+1} \binom{n-r}{r+1} (r+1)!\ H_{n-2r}(x) +$$

$$+ \sum_{0}^{\leq n/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r+1}{r+1} (r+1)!\ H_{n-2r}(x) =$$

$$= \sum_{0}^{\leq n/2}{}_r (-1)^r \left[\binom{n-r+1}{r+1} - \binom{n-r}{r+1}\right] (r+1)!\ H_{n-2r}(x),$$

e infine

$$G_{n,1}(x) = \sum_{0}^{\leq n/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r}{r} (r+1)!\ H_{n-2r}(x).$$

Analogamente

$$2!\ G_{n,2}(x) = \sum_{0}^{\leq n/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r}{r} (r+2)!\ H_{n-2r}(x).$$

E si è così indotti a ritenere la formula generale nella forma

$$G_{n,\nu}(x) = \sum_{0}^{\leq n/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r}{r} (\nu+1, r)\ H_{n-2r}(x). \tag{17}$$

Essa è vera per $\nu = 0, 1, 2$. E supposta tale per ν si ha con la (12), per $\nu + 1$,

$$(\nu + 1)\, G_{n,\nu+1}(x) = H_1(x) \sum_0^{\leq (n+1)/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r+1}{r} (\nu+1, r)\, H_{n-2r+1}(x) -$$

$$- \sum_0^{\leq (n+2)/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r+2}{r} (\nu, r)\, H_{n-2r+2}(x) =$$

$$= \sum_1^{\leq (n+1)/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r+1}{r} (\nu+1, r)\, H_{n-2r+2}(x) +$$

$$+ \sum_0^{\leq n/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r+1}{r+1} (r+1)(\nu+1, r)\, H_{n-2r}(x) +$$

$$+ \sum_1^{\leq (n+2)/2}{}_r (-1)^{r+1} \binom{n-r+2}{r} (\nu, r)\, H_{n-2r+2}(x) =$$

$$= \sum_0^{\leq (n-1)/2}{}_r (-1)^{r+1} \binom{n-r}{r+1} (\nu+1, r+1)\, H_{n-2r}(x) +$$

$$+ \sum_0^{\leq n/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r+1}{r+1} (r+1)(\nu+1, r) H_{n-2r}(x) +$$

$$+ \sum_0^{\leq n/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r+1}{r+1} (\nu, r+1)\, H_{n-2r}(x) =$$

$$= \sum_0^{\leq n/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r}{r} (\nu+1, r+1)\, H_{n-2r}(x)\,.$$

Pertanto risulta provata la (17).

Da questo sviluppo, tenendo presente che

$$H_n(x) = \sum_0^{\leq n/2}{}_r (-1)^r \binom{n}{2r} \frac{(2r)!}{2^r r!} x^{n-2r},$$

si ha:

$$G_{n,\nu}(x) = \sum_0^{\leq n/2}{}_s (-1)^s \binom{n-s}{s} (\nu+1, s) \sum_0^{\leq (n-2s)/2}{}_r (-1)^r \binom{n-2s}{2r} \frac{(2r)!}{2^r r!} x^{n-2s-2r} =$$

$$= \sum_0^{\leq n/2}{}_m \frac{(-1)^m x^{n-2m}}{(n-2m)!} \sum_0^{m}{}_s \frac{(n-s)!\ (\nu+1, s)}{2^{m-s}(m-s)!\ s!} =$$

$$= \sum_0^{\leq n/2}{}_m \frac{(-1)^m x^{n-2m}}{(n-2m)!} \frac{n!}{2^m m!}\ {}_2F_1(-m, \nu+1; -n; 2) =$$

$$= n! \sum_0^{\leq n/2}{}_m (-1)^m \frac{{}_2F_1(-m,\ \nu+1;\ -n;\ 2)}{2^m\ (n-2m)!\ m!} x^{n-2m}\,.$$

E specializzando per indice pari ($2n$) e dispari ($2n+1$) seguono le relazioni particolari

$$(18)\qquad G_{2n,\nu}(x) = (-2)^n\left(\frac{1}{2}, n\right)\sum_0^n{}_m \frac{(-n,\ m)\ {}_2F_1(-n+m,\ \nu+1;\ -2n;\ 2)}{\left(\frac{1}{2},\ m\right)\ m!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^m,$$

$$(19)\qquad G_{2n+1,\nu}(x) = (-2)^n\left(\frac{3}{2}, n\right)x\sum_0^n{}_m \frac{(-n,\ m)\ {}_2F_1(-n+m;\ \nu+1;\ -2n-1;\ 2)}{\left(\frac{3}{2},\ m\right)m!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^m.$$

D'altra parte è noto che la funzione ipergeometrica confluente, a due variabili,

$$\psi_1(a;\ b;\ c,\ c';\ x,\ y) = \sum_{r,\ s}^{0\ldots\infty}\frac{(a,\ r+s)\ (b,\ r)}{(c,\ r)\ (c',\ s)\ r!\ s!}\ x^r\ y^s \qquad (|\ x\ |+|\ y\ |<1)$$

ammette lo sviluppo

$$\psi_1(a;\ b;\ c,\ c';\ x,\ y) = \sum_0^\infty{}_m \frac{(a,\ m)}{(c',\ m)\ m!}\ {}_2F_1(a+m,\ b;\ c;\ x)\ y^m .$$

Facciamo, in questa prima,

$$a = -n, \qquad b = \nu+1, \qquad c = -2n, \qquad c' = \frac{1}{2}, \qquad x = 2, \qquad y \equiv \frac{x^2}{2}$$

e poi

$$a = -n, \qquad b = \nu+1, \qquad c = -2n-1, \qquad c' = \frac{3}{2}, \qquad x = 2, \qquad y \equiv \frac{x^2}{2}.$$

Confrontiamo con le (18) e (19), e troviamo:

$$(18')\qquad G_{2n,\nu}(x) = (-2)^n\left(\frac{1}{2}, n\right)\psi_1\!\left(-n;\ \nu+1;\ -2n,\ \frac{1}{2};\ 2,\ \frac{x^2}{2}\right),$$

$$(19')\qquad G_{2n+1,\nu}(x) = (-2)^n\left(\frac{3}{2}, n\right)x\ \psi_1\left(-n;\ \nu+1;\ -2n-1,\ \frac{3}{2};\ 2,\ \frac{x^2}{2}\right),$$

che stabiliscono il carattere ipergeometrico dei polinomi $G_{2n,\nu}(x)$, $(1/x)\ G_{2n+1,\nu}(x)$.

Essi si possono considerare, a meno di un fattore numerico, quali particolari polinomi ψ_1 con una variabile uguale a 2.

Introdotto il polinomio

$$\psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!}\ \psi_1\left(-n;\ \nu+1;\ -2n-\alpha-\frac{1}{2},\ \alpha+1;\ 2,\ x\right),$$

le precedenti si possono presentare nella forma:

$$G_{2n,\nu}(x) = (-2)^n n!\ \psi_{n,\nu}^{(-1/2)}\left(\frac{x^2}{2}\right), \tag{18''}$$

$$G_{2n+1,\nu}(x) = (-2)^n n!\ x\ \psi_{n,\nu}^{(1/2)}\left(\frac{x^2}{2}\right), \tag{19''}$$

che richiama le cosiddette formule di SZEGÖ tra polinomi di HERMITE e di LAGUERRE.

6. – In corrispondenza alla formula di moltiplicazione dei polinomi di HERMITE,

$$H_n(tx) = \sum_{0}^{\leq n/2}{}_r\ (-1)^r \binom{n}{2r} \frac{(2r)!}{2^r r!}\ t^{n-2r}(1-t^2)^r\ H_{n-2r}(x)\ ,$$

si può stabilire l'analoga per i polinomi associati. Essa è nuova anche per gli associati di NIELSEN ($\nu = 0$).

Dalla (17) si ha

$$G_{n,\nu}(tx) =$$

$$= \sum_{0}^{\leq n/2}{}_s\ (-1)^s \binom{n-s}{s} (\nu+1,\ s) \sum_{0}^{\leq (n-2s)/2}{}_r\ (-1)^r \binom{n-2s}{2r} \frac{(2r)!}{2^r r!}\ t^{n-2s-2r}(1-t^2)^r\ H_{n-2s-2r}(x) =$$

$$= \sum_{0}^{\leq n/2}{}_m\ \frac{(-1)^m t^{n-2m}}{(n-2m)!}\ H_{n-2m}(x) \sum_{0}^{m}{}_r\ \frac{(n-m+r)!\ (\nu+1,\ m-r)}{2^r (m-r)!\ r!}\ (1-t^2)^r =$$

$$= \sum_{0}^{\leq n/2}{}_m\ \frac{(-1)^m\ t^{n-2m}}{(n-2m)!}\ H_{n-2m}(x)\ \frac{n!}{m!}\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^m {}_2F_1\left(-m,\ \nu+1;\ -n;\ \frac{2}{1-t^2}\right).$$

Ma

$${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ x) = (1-x)^{-a}\ {}_2F_1\left(a,\ c-b;\ c;\ \frac{x}{x-1}\right),$$

quindi

$$G_{n,\nu}(tx) = n! \sum_{0}^{\leq n/2} {}_m \frac{t^{n-2m}(1+t^2)^m}{2^m(n-2m)!\ m!}\ {}_2F_1\left(-m, -n-\nu-1; -n; \frac{2}{1+t^2}\right) H_{n-2m}(x) .$$

Ancora

$${}_2F_1(-n, b; c; x) = \frac{(b, n)}{(c, n)}(-x)^n {}_2F_1\left(-n, -n-c+1; -n-b+1; \frac{1}{x}\right).$$

E poi si conclude

$$(20) \qquad G_{n,\nu}(tx) = \sum_{0}^{\leq n/2} {}_m (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n-2m)!}\binom{n+\nu+1}{m} t^{n-2m} \cdot$$

$$\cdot {}_2F_1\left(-m, -m+n+1; -m+n+\nu+2; \frac{1+t^2}{2}\right) H_{n-2m}(x).$$

Per $t=1$ si ritrova la (17).

Per $t=-i$ e mutando x in ix si ha l'altro sviluppo notevole

$$(20') \qquad G_{n,\nu}(x) = (-i)^n \sum_{0}^{\leq n/2} {}_m \binom{n-m}{m}\binom{n+\nu+1}{m} m!\ H_{n-2m}(ix) .$$

Introducendo i polinomi di JACOBI

$$P_m^{(a,b)}(x) = \frac{(a+1, m)}{m!}\ {}_2F_1\left(-m, m+a+b+1; a+1; \frac{1-x}{2}\right),$$

allo sviluppo (20) si può dare la forma:

$$(21) \qquad G_{n,\nu}(tx) = \sum_{0}^{\leq n/2} {}_m (-1)^m \binom{n-m}{m} m!\ t^{n-2m} P_m^{(-m+n+\nu+1, -m-\nu-1)}(-t^2)\ H_{n-2m}(x) .$$

7. - Le (17), (20'), (21) ci consentono di stabilire le formule di riduzione:

$$(22) \qquad H_\nu(x)\, h_{n+\nu}(x) = h_\nu(x) H_{n+\nu}(x) -$$

$$- e^{x^2/2} \sum_{0}^{\leq (n-1)/2} {}_r (-1)^r \binom{n-r-1}{r} (\nu+r)!\ H_{n-2r-1}(x) ,$$

$$H_\nu(x) h_{n+\nu}(x) = h_\nu(x) H_{n+\nu}(x) - \tag{23}$$

$$- (-i)^{n-1}\, \nu!\; e^{x^2/2} \sum_{m\,0}^{\leq (n-1)/2} \binom{n-m-1}{m} \binom{n+\nu}{m}\, m!\; H_{n-2m-1}(ix),$$

$$H_\nu(tx)\, h_{n+\nu}(tx) = h_\nu(tx) H_{n+\nu}(tx) - \tag{24}$$

$$- \nu!\; e^{t^2x^2/2} \sum_{m\,0}^{\leq (n-1)/2} (-1)^m \binom{n-m-1}{m}\, m!\; t^{n-2m-1} P_m^{(-m+n+\nu,\, -m-\nu-1)}(-t^2)\, H_{n-2m-1}(x) .$$

Relazioni integrali su i polinomi $G_{n,\nu}(x)$.

8. – Al fine di stabilire nuovi legami tra i polinomi associati e gli ipergeometrici, troviamo alcune relazioni integrali.

a) Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} G_{n,\nu}^2(tx)\, dx = \sum_{r\,0}^{\leq n/2} \sum_{s\,0}^{\leq n/2} \frac{(-1)^{r+s}(n-r)!\,(n-s)!}{(n-2r)!\,(n-2s)!}\, t^{2n-2r-2s} P_r^{(a,b)}(-t^2) P_s^{(a',b')}(-t^2).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_{n-2r}(x)\, H_{n-2s}(x)\, dx ,$$

con

$$a = n - r + \nu + 1 , \qquad b = -r - \nu - 1 ,$$

$$a' = n - s + \nu + 1 , \qquad b' = -s - \nu - 1 .$$

E a calcoli eseguiti risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} G_{n,\nu}^2(tx)\, dx = \sqrt{2\pi} \sum_{r\,0}^{\leq n/2} \frac{[(n-r)!]^2}{(n-2r)!}\, t^{2n-4r} [P_r^{(a,b)}(-t^2)]^2 . \tag{25}$$

In particolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} G_{n,\nu}^2(x)\, dx = \sqrt{2\pi} \sum_{r\,0}^{\leq n/2} \frac{[(n-r)!]^2}{(n-2r)!} \binom{\nu+r}{\nu}^2, \tag{25'}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} G_{n,\nu}^2(-ix)\, dx = (-1)^n \sqrt{2\pi} \sum_{r\,0}^{\leq n/2} \frac{[(n-r)!]^2}{(n-2r)!} \binom{n+\nu+1}{r}^2. \tag{25''}$$

Si ha pure:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, G_{m,\nu}(tx)\, G_{n,\nu}(tx)\, \mathrm{d}x = 0, \tag{26}$$

con $m \neq n$ e di parità diversa.

b) Più interessante è la seguente relazione integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, G_{2n,\nu}(tx)\, \mathrm{d}x = \sum_{0}^{\leq n}{}_r\, (-1)^r \binom{2n-r}{r}\, r!\; t^{2n-2r}\; P_r^{(\alpha,\beta)}(-t^2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_{2n-2r}(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

con

$$\alpha = 2n - r + \nu + 1\,, \qquad \beta = -r - \nu - 1\,.$$

Ma questo ultimo integrale è nullo per $r \neq n$ e uguale a $\sqrt{2\pi}$ per $r = n$. Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, G_{2n,\nu}(tx)\, \mathrm{d}x = (-1)^n\, n!\; \sqrt{2\pi}\, P_n^{(n+\nu+1,\, -n-\nu-1)}(-t^2). \tag{27}$$

In particolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, G_{2n,\nu}(x)\, \mathrm{d}x = (-1)^n\; (\nu+1,\, n)\, \sqrt{2\pi}\,, \tag{27'}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, G_{2n,\nu}(-ix)\, \mathrm{d}x = (-1)^n\; (n+\nu+2,\; n)\, \sqrt{2\pi}\,. \tag{27''}$$

c) Dalla nota relazione integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-px} H_{2n+1}(\sqrt{x})\, \mathrm{d}x = \frac{(2n+1)!}{2^{n+1}\, n!}\, \frac{1}{p} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\frac{1}{2p} - 1\right)^n$$

si ha

$$\int_0^\infty e^{-px}\, G_{2n+1,\nu}(t\sqrt{x})\, dx =$$

$$= \sum_0^n {}_r (-1)^r \binom{2n-r+1}{r} r!\, t^{2n-2r+1}\, P_r^{(\alpha',\beta')}(-t^2) \int_0^\infty e^{-px}\, H_{2n-2r+1}(\sqrt{x})\, dx\,,$$

con

$$\alpha' = 2n - r + \nu + 2\,, \qquad \beta' = -r - \nu - 1\,.$$

E in conclusione:

$$\int_0^\infty e^{-px}\, G_{2n+1,\nu}(t\sqrt{x})\, dx = \tag{28}$$

$$= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \frac{t}{2p} \sum_0^n {}_r \frac{(2n-r+1)!}{(n-r)!} \left(\frac{2p-1}{4p}\, t^2\right)^{n-r} P_r^{(\alpha',\beta')}(-t^2)\,.$$

Per $t = 1$ si ha dapprima

$$\int_0^\infty e^{-px}\, G_{2n+1,\nu}(\sqrt{x})\, dx =$$

$$= \frac{(2n+1)!}{n!}\, \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\frac{1-2p}{4p}\right)^n {}_2F_1\!\left(-n,\ \nu+1;\ -2n-1;\ \frac{4p}{2p-1}\right).$$

Applichiamo la formula

$${}_2F_1(-n,\ b;\ c;\ x) = \frac{(c-b,\ n)}{(c,\ n)}\, {}_2F_1(-n,\ b;\ -n+b-c+1;\ 1-x),$$

e si ha ancora:

$$\int_0^\infty e^{-px}\, G_{2n+1,\nu}(\sqrt{x})\, dx =$$

$$= \frac{n+1}{2}\, \frac{(2n+\nu+2)!}{(n+\nu+2)!}\, \frac{1}{p} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\frac{1-2p}{4p}\right)^n {}_2F_1\!\left(-n,\ \nu+1;\ n+\nu+3;\ \frac{1+2p}{1-2p}\right).$$

Con i polinomi di JACOBI è

$$(28') \qquad \int_0^\infty e^{-px}\, G_{2n+1,\nu}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{(n+1)!}{2}\,\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\frac{1-2p}{4p}\right)^n P_n^{(n+\nu+2,\,-2n-2)}\left(\frac{6p+1}{2p-1}\right).$$

Questa relazione integrale rientra nelle trasformate di LAPLACE, e facendo uso della notazione di calcolo simbolico

$$f(x) \supset \varphi(p), \qquad \text{con} \qquad \varphi(p) = p\int_0^\infty e^{-px} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

si ha

$$(28'') \qquad G_{2n+1,\nu}(\sqrt{x}) \supset \frac{(n+1)!}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\frac{1-2p}{4p}\right)^n P_n^{(n+\nu+2,\,-2n-2)}\left(\frac{6p+1}{2p-1}\right).$$

Polinomi $G_{n,\nu}(x)$ per ν intero negativo.

9. – Superata la ricerca delle formule di riduzione, i polinomi $G_{n,\nu}(x)$ definiti dalle (6) si possono considerare anche per ν intero negativo. Poniamo $\nu = -\varrho$ e ci riferiamo ai polinomi $G_{n,-\varrho}(x)$, con ϱ intero positivo minore od uguale a $n+1$.

Se ϱ è uguale o maggiore a $n+2$, poniamo $\nu = -n-\sigma-2$ e ci riferiamo ai polinomi $G_{n,-n-\sigma-2}(x)$ con σ intero positivo qualsiasi o nullo.

Da un semplice esame della (7), per elementari proprietà dei determinanti, si trova che (5)

$$G_{n,-\varrho}(x) = i^{\varrho-1} H_{\varrho-1}(-ix) H_{n-\varrho+1}(x) \qquad (1 \leqslant \varrho \leqslant n+1),$$

$$G_{n,-n-\sigma-2}(x) = i^n\, G_{n,\sigma}(-ix) \qquad (\sigma \geqslant 0)\,.$$

---

(5) La prima è stata già notata per altra via: cfr. G. PALAMÀ, *Polinomi più generali di altri classici e dei loro associati, e relazioni tra essi. Funzioni di seconda specie*, Rivista Mat. Univ. Parma 4, 363-386 (1953).

E poichè le relazioni trovate per i polinomi $G_{n,\nu}(x)$ con ν intero positivo, valgono — come è facile vedere — per ν intero relativo, si possono qui assegnare delle notevoli relazioni per il prodotto di polinomi di HERMITE

$$i^{\varrho-1}\,H_{\varrho-1}(-ix)H_{n-\varrho+1}(x)\,.$$

Per la (14) si ha

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}+(q-p)\right][H_p(-ix)\,H_q(x)]=2qi\,H_{p+1}(-ix)\,H_{q-1}(x)\,. \tag{29}$$

Il che equivale a dire che il prodotto

$$y=H_p(-ix)\,H_q(x)$$

soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(q-p)y=2qi\,H_{p+1}(-ix)\,H_{q-1}(x)\,.$$

Dalla (17) si ha

$$H_{\varrho-1}(-ix)\,H_{n-\varrho+1}(x)=(-i)^{\varrho-1}\sum_0^{\leq n/2}{}_r\binom{n-r}{r}\binom{\varrho-1}{r}r!\,H_{n-2r}(x)\,. \tag{30}$$

E questa si può invertire. Basta considerare l'altra mia

$$G_n(x)=\sum_0^n{}_r\binom{n+1}{r+1}i^r\,H_r(ix)\,H_{n-r}(x)\,,$$

scriverla nella forma

$$G_n(x)=\sum_0^n{}_r(-1)^r\binom{n+1}{r+1}\,G_{n,-r-1}(x)\,,$$

e supposta vera per n provarla per $n+1$. Risulta

$$H_n(x)=\sum_0^{n-1}{}_r(-1)^r\binom{n}{r+1}i^{r+1}\,H_{r+1}(-ix)\,H_{n-r-1}(x)\,. \tag{31}$$

Dalle (18′) e (19′) seguono le

$$\psi_1\left(-n;\ -\varrho+1;\ -2n,\ \frac{1}{2};\ 2,\ \frac{x^2}{2}\right)=\frac{i^{\varrho-1}}{(-2)^n\left(\frac{1}{2},\ n\right)}\,H_{\varrho-1}(-ix)\,H_{2n-\varrho+1}(x), \tag{32}$$

$$\psi_1\left(-n;\ -\varrho+1;\ -2n-1,\ \frac{3}{2};\ 2,\ \frac{x^2}{2}\right)= \tag{33}$$

$$=\frac{i^{\varrho-1}}{(-2)^n\left(\frac{3}{2},\ n\right)}\,H_{\varrho-1}(-ix)\,H_{2n-\varrho+2}(x),$$

le quali offrono due notevoli casi di decomposizione della ψ_1 e richiamano le altre mie formule di decomposizione [6]:

$$\psi_1\left(\frac{m-n+1}{2};\ -n;\ m-n+1,\ \frac{1}{2};\ 2,\ -\frac{x^2}{2}\right)=$$

$$=(-2)^{\frac{m-n}{2}}\,\frac{m-n}{2}\,!\,\frac{1}{m!}\,e^{-x^2/2}\,H_m(x)\,H_n(x)\qquad(m-n\quad\text{pari}),$$

$$\psi_1\left(\frac{m-n+2}{2};\ -n;\ m-n+1,\ \frac{3}{2};\ 2,\ -\frac{x^2}{2}\right)=$$

$$=(-2)^{\frac{m-n-1}{2}}\,\frac{m-n-1}{2}\,!\,\frac{1}{m!}\,\frac{e^{-x^2/2}}{x}\,H_m(x)\,H_n(x)\qquad(m-n\quad\text{dispari}).$$

La (21) ci dà

$$H_{\varrho-1}(-itx)\,H_{n-\varrho+1}(tx)=(-i)^{\varrho-1}\sum_{0}^{\le n/2}{}_m\,(-1)^m\binom{n-m}{m}\,m!\;t^{n-2m}\,\cdot \tag{34}$$

$$\cdot P_m^{(-m+n-\varrho+1,\ -m+\varrho-1)}(-t^2)\;H_{n-2m}(x)\,.$$

---

(6) L. Toscano, *Trasformata di Laplace di prodotti di funzioni di Bessel e polinomi di Laguerre*, Pont. Acad. Sci. Acta **5**, 471-500 (1941).

E dalle relazioni integrali (25), (27), (28), si ottengono le

$$(35)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, H^2_{\varrho-1}(-itx)\, H^2_{n-\varrho+1}(tx)\, dx =$$

$$= (-1)^{\varrho-1}\sqrt{2\pi}\sum_{0}^{\leq n/2}{}_r \frac{[(n-r)!]^2}{(n-2r)!}\, t^{2n-4r}\, [P_r^{(a,\,b)}(-t^2)]^2,$$

con

$$a = n - r - \varrho + 1, \qquad b = -r + \varrho - 1;$$

$$(36)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, H_{\varrho-1}(-itx)\, H_{2n-\varrho+1}(tx)\, dx = (-1)^{n-\frac{\varrho-1}{2}}\, n!\,\sqrt{2\pi}\, P_n^{(n-\varrho+1,\,-n+\varrho-1)}(-t^2);$$

$$(37)\qquad \int_0^\infty e^{-px}\, H_{\varrho-1}(-it\sqrt{x})\, H_{2n-\varrho+2}(t\sqrt{x})\, dx =$$

$$= (-1)^{n-\frac{\varrho-1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\frac{t}{2p}\sum_{0}^{n}{}_r \frac{(2n-r+1)!}{(n-r)!}\left(\frac{2p-1}{4p}\, t^2\right)^{n-r} P_r^{(2n-r-\varrho+2,\,-r+\varrho-1)}(-t^2);$$

$$(37')\qquad \int_0^\infty e^{-px}\, H_{\varrho-1}(-i\sqrt{x})\, H_{2n-\varrho+2}(\sqrt{x})\, dx =$$

$$= (-i)^{\varrho-1}\,\frac{(n+1)!}{2}\,\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\frac{1-2p}{4p}\right)^n P_n^{(n-\varrho+2,\,-2n-2)}\left(\frac{6p+1}{2p-1}\right).$$

Nota. I polinomi $G_{n,\nu}(x)$ si potrebbero pure studiare per ν reale qualsiasi.

Formula di riduzione tra funzioni e polinomi di Laguerre.

10. – Il primo e il terzo dei miei lavori citati in (1) e il presente aprono la via ad analoghe ricerche sui polinomi associati ad altri polinomi classici.

E poichè tra funzioni e polinomi di LAGUERRE non si conosce ancora alcuna formula di riduzione, inizio tale secondo gruppo di ricerche assegnandone una.

Al polinomio di LAGUERRE

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!}\ {}_1F_1(-n;\ \alpha+1;\ x)$$

corrisponde la funzione

$$l_n^{(\alpha)}(x) = -\Gamma(\alpha)\, x^{-\alpha}\,{}_1F_1(-\alpha-n;\ 1-\alpha;\ x).$$

E si ha

$$l_n^{(\alpha)}(x) = l_0^{(\alpha)}(x)\, L_n^{(\alpha)}(x) + \Gamma(\alpha+1)\, x^{-\alpha} e^x F_{n-1}^{(\alpha)}(x),$$

dove $F_n^{(\alpha)}(x)$ — polinomio associato a quello di LAGUERRE — è definito dalle

$$F_0^{(\alpha)}(x) = 1, \qquad 2F_1^{(\alpha)}(x) = \alpha + 3 - x,$$

$$(n+1)F_n^{(\alpha)}(x) + (x-\alpha-2n-1)F_{n-1}^{(\alpha)}(x) + (\alpha+n)F_{n-2}^{(\alpha)}(x) = 0\,.$$

Qui proveremo che vale la formula di riduzione

$$(38)\quad l_n^{(\alpha)}(x) = l_0^{(\alpha)}(x)\, L_n^{(\alpha)}(x) + \Gamma(\alpha+1)\, x^{-\alpha} e^x \sum_0^{n-1}{}_r \frac{x^{-n+r}}{(n-r,\ r+1)} \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}\left[x^n L_{n-r-1}^{(\alpha)}(x)\right].$$

A differenza di quelle assegnate per le funzioni e i polinomi di HERMITE, interviene nello sviluppo di questa l'operatore derivata. Ma essa è semplicissima e si presta pure per eventuali applicazioni. Così dalla (38) si ha

$$\alpha^{-(n-1)/2}\ F_{n-1}^{(\alpha)}(\alpha - x\sqrt{\alpha}) =$$

$$= \sum_0^{n-1}{}_r \frac{(\alpha - x\sqrt{\alpha})^{-n+r}\alpha^{-r/2}}{(n-r,\ r+1)} \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}(\alpha - x\sqrt{\alpha})^r}\left[(\alpha - x\sqrt{\alpha})^n \alpha^{-(n-r-1)/2} L_{n-r-1}^{(\alpha)}(\alpha - x\sqrt{\alpha})\right] =$$

$$= \sum_0^{n-1}{}_r \frac{(-1)^r\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^{-n+r}}{(n-r,\ r+1)} \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}\left[\left(1-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^n \alpha^{-(n-r-1)/2} L_{n-r-1}^{(\alpha)}(\alpha - x\sqrt{\alpha})\right].$$

E procedendo al limite per $\alpha \to \infty$ si riottiene — con note formule limiti (7) —

$$G_n(x) = \sum_0^{\le n/2}{}_r (-1)^r \binom{n-r}{r} r!\ H_{n-2r}(x)\,.$$

(7) Cfr. seconda Nota citata in (1).

11. – Per dimostrare la (38) prendiamo le mosse dalla formula di derivazione [8]

$$x\,\mathrm{D}\,F_{n-2}^{(a)}(x) = n\,[F_{n-1}^{(a)}(x) - F_{n-2}^{(a)}(x)] - L_{n-1}^{(a)}(x),$$

dove D abbrevia il simbolo $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Essa si può scrivere

$$F_{n-1}^{(a)}(x) = \frac{x\mathrm{D} + n}{n}\,F_{n-2}^{(a)}(x) + \frac{L_{n-1}^{(a)}(x)}{n}.$$

E con processo ricorrente segue:

$$F_{n-1}^{(a)}(x) = \frac{1}{(n,\ 1)}\,L_{n-1}^{(a)}(x) + \frac{x\mathrm{D} + n}{(n-1,\ 2)}\,L_{n-2}^{(a)}(x) + \frac{(x\mathrm{D} + n)(x\mathrm{D} + n - 1)}{(n-1,\ 2)}\,F_{n-3}^{(a)}(x)\,,$$

$$F_{n-1}^{(a)}(x) = \frac{1}{(n,\ 1)}\,L_{n,1}^{(a)}(x) + \frac{(x\mathrm{D} + n,\ 1)}{(n-1,\ 2)}\,L_{n-2}^{(a)}(x) +$$

$$+ \frac{(x\mathrm{D} + n - 1,\ 2)}{(n-2,\ 3)}\,L_{n-3}^{(a)}(x) + \frac{(x\mathrm{D} + n - 2,\ 3)}{(n-2,\ 3)}\,F_{n-4}^{(a)}(x),$$

$$F_{n-1}^{(a)}(x) = \sum_{0}^{n-1}{}_r\,\frac{(x\mathrm{D} + n - r + 1,\ r)}{(n-r,\ r+1)}\,L_{n-r-1}^{(a)}(x)\,.$$

E poichè [9]

$$(x\,\mathrm{D} + n - r + 1,\ r) = x^{-n+r}\,\mathrm{D}^r\,x^n,$$

si ha

$$F_{n-1}^{(a)}(x) = \sum_{0}^{n-1}{}_r\,\frac{x^{-n+r}\,\mathrm{D}^r x^n}{(n-r,\ r+1)}\,L_{n-r-1}^{(a)}(x)\,,$$

e quindi la (38).

---

(8) G. Palamà, *Relazioni integrali tra le funzioni di Hermite e di Laguerre di prima e seconda specie, e su dei polinomi ad esse associati*, Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 105-122 (1953).

(9) L. Toscano, *Sulla iterazione dell'operatore* xD, Univ. Roma, Ist. Naz. Alta Mat., Rend. Mat. e Appl. (5) **8**, 337-350 (1949).

12. – Anche per i polinomi $F_{n-1}^{(\alpha)}(x)$, come per i $G_{n-1}(x)$, si può stabilire uno sviluppo generatore.

Si sa che

$$\sum_0^\infty {}_n\, t^n L_n^{(\alpha)}(x) = (1-t)^{-\alpha-1}\, e^{\frac{-tx}{1-t}} \qquad (|t|<1),$$

ed io ho provato in una Nota in corso di stampa che

$$\sum_0^\infty {}_n\, t^n\, l_n^{(\alpha)}(x) = (1-t)^{-\alpha-1}\, e^{\frac{-tx}{1-t}}\, l_0^{(\alpha)}\left(\frac{x}{1-t}\right) \qquad (|t|<1)\,.$$

Allora

$$\Gamma(\alpha+1)\, x^{-\alpha} e^x \sum_1^\infty {}_n\, t^n F_{n-1}^{(\alpha)}(x) = (1-t)^{-\alpha-1} e^{\frac{-tx}{1-t}}\, l_0^{(\alpha)}\left(\frac{x}{1-t}\right) - (1-t)^{-\alpha-1} e^{\frac{-tx}{1-t}}\, l_0^{(\alpha)}(x),$$

e quindi

$$(39) \qquad \sum_1^\infty {}_n\, t^n F_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\, e^{-\frac{x}{1-t}}\, (1-t)^{-\alpha-1} \left[l_0^{(\alpha)}\left(\frac{x}{1-t}\right) - l_0^{(\alpha)}(x)\right] \qquad (|t|<1).$$

Appendice.

L'espressione dei polinomi di HERMITE in funzione degli associati non si può realizzare con una formula semplice. Limitatamente agli associati di NIELSEN, invertendo la (17) si ha:

$$(-1)^{n(n+1)/2} H_{2n}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} G_0(x) & 0 & 0 & \dots & \binom{0}{0} 0! \\ G_2(x) & 0 & 0 & \dots & -\binom{1}{1} 1! \\ G_4(x) & 0 & 0 & \dots & \binom{2}{2} 2! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{2n-4}(x) & 0 & \binom{2n-4}{0} 0! & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n-2}{n-2}(n-2)! \\ G_{2n-2}(x) & \binom{2n-2}{0} 0! & -\binom{2n-3}{1} 1! & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}(n-1)! \\ G_{2n}(x) & -\binom{2n-1}{1} 1! & \binom{2n-2}{2} 2! & \dots & (-1)^n \binom{n}{n} n! \end{vmatrix},$$

$$(-1)^{n(n+1)/2}\, H_{2n+1}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} G_1(x) & 0 & 0 & \ldots & \binom{1}{0} 0! \\ G_3(x) & 0 & 0 & \ldots & -\binom{2}{1} 1! \\ G_5(x) & 0 & 0 & \ldots & \binom{3}{2} 2! \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{2n-3}(x) & 0 & \binom{2n-3}{0} 0! & \ldots & (-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}(n-2)! \\ G_{2n-1}(x) & \binom{2n-1}{0} 0! & -\binom{2n-2}{1} 1! & \ldots & (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(n-1)! \\ G_{2n+1}(x) & -\binom{2n}{1} 1! & \binom{2n-1}{2} 2! & \ldots & (-1)^{n}\binom{n+1}{n} n! \end{vmatrix}.$$

E posto

$$H_{2n}(x) = \sum_0^n {}_r\, a_r G_{2n-2r}(x), \qquad H_{2n+1}(x) = \sum_0^n {}_r\, b_r G_{2n-2r+1}(x),$$

notiamo, per utilità pratica, l'espressione dei primi coefficienti:

$a_0 = 1, \quad a_1 = 2n - 1, \quad a_2 = 2n - 3, \quad a_3 = -(2n-5)^2,$

$$a_4 = (2n-7)(4n^2 - 28n + 47);$$

$b_0 = 1, \quad b_1 = 2n, \quad b_2 = 2n - 2, \quad b_3 = -(2n-4)^2,$

$$b_4 = 2(2n-6)(2n^2 - 12n + 17).$$