Rivista Mat. Univ. Parma 6, 111-115 (1955)

GIOVANNI AQUARO (*)

Sopra talune estensioni del teorema di prolungamento di Uryshon-Tietze. (**)

Introduzione.

Poichè ogni spazio metrico è paracompatto (STONE), in [**3**] (¹) J. DUGUNDIJ ha dimostrato la validità del teorema di prolungamento di URYSHON-TIETZE anche per le funzioni (applicazioni, come diremo anche) continue assumenti valori in uno spazio di BANACH e definite in un insieme chiuso di uno spazio metrico. In conseguenza di ciò R. ARENS, in [**1**], ha dimostrato un più generale teorema (p. 18, teor. 4.1) enunciandone un altro (p. 22, aggiunta) nello stesso ordine di idee.

In questa Nota si ritrovano per altra via i due risultati di ARENS (propp. I e II) con un procedimento indipendente dal citato teorema di DUGUNDIJ.

Rimarchiamo che gli spazi topologici qui considerati sono definiti dai consueti assiomi di struttura topologica (cfr., p. es., [**2**], cap. I, § 1, n. 1, assiomi (O_I) ed (O_{II})).

1. – Premettiamo il seguente

Lemma. *Se f è un'applicazione continua dell'insieme F dello spazio topologico E nello sapzio di Banach E' e se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un'applicazione continua $f^{(\varepsilon)}$ di E in E' tale che, per ogni $x \in F$, sia $\| f(x) - f^{(\varepsilon)}(x) \| \leqslant \varepsilon$, esiste un'applicazione continua $\bar{f}$ di E in E' tale che, per ogni $x \in F$, sia $\bar{f}(x) = f(x)$.*

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Bari, Italia.

(**) Ricevuto il 20-II-1955.

(¹) I numeri in neretto e in [ ] si riferiscono alla Bibliografia riportata in fine a questa Nota.

Dim.. Per ogni intero positivo n poniamo $f_n = f^{(1/2^n)}$ e sia $g_n = f_{n+1} - f_n$: per ogni $x \in F$ risulta $\|g_n(x)\| \leqslant \|f_{n+1}(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_n(x)\| \leqslant (1/2^{n+1}) + (1/2^n) = 3/2^{n+1}$; denotiamo inoltre con A_n la sfera chiusa di raggio $3/2^{n+1}$ e di centro nell'origine (elemento neutro) di E', e con B_n il complementare della sfera aperta di raggio $1/2^{n-1}$ e di centro nell'origine di E'. Piochè A_n e B_n sono insiemi chiusi e disgiunti di E', esiste un'applicazione continua φ_n di E' nell'intervallo chiuso $[0,1]$ tale che sia $\varphi_n(z) = 1$ per ogni $z \in A_n$ e $\varphi_n(z) = 0$ per ogni $z \in B_n$. Per ogni $x \in F$ si ha $g_n(x) \in A_n$ e quindi $\varphi_n(g_n(x)) = 1$; invece, per ogni $x \in E$ tale che sia $\|g_n(x)\| \geqslant 1/2^{n-1}$ si ha $g_n(x) \in B_n$ e quindi $\varphi_n(g_n(x)) = 0$. Posto $h_n = \varphi_n(g_n) g_n$, per ogni $x \in E$ si ha $\|h_n(x)\| = \varphi_n(g_n(x)) \|g_n(x)\| \leqslant 1/2^{n-1}$, mentre per ogni $x \in F$ si ha $h_n(x) = g_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$: consegue, in primo lugo, che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ è totalmente e quindi uniformemente convergente in E verso un'applicazione continua h di E in E'; in secondo luogo, per ogni $x \in F$, essendo $f_n(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} h_k(x)$ e risultando $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, si ha $f(x) = f_1(x) + h(x)$: l'applicazione continua $\bar{f} = f_1 + h$ di E in E' è quella prevista dalla tesi.

Richiamiamo ora alcune definizioni delle quali dovremo servirci.

Def. 1. *Se* $\mathfrak{R} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *ed* $\mathfrak{R}' = (U'_\beta)_{\beta \in B}$ *sono ricovrimenti dello spazio topologico* E, *si dice che* $\mathfrak{R}'$ è più fine di $\mathfrak{R}$ *se per ogni* $\beta \in B$ *esiste almeno un* $\alpha \in A$ *tale che sia* $U'_\beta \subset U_\alpha$.

Def. 2. *Si dice che un ricovrimento* $\mathfrak{R} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *di uno spazio topologico* E è localmente finito *se per ogni punto* x *di* E *esiste almeno un intorno* G *di* x *tale che sia finita la parte* J_G *di* A *formata dagli* $\alpha \in A$ *tali che sia* $U_\alpha \cap G \neq \emptyset$.

Def. 3. *Uno spazio topologico* E *si dice* paracompatto *se verifica il seguente assioma:*

(PC) *Per ogni ricovrimento aperto* $\mathfrak{R}$ *di* E *esiste un ricovrimento aperto localmente finito* $\mathfrak{R}'$ *di* E, *più fine di* $\mathfrak{R}$.

2. – Ciò premesso, possiamo dimostrare il primo teorema di ARENS.

Prop. 1. *Se* f *è un'applicazione continua dell'insieme chiuso* F *dello spazio normale* (2) *e paracompatto* E *nello spazio di* Banach E', *esiste una applicazione continua* $\bar{f}$ *di* E *in* E' *tale che, per ogni* $x \in F$, *sia* $\bar{f}(x) = f(x)$.

---

(2) Intendiamo *normale* ogni spazio topologico che, oltre ai citati assiomi di struttura topologica, verifichi l'assioma di TIETZE: Se F' ed F'' sono insiemi chiusi e disgiunti, esistono due insiemi aperti e disgiunti G' e G'' tali che $F' \subset G'$, $F'' \subset G''$.

Dim.. Sia ε un numero reale positivo: per ogni $z \in E'$ denotiamo con S_z la sfera aperta di centro z e raggio $\varepsilon/2$. Sia F' l'insieme dei punti z di E' tali che sia $S_z \cap \boldsymbol{f}(F) \neq \varnothing$: la famiglia $(S_z)_{z \in F'}$ è un ricovrimento aperto di $\boldsymbol{f}(F)$ e quindi la famiglia $(\boldsymbol{f}^{-1}(S_z))_{z \in F'}$ è un ricovrimento aperto di F quale sottospazio di E. Consegue che è un ricovrimento (aperto) di F l'insieme $\mathfrak{R}^*$ delle parti aperte U di E tali che esista almeno uno $z \in F'$ per cui sia $U \cap F = \boldsymbol{f}^{-1}(S_z)$. Posto $U_0 = \complement F$ l'insieme $\mathfrak{R}_0 = \{U_0\} \cup \mathfrak{R}^*$ di parti di E è un ricovrimento aperto di E. Poichè E è paracompatto, per l'assioma (PC) (cfr. Def. 3) esiste un ricovrimento aperto localmente e finito (cfr. Def. 2) $\mathfrak{R} = (V_a)_{a \in A}$ di E più fine (cfr. Def. 1) di $\mathfrak{R}_0$. Poichè $\mathfrak{R}$ è localmente finito per un teorema ben noto ([**4**], cap. I, (33.4)) esiste per ciascun $a \in A$ un insieme aperto U_a tale che sia $\overline{U}_a \subset V_a$ e tale che la famiglia $(U_a)_{a \in A}$ sia un ricovrimento di E.

Per ogni $a \in A$, poichè gli insiemi $\overline{U}_a$ e $\complement V_a$ sono chiusi e disgiunti, per il lemma di Uryshon, può costruirsi una applicazione continua f_a di E in $[0,1]$ tale che $f_a(x) = 1$ per ogni $x \in \overline{U}_a$ ed $f_a(x) = 0$ per ogni $x \in \complement V_a$. Poichè $\mathfrak{R}$ è localmente finito per ogni $x \in E$, è *finito* l'insieme J_x degli $a \in A$ tali che sia $x \in V_a$. Sia f la funzione reale non negativa definita in E ponendo, per ogni $x \in E$, $f(x) = \sum_{a \in J_x} f_a(x)$: poichè $(U_a)_{a \in A}$ è un ricovrimento di E, esiste $a_x \in A$ tale che $x \in U_{a_x} \subset V_{a_x}$, quindi è $a_x \in J_x$ e, poichè è $f_{a_x}(x) = 1$ risulta $f(x) = \sum_{a \in J_x} f_a(x) \geqslant 1$. Dunque è $f \geqslant 1$ in E. Sempre per il fatto che $\mathfrak{R}$ è localmente finito per ogni $x_0 \in E$, esiste un intorno G di x_0 tale che sia *finito* l'insieme J_G degli $a \in A$ tali che sia $G \cap V_a \neq \varnothing$: per ogni $x \in G$ risulta $J_x \subset J_G$ e quindi, essendo $f_a(x) = 0$ per ogni $a \in J_G \cap \complement J_x$, si ha $f(x) = \sum_{a \in J_G} f_a(x)$, donde la f è continua in G e quindi in E, essendo continua in un intorno di ciascun punto $x_0 \in E$. Da tutto ciò consegue che in E la funzione reale $u_a = f_a/f$ è continua risultando $u_a(x) = 0$ per ogni $x \in \complement V_a$, $u_a(x) > 0$ per ogni $x \in U_a$ e $u_a(x) > 0$ solo se è $a \in J_x$ per ogni $x \in E$: inoltre è $\sum_{a \in J_x} u_a(x) = \sum_{a \in J_x} \{ f_a(x)/f(x) \} = \{ \sum_{a \in J_x} f_a(x) \}/f(x) = 1$.

Ciò premesso, per ogni $a \in A$ sia $\boldsymbol{a}_a$ il valore di $\boldsymbol{f}$ in un punto di $V_a \cap F$ se è $V_a \cap F \neq \varnothing$ oppure l'origine di E' se $V_a \cap F = \varnothing$ e denotiamo con $\boldsymbol{f}^{(\varepsilon)}$ l'applicazione di E in E' definita per ogni $x \in E$ ponendo $\boldsymbol{f}^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{a \in J_x} \boldsymbol{a}_a u_a(x)$.

Sia $x \in F$ ed $a \in J_x$: poichè è $V_a \cap F \neq \varnothing$, $\boldsymbol{a}_a$ è il valore di $\boldsymbol{f}$ in un punto $x_a \in V_a \cap F$: inoltre, essendo $V_a \not\subset \complement F$, risulta $V_a \subset U^*$ con $U^* \in \mathfrak{R}^*$ e quindi esiste $z_a \in F'$ tale che $V_a \cap F \subset \boldsymbol{f}^{-1}(S_{z_a})$, donde consegue $\boldsymbol{f}(x) \in S_{z_a}$, $\boldsymbol{a}_a \in S_{z_a}$ e quindi $\|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{a}_a\| \leqslant \varepsilon$; essendo $\sum_{a \in J_x} u_a(x) = 1$, si ha $\|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}^{(\varepsilon)}(x)\| = \|\sum_{a \in J_x} (\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{a}_a)\, u_a(x)\| \leqslant \varepsilon \sum_{a \in J_x} u_a(x) = \varepsilon$. Dunque $x \in F$ implica $\|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}^{(\varepsilon)}(x)\| \leqslant \varepsilon$. Ciò, a causa del Lemma del n. **1**, dimostrerà la tesi appena avremo stabilito che $\boldsymbol{f}^{(\varepsilon)}$ è continua in E. A tal fine, con riferimento ad x_0 ed al suo intorno G di cui sopra, poichè per $x \in G$ è $J_x \subset J_G$, si ha $u_a(x) = 0$ per $a \in J_G \cap \complement J_x$ e quindi $\boldsymbol{f}^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{a \in J_x} \boldsymbol{a}_a u_a(x)$, il che, ciascuna $\boldsymbol{a}_a u_a$

(per $a \in A$) essendo continua in E ed J_G essendo finito, mostra che $f^{(\varepsilon)}$ è continua in G e quindi in E, essendo continua in un intorno di ciascun suo punto x_0.

Notiamo che ogni spazio di HAUSDORFF paracompatto è normale, e quindi il corollario:

Se E è uno spazio di Hausdorff paracompatto e se f è un'applicazione continua dell'insieme chiuso F di E nello spazio di Banach E', esiste un'applicazione continua $\bar{f}$ di E in E' tale che, per ogni $x \in F$, sia $\bar{f}(x) = f(x)$.

3. – Stabiliamo ora la seconda proposizione di ARENS.

Prop. 2. *Se f è un'applicazione continua dell'insieme chiuso F dello spazio normale E nello spazio di Banach separabile E', esiste un'applicazione continua $\bar{f}$ di E in E' tale che, per ogni $x \in F$, sia $\bar{f}(x) = f(x)$.*

Dim.. In un primo momento supponiamo che per ogni $x \in F$ sia $\|f(x)\| \leqslant 1$, e denotiamo con ε un qualunque numero reale positivo.

Poichè E' è separabile, in esso esiste una successione di punti ovunque densa: consideriamo l'insieme dei punti di questa tali che le sfere di centro in essi e raggio $\varepsilon/2$ intersechino $f(F)$: ordiniamo tale insieme di punti in una successione (z_n) denotando con U'_n e V'_n le sfere di centro z_n e raggi, rispettivamente, $\varepsilon/2$ ed ε.

Evidentemente le successioni (U'_n) e (V'_n) sono ricovrimenti aperti di $f(F)$, sicchè, posto $U_n = f^{-1}(U'_n)$, $V_n = f^{-1}(V'_n)$, le successioni (U_n) e (V_n) sono ricovrimenti aperti dell'insieme F considerato come sottospazio di E. Poichè è $\overline{U}'_n \subset V'_n$ consegue $\overline{U}_n \subset V_n$. Come parte chiusa dello spazio normale E, F è un sottospazio normale di E: per il lemma di URYSHON esiste, in conseguenza, un'applicazione continua g_n di F in $[0,1]$ tale che sia $g_n(x) = 1$ per ogni $x \in \overline{U}_n$ e $g_n(x) = 0$ per ogni punto x del complementare $\complement_F V_n$ di V_n rispetto ad F. Poichè, per ogni n, risulta $0 \leqslant g_n \leqslant 1$, la $\sum_{n=1}^{\infty} g_n/2^n$ è totalmente e quindi uniformemente convergente in F e la sua somma g è una funzione reale, non negativa, continua in F: inoltre, poichè (U_n) è un ricovrimento di F, per ogni $x_0 \in F$, esiste almeno un indice n_0 tale che sia $x_0 \in U_{n_0}$ e quindi è $g_{n_0}(x_0) = 1$, donde $0 < 1/2^{n_0} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x_0)/2^n = g(x_0)$: dunque la g è positiva in F. In F la funzione reale $u_n = g_n/g$ è continua ed è $\sum_{n=1}^{\infty} u_n/2^n = 1$ e, per ogni $x \in \complement_F V_n$, si ha $u_n(x) = 0$.

Per ogni n sia $\boldsymbol{a}_n$ il valore di f in un punto di V_n: risulta $\|\boldsymbol{a}_n\| \leqslant 1$ e quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a}_n u_n/2^n$ è totalmente e quindi uniformemente convergente in F. Inoltre se è $x \in V_n$ si ha $\|f(x) - \boldsymbol{a}_n\| \leqslant \|f(x) - \boldsymbol{z}_n\| + \|\boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{a}_n\| \leqslant 2\varepsilon$. Allora, se è $x \in F$, detta (n_i) la successione crescente degli indici n tali che sia $x \in V_n$, si ha $u_n(x) = 0$ per ogni n distinto da ciascun n_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Consegue $\|f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)/2^n\| =$

$$= \|\sum_{n=1}^{\infty} \{f(x) - a_n\} u_n(x)/2^n\| = \|\sum_{i=1}^{\infty} \{f(x) - a_{n_i}\} u_{n_i}(x)/2^{n_i}\| \leqslant 2\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} u_{n_i}(x)/2^{n_i} = 2\varepsilon.$$

Ciò osservato, per il teorema di URYSHON, esiste un'applicazione continua u_n^* di E nell'intervallo chiuso $[0,1]$ per $n = 1, 2, \ldots$ e tale che, per ogni $x \in F$, sia $u_n^*(x) = u_n(x)$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n^*/2^n$, essendo $\|a_n\| \leqslant 1$, risulta totalmente e quindi uniformemente convergente in E e la sua somma $f^{(\varepsilon)}$ è un'applicazione continua di E in E': inoltre, per $x \in F$, essendo $f^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)/2^n$ si ha $\|f(x) - f^{(\varepsilon)}(x)\| \leqslant 2\varepsilon$: ciò, per il Lemma del n. **1**, prova la tesi limitatamente al caso che sia $\|f(x)\| \leqslant 1$ per ogni $x \in F$. Nel caso generale, sia g l'applicazione continua di E in E' definita ponendo, per ogni $x \in F$, $g(x) = f(x)/\{1 + \|f(x)\|\}$: evidentemente, per ogni $x \in F$, è $\|g(x)\| \leqslant 1$ donde, per quanto sopra, esiste un'applicazione continua $\bar{g}$ di E in E' tale che per ogni $x \in F$, sia $\bar{g}(x) = g(x)$. Poichè la funzione reale φ definita, per ogni $x \in F$, ponendo $\varphi(x) = 1 + \|f(x)\|$, è continua in F, per il teorema di URYSHON, esiste una funzione reale continua $\bar{\varphi}$ in E tale che, per ogni $x \in F$, sia $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) = 1 + \|f(x)\|$. La $\bar{f} = \bar{\varphi}\bar{g}$ è un'applicazione continua di E in E' e, per ogni $x \in F$, si ha $\bar{f}(x) = \bar{\varphi}(x)\bar{g}(x) = f(x)$. Ciò dimostra completamente la tesi.

Bibliografia.

1. R. ARENS: *Extensions of functions on fully normal spaces,* Pacific J. Math. **2**, 11-22 (1952).

2. N. BOURBAKI: *Topologie générale,* Actualités Scient. et Industr., Hermann, Paris 1951. Cfr. cap. I e II.

3. J. DUGUNDJI: *An extension of Tietze's theorem,* Pacific J. Math. **1**, 353-367 (1951).

4. S. LEFSCHETZ: *Algebraic Topology,* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. **27**, New York 1942.