Rivista Mat. Univ. Parma 6, 89-110 (1955)

OSVALDO ZANABONI (*)

Procedimento di risoluzione approssimata delle equazioni differenziali ordinarie. (**)

1. – Diversi capitoli di scienza applicata si giovano sistematicamente della risoluzione approssimata delle equazioni differenziali.

In essi, i vari metodi in uso vengono spesso motivati non tanto da rigide regole analitiche quanto da suggestivi ragionamenti fisici che, non infrequentemente, conferiscono ai procedimenti risolutivi le caratteristiche di vere e proprie teorie.

Per restare nel campo più noto allo scrivente si ricordano fra i tanti, a mo' d'esempio, il metodo energetico di BRIAN-TIMOSHENKO per la trattazione dei fenomeni d'instabilità elastica, il più generale metodo dei lavori virtuali per lo stesso scopo, il metodo di Lord RAYLEIGH per la determinazione del periodo proprio di oscillazione di un sistema elastico, il metodo del GECKELER per la risoluzione delle cupole di rivoluzione, il metodo del RITZ nelle sue svariate applicazioni.

Da un esame critico e comparativo delle modalità procedurali di parecchi di tali metodi sono apparsi allo scrivente degli elementi comuni che, elaborati e generalizzati, hanno dato corpo al seguente procedimento scevro da riferimenti specifici.

Esso può pertanto applicarsi a qualunque equazione differenziale e servire a scopi molto più ampi dei metodi particolari di cui si è detto. Le regole che lo costituiscono sono così poco restrittive da lasciare ampia autonomia al calcolatore.

La risoluzione, condotta in base alle modalità che saranno indicate, for-

---

(*) Professore o. (di Scienza delle Costruzioni) nella Università di Trieste. Indirizzo: Facoltà d'Ingegneria, Trieste, Italia.

(**) Ricevuto il 13-I-1955.

nisce non una tabellazione numerica dell'incognita, ma *delle funzioni che approssimano la soluzione esatta.*

Ciò risulta particolarmente apprezzabile quando dalla soluzione stessa si debbono poi dedurre altre quantità mediante ulteriori operazioni di integrazione, derivazione, passaggio al limite, ed analoghe.

Fuori del campo immediatamente applicativo il metodo costituisce una cospicua fonte di espressioni approssimate semplici di funzioni trascendenti di ogni specie.

2. – Sia un'equazione differenziale ordinaria in y, che indichiamo sinteticamente con:

$$Ly = 0 . \tag{1}$$

Col simbolo L s'intende un operatore differenziale qualsiasi (anche non lineare), di ordine n, che può contenere delle funzioni note della variabile indipendente x. Di fatto la (1) può dunque essere, indifferentemente, omogenea o no.

Di essa si chieda *una soluzione valida in un dato intervallo* (r, s), *che soddisfi ad assegnate condizioni ai limiti.*

Ciò posto, cominciamo col mettere in luce alcune circostanze essenziali per il nostro metodo.

Mediante operazioni di scomposizione, moltiplicazione, aggiunta di termini, ed analoghe, dalla (1) si può sempre dedurre un'equazione equivalente della forma:

$$My = Ny , \tag{2}$$

dove M ed N sono due nuovi operatori differenziali.

Le modalità per raggiungere lo scopo, e la costituzione di M ed N sono lasciate all'arbitrio del calcolatore: si richiede soltanto che l'operatore N sia di ordine inferiore a quello n della (1). Segue ovviamente che l'ordine di M è uguale ad n, ed è superiore a quello di N.

Dalla (1) si possono dunque dedurre infinite equazioni del tipo (2), e per farlo basta in pratica assumere a piacere l'operatore N (di ordine inferiore ad n) e dedurre di conseguenza M; oppure scegliere M (di ordine n) e ricavare N. Affinchè in quest'ultimo caso la scelta sia accettabile è necessario che N risulti di ordine inferiore ad n.

Ottenuta la (2), se nel solo suo 2° membro, vale a dire in quello di ordine più basso, introduciamo la soluzione esatta $y = \varrho(x)$ della (1), otteniamo una equazione di ordine n della forma:

$$My = f(x) . \tag{3}$$

È ovvio che la soluzione della (3) è ancora la ϱ soddisfacente la (1): di conseguenza è lecito risolvere la (3) in luogo dell'equazione data.

Tutto ciò permette di fare risaltare *tre circostanze fondamentali* per il procedimento che ci accingiamo ad esporre.

I) Attraverso una scelta oculata di M si può ottenere una (3) le cui operazioni risolutive siano più agevoli di quelle della (1); tanto che da una equazione iniziale non risolubile con mezzi elementari si può giungere ad una (3) che lo sia.

II) La funzione y che proviene dalla risoluzione della (3) è identica alla ϱ introdotta nel 2° membro della (2). Le due funzioni, quella di partenza ϱ e quella d'arrivo y, posseggono cioè il medesimo valore in tutti i punti dell'assegnato intervallo (r, s). Questa proprietà è ovviamente caratteristica della soluzione esatta.

III) Giacchè l'ordine di M è superiore a quello di N, l'operazione, per così dire risultante, colla quale si deduce la y del 1° membro della (2), dalla funzione introdotta nel 2° membro, è della natura dell'integrazione semplice o ripetuta. L'ordine dell'operazione risolutiva risultante è intuitivamente tanto maggiore quanto più basso è quello di N.

3. – Possiamo ora esporre il nostro procedimento risolutivo, la cui giustificazione sarà implicitamente contenuta nella sua descrizione, tenuto conto dei precedenti rilievi.

Data una qualsiasi equazione differenziale ordinaria, la si trasformi in un'altra equivalente della forma (2). Le condizioni da assolvere sono che al 2° membro si abbia un operatore N di ordine inferiore a quello dell'operatore M del 1° membro, e che M sia tale da rendere facilmente risolubile la corrispondente equazione del tipo (3) [in conformità a quanto è stato prospettato in I)].

Salvo queste avvertenze, il calcolatore è libero di assegnare alla (2) la forma che ritiene più opportuna, secondo il suo personale criterio.

Segue, ripetendo l'ordine tenuto nel n. precedente, il passaggio dall'equazione di tipo (2) alla equivalente di tipo (3), che però non può farsi in modo esatto perchè occorrerebbe la preventiva conoscenza della funzione $y = \varrho(x)$ che forma l'oggetto della ricerca.

Si dà allora inizio alla parte approssimata del procedimento introducendo nel 2° membro della (2), in luogo della effettiva ϱ incognita, un'espressione provvisoria ϱ_0 scelta a piacere colle seguenti avvertenze: che soddisfi alle volute condizioni ai limiti, e che contenga un certo numero (arbitrario) di parametri indeterminati. Risulta in tal modo l'equazione:

$$My = N\varrho_0 \tag{4}$$

che è del tipo (3) e che, date le premesse circa la scelta di M, è certamente risolubile con facilità.

La soluzione ϱ_1 della (4) contiene gli stessi parametri indeterminati della ϱ_0, ed in più n costanti d'integrazione. Queste ultime verranno calcolate in modo che anche per la ϱ_1 restino soddisfatte le prescritte condizioni ai limiti.

Il nostro scopo è di rendere le ϱ_0, ϱ_1 il più possibile prossime alla soluzione dell'equazione data. Osserviamo allora, in base a quanto è stato detto in II), che esse coinciderebbero colla soluzione esatta se in tutti i punti dell'intervallo (r, s) risultasse $\varrho_0 = \varrho_1$.

Naturalmente questa identità non può realizzarsi a cagione dell'arbitraria scelta della ϱ_0; possiamo però avvicinarlesi utilizzanto i parametri indeterminati contenuti in ϱ_0 e ϱ_1.

Precisamente, imponendo che queste due funzioni assumano uguaglianza di valore in tanti punti di (r, s) quanti sono i parametri stessi.

Questa condizione dà luogo ad un sistema di equazioni, solitamente algebriche e comunque non differenziali, che determina i parametri.

Sostituiti i valori di questi entro ϱ_0, ϱ_1, dette funzioni vengono a rappresentare due soluzioni approssimate della data equazione. Infatti esse sono legate dagli operatori costitutivi dell'equazione (2) equivalente alla (1), adempiono parzialmente alla condizione caratteristica II), e soddisfano alle condizioni ai limiti.

Aggiungiamo, in virtù dell'osservazione III), che provenendo la ϱ_1 dalla ϱ_0 per il tramite di un'operazione della natura di una ripetuta integrazione, l'errore insito nella ϱ_1 stessa è di regola molto più piccolo di quello afferente la ϱ_0.

Le ϱ_0, ϱ_1 costituiscono dunque, rispettivamente, le funzioni di prima e di seconda approssimazione della soluzione esatta.

Quindi, se non si procede ad affinare ulteriormente i risultati, giovandosi della procedura che sarà indicata tra breve, conviene di assumere la ϱ_1 quale soluzione dell'equazione data.

Riepilogando, il procedimento risolutivo comporta le seguenti operazioni: posizione dell'equazione originaria nella forma (2); introduzione, nel 2° membro dell'equazione trasformata, di una funzione ϱ_0 contenente dei parametri indeterminati e soddisfacente alle condizioni ai limiti; risoluzione della conseguente equazione di tipo (4); soddisfacimento da parte della sua soluzione delle condizioni ai limiti; determinazione dei parametri per mezzo del sistema proveniente dall'imposizione della condizione $\varrho_0 = \varrho_1$ in tanti punti dell'intervallo (r, s) quanti sono i parametri stessi; sostituzione in ϱ_1 dei valori dei parametri.

4. – Dal precedente riepilogo si rileva che in concreto il metodo lascia al calcolatore mano libera in diversi particolari: la scelta dell'operatore M, quella della ϱ_0, la scelta del numero dei punti in cui uguagliare ϱ_1 a ϱ_0, ed infine quella dei singoli punti in cui imporre tale uguaglianza.

È evidente che a decidere nel modo più opportuno di tali questioni, al fine fondamentale di conseguire colle maggiori semplicità di sviluppi e rapidità di calcoli l'approssimazione più spinta, soccorrono principalmente l'intuizione del calcolatore e la conoscenza o la preveggenza del probabile andamento della soluzione esatta. Tale preveggenza è spesso possibile nelle questioni di matematica applicata.

Non mancano però dei criteri meno soggettivi di orientamento.

Secondo l'osservazione III), integrata dalle considerazioni del n. precedente, si induce che le approssimazioni più spinte si raggiungono tenendo molto basso l'ordine di N. L'ordine più opportuno è dunque lo zero, e converrà di assumerlo tutte le volte che è possibile.

Un'altra ovvia maniera per incrementare l'approssimazione è quella di elevare il numero dei punti di uguaglianza tra ϱ_0 e ϱ_1 (ossia dei parametri indeterminati) e di distribuire razionalmente i punti stessi entro l'intervallo (r, s). In ogni caso il numero di tali punti dev'essere adeguato all'ampiezza dell'intervallo medesimo.

Circa questi ultimi particolari si osserva che tutti i punti che formano oggetto di condizioni ai limiti sono automaticamente punti d'uguaglianza; nei quali, inoltre, i valori delle soluzioni approssimate vengono a coincidere con i corrispondenti valori della soluzione esatta.

Per le ragioni ultimamente addotte, le situazioni di maggior favore sono quelle in cui le condizioni ai limiti riguardano punti distinti di (r, s) [per esempio i suoi estremi separatamente] e non quelle ove riguardino tutte un solo punto dell'intervallo (per esempio il solo suo estremo iniziale).

5. – Il metodo si presta a diverse forme d'iterazione, e pertanto a conseguire anche gradi crescenti d'approssimazione.

La procedura più spontanea è la seguente.

Fissata la ϱ_0 e ricavata la ϱ_1, invece di procedere subito alla valutazione dei parametri indeterminati, si pone la ϱ_1 nel 2° membro della (2) e si risolve nuovamente deducendo una ϱ_2; e così di seguito fino a che si vuole. I parametri si determinano nel modo consueto tra la penultima e l'ultima soluzione; la funzione più approssimata viene ad essere di solito l'ultima.

In pratica è necessario farsi un'attendibile idea dell'approssimazione raggiunta. A questo proposito è bene distinguere tra approssimazione rispetto alla soluzione esatta, ed approssimazione colla quale si riesce a verificare l'equazione proposta. La prima è la più interessante, mentre la seconda funge da indiretta indicazione della prima.

Per conoscere l'approssimazione vera e propria si può, iterato il procedimento risolutivo, paragonare i risultati numerici forniti dalle tre ultime funzioni approssimate di cui si è venuti in possesso.

Un altro modo è quello di variare gli elementi arbitrari a disposizione del calcolatore, e di paragonare le conseguenti soluzioni.

Per avere invece l'approssimazione colla quale resta verificata l'equazione proposta (1), basta applicare l'operatore L alla soluzione raggiunta e vedere qual'è il massimo valore che il risultato assume entro l'intervallo (r, s).

Altro modo è il seguente. La soluzione iterata ϱ_i soddisfi la (2) a meno di un errore ε: vuol dire che introducendo ϱ_i nella (2) si ha

$$M\varrho_i = \varepsilon + N\varrho_i .$$

D'altra parte, tra la ϱ_i e la soluzione che la precede ϱ_{i-1} sta la relazione

$$M\varrho_i = N\varrho_{i-1} .$$

Combinando le due ultime relazioni si ottiene l'errore richiesto:

$$\varepsilon = N\varrho_{i-1} - N\varrho_i . \tag{5}$$

Ora facciamo seguire alcuni esempi dimostrativi di diversa specie, alcuni dei quali molto semplici allo scopo di avere immediati controlli.

Pur essendoci di proposito attenuti nella loro risoluzione a condizioni poco favorevoli al raggiungimento di elevate approssimazioni, i risultati sono stati in ogni caso tali da sancire l'attendibilità e la praticità del metodo.

Esempio I.

Consideriamo l'equazione semplicissima:

$$y'' + y = 0$$

di cui è nota la soluzione generale, e per la quale, di conseguenza, si possono fare immediati controlli.

Di essa sia richiesta la soluzione particolare, da valere nell'intervallo (0, 1), caratterizzata dalle condizioni $y = 1$ ed $y' = 0$ per $x = 0$.

S o l u z i o n e. Scegliamo come forma (2) quella che si ottiene portando y al 2° membro:

$$y'' = -y . \tag{*}$$

Assumiamo quale espressione ϱ_0 di primo tentativo un polinomio di 2° grado $ax^2 + bx + c$. Soddisfatte le condizioni ai limiti, esso si riduce a $\varrho_0 = 1 + ax^2$. Resta così un solo parametro indeterminato, in virtù del quale potremo imporre l'uguaglianza indicata in II) in un solo punto dell'intervallo di validità della soluzione.

Introdotta la ϱ_0 nel 2° membro della (*) abbiamo l'equazione approssimata:

$$y'' = -1 - ax^2$$

di facilissima soluzione, la quale dà la funzione che nel testo abbiamo indicato con ϱ_1. Imponendo anche a questa il soddisfacimento delle condizioni ai limiti, si trova:

$$\varrho_1 = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{ax^4}{12}.$$

Ora bisogna far sì che ϱ_0 e ϱ_1 assumano uguale valore in un punto a scelta dell'intervallo (0, 1). Poichè una simile uguaglianza sussiste già in $x=0$, tanto per le funzioni ϱ_0, ϱ_1 quanto per le loro derivate prime, il punto più opportuno in cui imporre la nuova uguaglianza sembra essere quello terminale dell'intervallo. Poniamo perciò che per $x = 1$ sia $\varrho_0 = \varrho_1$. Eseguendo si deduce l'equazione algebrica

$$1 + a = \frac{1}{2} - \frac{a}{12},$$

che dà $a = -6/13$. Sostituendo in ϱ_0, ϱ_1 si trova infine:

$$\begin{cases} \varrho_0 = 1 - \dfrac{6}{13}\, x^2 \\ \varrho_1 = 1 - \dfrac{1}{2}\, x^2 + \dfrac{1}{26}\, x^4 . \end{cases}$$

Delle due funzioni, la soluzione più approssimata della nostra equazione è la seconda.

Poichè la soluzione esatta è notoriamente $\cos x$, dallo sviluppo in serie di questa possiamo constatare che le nostre espressioni sono effettivamente prossime al vero. Numericamente possiamo per esempio constatare che mentre per $x = 1$ si ha in modo esatto (con 5 decimali) $y = 0{,}54030$, colle nostre espressioni si ha invece $\varrho_1 = \varrho_0 = 0{,}53846$. L'errore all'estremo dell'intervallo è dunque del 0,34% in meno: molto piccolo sebbene la condizione II) sia stata soddisfatta in un solo punto libero dell'intero intervallo.

Se introduciamo la ϱ_1 nell'equazione proposta troviamo $(x^4 - x^2)/26$ in luogo di un risultato identicamente nullo. Il massimo del valore assoluto di questa espressione nel tratto $(0, 1)$ è $1/104$. Questo è abbastanza piccolo, e perciò dà la immediata convinzione, indipendentemente dalla valutazione numerica comparativa eseguita più sopra, che già la prima determinazione ϱ_1 rende praticamente soddisfatta l'equazione data, e quindi che rappresenta una soluzione molto approssimata.

Se volessimo iterare il procedimento risolutivo dovremmo ripetere tutti i passaggi usando come funzione di tentativo la ϱ_1 col parametro a ancora indeterminato. Introdotta nel 2° membro della (*) si ha l'equazione

$$y'' = -1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{12}x^4$$

che è risolta da

$$y = k_1 + k_2 x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{a}{360}x^6 .$$

Soddisfatte le condizicni ai limiti, rimane:

$$y = \varrho_2 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{a}{360}x^6.$$

Posta infine l'uguaglianza $\varrho_1 = \varrho_2$ ancora nel punto $x = 1$, si ha l'equazione

$$\frac{1}{2} - \frac{a}{12} = \frac{13}{24} + \frac{a}{360}$$

che dà $a = -15/31$. Sostituendo in ϱ_1, ϱ_2 si hanno le soluzioni approssimate:

$$\begin{cases} \varrho_1 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{124}x^4 \\ \varrho_2 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{744}x^6, \end{cases}$$

più approssimate delle prime due. La più approssimata di tutte è la ϱ_2, che calcolata nel punto $x = 1$ dà 0,54032, coincidente col valore esatto a meno delle quinta cifra decimale.

Esempio II.

Trattiamo ora, comparativamente col precedente, un caso ove le condizioni ai limiti riguardano due punti distinti.

A questo scopo consideriamo la stessa equazione, collo stesso intervallo, dell'Esempio precedente, ma poniamo che la soluzione debba soddisfare alle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} y &= 1 \qquad \text{per} \qquad x = 0 \,, \\ y &= 0 \qquad \text{per} \qquad x = 1 \,. \end{aligned}$$

Per eseguire utili confronti, riportiamo la soluzione esatta:

$$y = -0{,}64240 \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \,.$$

Soluzione. Decomponiamo l'equazione come nel caso precedente ed assumiamo di nuovo quale funzione di primo tentativo un polinomio di 2° grado: in tal modo la possibilità di adempiere la condizione II) si avrà ancora in un solo punto. Il polinomio di 2° grado che rispetta le attuali condizioni ai limiti è:

$$\varrho_0 = 1 - (a + 1)x + ax^2 \,.$$

Introdotto ϱ_0 nel 2° membro della (*) ed eseguita la risoluzione dell'equazione che ne risulta, si trova:

$$y = h_1 + h_2 x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{a+1}{6} x^3 - \frac{a}{12} x^4 \,.$$

Soddisfatte le condizioni ai limiti resta:

$$\varrho_1 = 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{a}{8} + 1\right) x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{a+1}{6} x^3 - \frac{a}{12} x^4 \,.$$

Poichè i valori di ϱ_0, ϱ_1 sono già coincidenti negli estremi dell'intervallo, sembra opportuno scegliere come terzo punto di uguaglianza il centro dell'intervallo stesso. Facendo perciò $\varrho_0 = \varrho_1$ per $x = 1/2$, viene l'equazione:

$$1 - \frac{a+1}{2} + \frac{a}{4} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{8} + 1\right) - \frac{1}{8} + \frac{a+1}{48} - \frac{a}{192}$$

che fornisce $a = -12/43$. Sostituendo in ϱ_1 abbiamo che la richiesta soluzione approssimata è:

$$\varrho_1 = 1 - \frac{83}{129} x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{31}{258} x^3 + \frac{1}{43} x^4 \,.$$

Essa assume per costruzione il valore esatto agli estremi dell'intervallo: è dunque presumibile che l'errore massimo si avveri verso il centro dell'intervallo.

Valutando la ϱ_1 in $x = 1/2$ si trova 0,56977, mentre la soluzione esatta dà nello stesso punto $y = 0{,}56957$.

L'errore assoluto è 0,00020 e quello relativo è del 0,035%.

La coincidenza è quasi perfetta, malgrado si sia uguagliato in un solo punto e non si sia praticata iterazione.

Come si è messo in luce nella discussione generale del testo, la migliore approssimazione rispetto all'Esempio precedente è da attribuirsi al diverso tipo di condizioni ai limiti.

Esempio III.

Determinare la prima e la terza autosoluzione, coi relativi autovalori, della equazione

$$y'' + \alpha^2 y = 0\ ,$$

poste le condizioni $y = 0$ per $x = \pm l$.

Soluzione. Giacchè le autosoluzioni debbono annullarsi nei due punti simmetrici $\pm l$, il loro andamento è ondulatorio. La prima sarà costituita da un'onda semplice arieggiante la parabola, la seconda da due onde alterne, e la terza da tre onde di cui le due estreme di un segno e la centrale di segno opposto.

Quelle da noi richieste posseggono dunque un'intonazione di simmetria in virtù della quale diviene giustificato lo scegliere la funzione di primo tentativo ϱ_0 di forma simmetrica. Rimanendo per semplicità tra le espressioni polinomiali, useremo perciò quelle di grado pari. La prima di queste che si presenta spontaneamente è

$$\varrho_0 = k \cdot (l^2 - x^2)$$

che soddisfa alle prescritte condizioni ai limiti. Essa rappresenta una parabola ordinaria e, data questa sua forma, potrà darci solamente la prima autosoluzione col relativo autovalore.

Prima di proseguire nella ricerca, ricordiamo che nei problemi come quello che stiamo trattando, la funzione incognita risulta a meno di una costante moltiplicativa; perciò il parametro k è soggetto a rimanere indeterminato, e può tralasciarsi.

Nei riguardi del soddisfacimento delle uguaglianze conseguenti alla condizione II), la ϱ_0 prescelta è dunque da considerare come priva di parametri. Sembrerebbe allora che essa non fosse atta all'applicazione del presente metodo: bisogna però considerare che anche α è un parametro indeterminato, e ciò permette di condurre ugualmente la ricerca.

Colla ϱ_0 proposta potremo dunque porre la condizione II) per un solo punto dell'intervallo $(-l, +l)$: da essa si trarrà α, vale a dire un valore approssimato dell'autovalore inerente alla prima autosoluzione.

Poniamo l'equazione data nella forma:

$$y'' = -\alpha^2 y$$

e sostituiamo nel 2° membro la ϱ_0, tralasciando l'inutile costante k. Abbiamo

$$y'' = -\alpha^2(l^2 - x^2)\,,$$

che risolta fornisce:

$$y = \alpha^2\left(\frac{x^4}{12} - \frac{l^2}{2}x^2 + ax + b\right).$$

Soddisfatte le assegnate condizioni ai limiti, resta:

$$\varrho_1 = \alpha^2\left(\frac{x^4}{12} - \frac{l^2}{2}x^2 + \frac{5}{12}l^4\right).$$

Ora, uguagliamo ϱ_0 e ϱ_1 in un punto dell'intervallo. Poichè l'uguaglianza sussiste già in $x = \pm l$, assumiamo quale ulteriore punto $x = 0$. Si ha così:

$$\alpha^2 \frac{5}{12} l^4 = l^2\,,$$

e infine

$$\alpha l = 1{,}5492\,.$$

L'autosoluzione esatta è $\cos\{(\pi x)/(2l)\}$, coll'autovalore $\alpha l = 1{,}5708$. La nostra valutazione comporta dunque l'errore assoluto 0,0206 e l'errore relativo di 1,31 %.

Per trovare la terza autosoluzione col relativo autovalore bisognerebbe ripetere la ricerca partendo da una ϱ_0 foggiata con tre ondulazioni semplici.

In modo diverso, si può aumentare il grado dell'espressione provvisoria, e dotarla di un maggior numero di parametri. Dovendosi con ciò porre $\varrho_0 = \varrho_1$ in un maggior numero di punti, si realizzano automaticamente quegli adeguamenti di forma che permettono la determinazione degli autovalori di ordine più elevato.

Rimanendo nell'ambito dei polinomi simmetrici, per le ragioni esposte più sopra, poniamo:

$$\varrho_0 = l^4 + al^2x^2 - (1 + a)x^4$$

che soddisfa alle condizioni ai limiti.

I parametri disponibili sono in questo caso α ed a, e quindi dovremo imporre l'uguaglianza tra ϱ_0 e ϱ_1 in due punti.

Introdotto ϱ_0 nel termine αy dell'equazione data, risolto, ed adempiuto alle condizioni agli estremi, si trova:

$$\varrho_1 = \alpha^2 \left[\left(\frac{7}{15} + \frac{a}{20} \right) l^6 - \frac{l^4 x^2}{2} - \frac{a l^2 x^4}{12} + \frac{1+a}{30} x^6 \right].$$

Imponiamo $\varrho_0 = \varrho_1$ nei punti 0 ed $l/2$: si trova il sistema:

$$\begin{cases} 1 = \alpha^2 l^2 \left(\dfrac{7}{15} + \dfrac{a}{20} \right) \\ \dfrac{15+3a}{16} = \alpha^2 l^2 \, \dfrac{219 + 29a}{640}, \end{cases}$$

che ammette le due soluzioni:

$$\begin{cases} \alpha l = 1{,}57095 \\ a = -1{,}2292, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha l = 4{,}3386 \\ a = -8{,}2708. \end{cases}$$

Il primo autovalore è praticamente coincidente con quello esatto: l'espressione approssimata della corrispondente autofunzione è, sostituendo in ϱ_1,

$$1 - 1{,}2339 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 0{,}2527 \left(\frac{x}{l} \right)^4 - 0{,}0188 \left(\frac{x}{l} \right)^6.$$

Per fare analoghi confronti nei riguardi dell'altra radice, osserviamo che la terza autosoluzione esatta è $\cos\{(3\pi x)/(2l)\}$, ed il relativo autovalore è 4,7124. L'errore assoluto con cui quest'ultimo è stato calcolato è dunque di 0,3738, mentre l'errore relativo è del 7,9%.

Per sostituzione in ϱ_1 troviamo l'espressione approssimata della terza autofunzione:

$$1 - 9{,}412 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 12{,}974 \left(\frac{x}{l} \right)^4 - 4{,}562 \left(\frac{x}{l} \right)^6.$$

Come si è testè constatato, questa comporta un errore piuttosto notevole: per attenuarlo basta iterare il procedimento. Per fare ciò si agisce come nell'Esempio I, assumendo come funzione nota la ϱ_1. Operando in questa maniera si trovano le due radici:

$$\begin{cases} \alpha l = 1{,}57077 \\ a = -1{,}2258, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha l = 4{,}58171 \\ a = -8{,}3204. \end{cases}$$

È evidente il progresso rispetto alla precedente determinazione: il primo autovalore ha raggiunto il valore esatto, e l'altro ha ridotto il suo errore al 2,8%.

Approssimazioni ancora più spinte si otterrebbero o proseguendo nelle iterazioni, o meglio ancora assumendo all'inizio una ϱ_0 con un maggior numero di parametri indeterminati in modo da poter soddisfare l'uguaglianza tra ϱ_0 e ϱ_1 in un grande numero di punti. Altro modo sarebbe, come si è già detto, quello di scegliere in partenza una ϱ_0 conformata a triplice onda, e pertanto inizialmente simile alla autofunzione da determinare.

Esempio IV.

Chiarita con i precedenti esercizi di carattere elementare la parte esecutiva del metodo, colle sue più consuete procedure, trattiamo alcuni casi più complessi dai quali risalteranno ulteriori particolarità e possibilità del metodo stesso.

Nel presente Esempio IV si vuole determinare un'espressione approssimata, valida nell'intervallo (0, 1), della funzione:

$$y = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt .$$

S o l u z i o n e. La funzione y di cui si tratta è notoriamente l'integralseno: questo riconoscimento ci consentirà il controllo della soluzione.

Derivando l'equazione data, si ha che la ricerca della y equivale a risolvere l'equazione

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

nell'intervallo (0, 1), e colla condizione iniziale $y = 0$ per $x = 0$. Dall'espressione di y' rileviamo che per $x = 0$ è $y' = 1$.

La precedente equazione differenziale si può trasformare per gradi come segue:

$$xy' = \operatorname{sen} x , \qquad xy' + y = y + \operatorname{sen} x , \qquad (xy)' = y + \operatorname{sen} x .$$

Assumiamo l'ultima come forma (2) di partenza, ed introduciamo nel 2º membro la soluzione approssimata

$$\varrho_0 = x + ax^2 ,$$

che soddisfa la condizione iniziale, e che per di più ha la derivata uguale ad 1 nell'origine. Risolvendo l'equazione che ne risulta, si ottiene:

$$y = \frac{k - \cos x}{x} + \frac{x}{2} + \frac{ax^2}{3} .$$

Bisogna ora soddisfare la condizione iniziale, per il che occorre che sia $k = 1$. L'espressione di seconda approssimazione è dunque:

$$\varrho_1 = \frac{1 - \cos x}{x} + \frac{x}{2} + \frac{ax^2}{3}.$$

Si constata facilmente che la sua derivata ha nell'origine il valore 1 come la soluzione esatta.

Per ricavare il valore dell'unico parametro ancora rimasto, imponiamo l'uguaglianza tra ϱ_0 e ϱ_1 in un punto dell'intervallo assegnato. Poichè già sussiste l'uguaglianza nell'origine non solo della funzione ma anche delle derivate prime, scegliamo come ulteriore punto d'identificazione il secondo estremo dell'intervallo.

Siccome $\cos 1 = 0{,}54031$, ne viene l'equazione

$$1 + a = (1 - 0{,}54031) + 0{,}5 + \frac{a}{3}$$

dalla quale si ricava:

$$a = - 0{,}060465.$$

L'espressione approssimata dell'integralseno nell'intervallo $(0, 1)$ è dunque, sostituendo in ϱ_1,

$$\frac{1 - \cos x}{x} + 0{,}5x - 0{,}020155x^2.$$

Per provare la bontà della soluzione, si sono rilevati (cfr. JAHNKE-EMDE, *Funktionentafeln*, Dover, New York 1945, pag. 7) i valori esatti dell'integral-

x	esatto	approssimato	errore %
0	0	0	0
0,1	0,0999	0,0998	— 0,10
0,2	0,1996	0,1988	— 0,40
0,3	0,2985	0,2971	— 0,47
0,4	0,3965	0,3942	— 0,58
0,5	0,4931	0,4898	— 0,67
0,6	0,5881	0,5839	— 0,71
0,7	0,6812	0,6761	— 0,75
0,8	0,7721	0,7662	— 0,76
0,9	0,8605	0,8541	— 0,74
1	0,9431	0,9365	— 0,70

seno, e si sono riportati ordinatamente nella precedente tabella insieme ai valori calcolati colla nostra espressione; nell'ultima colonna sono indicati gli errori percentuali. Come si vede, la coincidenza è ottima.

Per ottenere errori ancora più piccoli, basta assumere una ϱ_0 con più parametri indeterminati e porre l'uguaglianza $\varrho_0 = \varrho_1$ in un corrispondente numero di punti dell'intervallo. Per esempio, se facciamo

$$\varrho_0 = x + ax^2 + bx^3$$

ricaviamo nel solito modo:

$$\varrho_1 = \frac{1 - \cos x}{x} + \frac{x}{2} + \frac{ax^2}{3} + \frac{bx^3}{4} .$$

Posto che ϱ_0 e ϱ_1 divengano uguali in $x = 0{,}5$ ed in $x = 1$, si trova, dopo risoluzione del conseguente sistema algebrico a due incognite,

$$\begin{cases} a = -0{,}001455 \\ b = -0{,}052453 . \end{cases}$$

Fatte le sostituzioni in ϱ_1, si ha la nuova espressione approssimata dell'integralseno:

$$\frac{1 - \cos x}{x} + 0{,}5x - 0{,}000485x^2 - 0{,}013113x^3 .$$

Con questa, per $x = 1$ risulta 0,9460, con un erroe del 0,31%; e per $x = 0{,}5$ risulta 0,49308, coincidente col valore esatto.

È notevole la circostanza che l'ultima espressione dà ottimi risultati anche fuori dell'intervallo assegnato. Se per esempio facciamo $x = 1{,}5708$ troviamo 1,3700, contro un valore esatto di 1,3704.

Esempio V.

Risolvere nell'intervallo (0, 10) l'equazione:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y = 0$$

colle condizioni $y = 0$ ed $y' = 0{,}5$ per $x = 0$.

Soluzione. L'intervallo assegnato è piuttosto ampio ed è condizionato ad un solo estremo. È dunque da presumere che la risoluzione approssimata condotta con pochi parametri non possa dare risultati accettabili se non in un breve tratto iniziale. Per ovviare all'inconveniente senza fare ricorso ad un eccessivo numero di parametri, spezzeremo l'intervallo dato in tratti parziali e ricercheremo altrettante espressioni di y, ciascuna valida in un singolo tratto.

Sottraendo y da entrambi i membri, l'equazione proposta diviene:

$$(**) \qquad \left[\frac{1}{x}(xy)'\right]' = -y\,.$$

Poichè essa è notoriamente risolta dalla funzione di Bessel di 1ª specie e di ordine 1, che è di tipo oscillante, assumiamo in prima approssimazione:

$$\varrho_0 = c \operatorname{sen} \alpha(x-h)\,,$$

con c, α, h parametri da determinare.

Introdotta la ϱ_0 nel 2º membro della (**) si ricava:

$$y = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{\alpha^2}\left[\operatorname{sen}\alpha(x-h) + \frac{\cos\alpha(x-h)}{\alpha x}\right],$$

$$y' = a - \frac{b}{x^2} + \frac{c}{\alpha^2}\left[\left(\alpha - \frac{1}{\alpha x^2}\right)\cos\alpha(x-h) - \frac{\operatorname{sen}\alpha(x-h)}{x}\right].$$

Bisogna ora imporre le condizioni ai limiti tanto a ϱ_0 quanto ad y. Eseguendo si trova:

$$c = \frac{1}{2\alpha}, \qquad h = 0\,; \qquad a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\alpha^2}\right); \qquad b = -\frac{1}{2\alpha^4}\,.$$

Dalla posizione iniziale risulta perciò:

$$\varrho_0 = \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{2\alpha}\,,$$

$$\varrho_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\alpha^2}\right)x + \frac{1}{2\alpha^3}\left(\operatorname{sen}\alpha x - \frac{1-\cos\alpha x}{\alpha x}\right),$$

$$\varrho_1' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\alpha^2}\right) + \frac{1}{2\alpha^3}\left(\alpha\cos\alpha x - \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x} + \frac{1-\cos\alpha x}{\alpha x^2}\right).$$

In queste è rimasto, quale unico parametro indeterminato, α.

A questo punto sarebbe possibile fissare arbitrariamente il tratto in cui ritenere valide le precedenti espressioni. Preferiamo invece d'indicarlo indirettamente stabilendo che esso sia compreso tra 0 e la prima radice r_1 della funzione incognita.

Da ciò determiniamo α imponendo che al termine di questo tratto ϱ_0 e ϱ_1 assumano il medesimo valore, e cioè che si annullino entrambi. Con questo dalla ϱ_0 ricaviamo:

$$\alpha r_1 = \pi \,, \qquad \alpha = \pi / r_1 \,.$$

Tale determinazione corrisponde alla prima semionda della ϱ_0 e quindi, in via di approssimazione, anche della y.

Il predetto valore di α, insieme con $x = r_1$, deve però anche annullare ϱ_1; è pertanto:

$$0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_1^2}{2\pi^2}\right) r_1 - \frac{r_1^3}{2\pi^3} \cdot \frac{2}{\pi} \,,$$

e risolvendo:

$$r_1 = 2\pi^2 / \sqrt{2(\pi^2 + 4)} = 3{,}75 \,.$$

Il valore esatto della prima radice della funzione di BESSEL è 3,83. La nostra determinazione, benchè sia stata raggiunta per mezzo di un solo parametro arbitrario, comporta dunque il modesto errore del 2,1%.

In corrispondenza risulta $\alpha = 0{,}838$; e sostituendo in ϱ_1 si ha infine la seguente espressione approssimata della funzione di BESSEL nel tratto compreso tra 0 e la sua prima radice:

$$0{,}144x + 0{,}849 \cdot \operatorname{sen} 0{,}838x - 1{,}013 \cdot (1 - \cos 0{,}838x)/x \,.$$

Dalla ϱ_1' si calcola che per $x = r_1$ questa assume il valore $-0{,}331$.

L'espressione relativa al tratto susseguente deve di conseguenza soddisfare alle condizioni: $y = 0$ ed $y' = -0{,}331$ per $x = 3{,}75$.

Tornando con queste alle espressioni generali di ϱ_0 e ϱ_1 indicate all'inizio del procedimento risolutivo, si trova che per il secondo tratto è:

$$\varrho_0 = -\frac{0{,}331}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha(x - 3{,}75) \,,$$

$$\varrho_1 = -0{,}1655\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)x - 0{,}331\left(\frac{7{,}031}{\alpha^2} - 7{,}031 - \frac{1}{\alpha^4}\right)\frac{1}{x} - \\ - \frac{0{,}331}{\alpha^3}\left[\operatorname{sen} \alpha(x - 3{,}75) + \frac{\cos \alpha(x - 3{,}75)}{\alpha x}\right] .$$

Per ricavare il valore di α, che naturalmente è diverso da quello spettante al primo tratto, si procede nel modo consueto. E cioè, stabilito che il tratto attuale abbia a terminare in corrispondenza alla 2ª radice r_2 della y, si pone che quivi ϱ_0 e ϱ_1 siano uguali tra loro, ed entrambi nulli. Perciò abbiamo dalla ϱ_0:

$$\alpha(r_2 - 3{,}75) = \pi\,, \qquad r_2 = (\pi/\alpha) + 3{,}75\,.$$

Sostituendo in ϱ_1:

$$0 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\pi}{\alpha} + 3{,}75\right) - \left(\frac{7{,}031}{\alpha^2} - 7{,}031 - \frac{1}{\alpha^4}\right)\frac{\alpha}{\pi + 3{,}75\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\,\frac{1}{\pi + 3{,}75\alpha}\,.$$

Da cui:

$$\alpha = 1{,}056 \qquad \text{ed} \qquad r_2 = 6{,}73\,.$$

Il valore esatto della seconda radice della funzione di Bessel è 7,01; la nostra determinazione dà dunque luogo all'errore del 4%. Esso supera quello trovato per la prima radice perchè nel tratto attuale si sono trasferiti, attraverso le condizioni all'estremo anteriore, gli errori insiti nell'espressione propria al tratto antecedente.

Sostituendo nell'attuale ϱ_1 i valori trovati, si ha la soluzione valida nel secondo tratto:

$$-0{,}0171x + \frac{0{,}507}{x} - 0{,}281\cdot\mathrm{sen}\{1{,}056\cdot(x - 3{,}75)\} - 0{,}266\,\frac{\cos\{1{,}056\cdot(x - 3{,}75)\}}{x}\,.$$

La derivata di questa calcolata nel punto $x = r_2 = 6{,}73$ si trova uguale a 0,263.

Resta ora da valutare la ϱ_1 per l'ultimo tratto tra 6,73 e 10: le condizioni iniziali sono qui: $y = 0$ ed $y' = 0{,}263$ per $x = 6{,}73$. Procediamo ancora col metodo fin qui usato, ponendo che ϱ_0 e ϱ_1 assumano il medesimo valore nel punto $x = 10$, estremo dell'intervallo. Si perviene così all'ultima espressione che qui riportiamo (omettendo i passaggi intermedi):

$$0{,}00798x - \frac{0{,}593}{x} + 0{,}239\cdot\mathrm{sen}\{1{,}0318\cdot(x - 6{,}73)\} + 0{,}232\,\frac{\cos\{1{,}0318\cdot(x - 6{,}73)\}}{x}\,.$$

In base alle tre espressioni trovate possiamo compilare il seguente specchietto comparativo (vedasi la pagina seguente) tra i valori esatti della funzione di Bessel, e quelli approssimati provenienti dalla nostra soluzione.

Appare da questo che l'errore aumenta allontanandosi dal primo tratto. Come si è detto più sopra, ciò dipende dall'aver usato un procedimento concatenato, di guisa che gli errori dei tratti antecedenti si ripercuotono in avanti e si sommano con quelli propri del tratto in esame. Per attenuarli occorrerebbe o iterare il procedimento, oppure usare un maggior numero di parametri inde-

x	esatto	approssimato
0	0	0
1	+ 0,440	+ 0,440
2	+ 0,577	+ 0,573
3	+ 0,339	+ 0,320
4	— 0,066	— 0,078
5	— 0,328	— 0,270
6	— 0,277	— 0,181
7	— 0,005	+ 0,069
8	+ 0,235	+ 0,228
9	+ 0,245	+ 0,159
10	+ 0,043	— 0,057

terminati. Nello sviluppo attuale ne è stato adoperato uno solo: quello indicato con α. Tutti gli altri hanno servito solamente per soddisfare alle condizioni ai limiti.

Esempio VI.

In questo ultimo Esempio si tratterà, diversamente dai precedenti, un'equazione di ordine superiore, non lineare, della quale non è nota la soluzione esatta.

Sia da risolvere, nell'intervallo $(0, 2)$, l'equazione

$$y''' + \frac{y^2}{\operatorname{sen}(\pi x/4)} = 10$$

colle condizioni ai limiti $y = 0$ ed $y' = 1$ per $x = 0$, $y = 4$ per $x = 2$.

Poniamo l'equazione nella forma:

$$y''' = 10 - \frac{y^2}{\operatorname{sen}(\pi x/4)},$$

che presenta la maggiore differenza tra l'ordine del 1° membro e quello del 2°. Ciò, come sappiamo, è favorevole al raggiungimento delle migliori approssimazioni.

Assumiamo come espressione di prima approssimazione la funzione

$$\varrho_0 = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x \cdot \operatorname{sen}(\pi x/4)}$$

che già soddisfa alla prima condizione ai limiti. Ora procediamo a soddisfare le altre due condizioni.

Dedotta la derivata prima di ϱ_0 e posto che assuma il valore 1 per $x = 0$, si trova $c = 1{,}1284$. Quindi:

$$\varrho_0 = (ax^2 + bx + 1{,}1284)\sqrt{x \cdot \mathrm{sen}\,(\pi x/4)}\,.$$

Dovendo poi far sì che ϱ_0 assuma il valore 4 per $x = 2$, risulta:

$$b = 0{,}85 - 2a\,.$$

In definitiva si ottiene:

$$\varrho_0 = [ax^2 + (0{,}85 - 2a)x + 1{,}1284]\sqrt{x \cdot \mathrm{sen}\,(\pi x/4)}\,.$$

Sostituito nel 2° membro dell'equazione trasformata, si ha:

$$y''' = 10 - 1{,}2733x - (1{,}9183 - 4{,}5136a)x^2 - (0{,}7225 - 1{,}1432a + 4a^2)x^3 - \\ - (1{,}70a - 4a^2)x^4 - a^2x^5\,.$$

Questa si risolve facilmente con tre successive integrazioni. Eseguendo, ed usando le costanti d'integrazione per assolvere alle condizioni ai limiti, si trova:

$$\varrho_1 = x + (0{,}1143a^2 - 0{,}4952a - 2{,}2690)x^2 + 1{,}6667x^3 - 0{,}0531x^4 - \\ - (0{,}0320 - 0{,}0752a)x^5 - (0{,}0060 - 0{,}0095a + 0{,}0333a^2)x^6 - \\ - (0{,}0081a - 0{,}0190a^2)x^7 - 0{,}0030a^2x^8\,.$$

Per valutare il parametro a ancora indeterminato imponiamo l'uguaglianza di ϱ_0 e ϱ_1 in un punto interno del dato intervallo: per esempio nel punto centrale $x = 1$. Così facendo si perviene all'equazione:

$$0{,}0970a^2 + 0{,}4222a - 1{,}3568 = 0\,,$$

che fornisce i seguenti due valori:

$$a = \left\{ \begin{array}{l} 2{,}1505 \\ -6{,}5031\,. \end{array} \right.$$

Sostituendo il primo valore in ϱ_0, ϱ_1 si hanno le seguenti espressioni:

$$\varrho_0 = (1{,}1285 - 3{,}4510x + 2{,}1505x^2)\sqrt{x \cdot \mathrm{sen}\,(\pi x/4)}\,,$$

$$\varrho_1 = x - 2{,}8053244x^2 + 1{,}6666667x^3 - 0{,}0530542x^4 + \\ + 0{,}1298033x^5 - 0{,}1396887x^6 + 0{,}0706798x^7 - 0{,}0137638x^8\,.$$

La ϱ_1 è la richiesta soluzione approssimata dell'equazione proposta.

Procedendo in modo analogo col secondo valore di a si ottiene:

$$\bar{\varrho}_0 = (1{,}1285 + 13{,}8562x - 6{,}5031x^2)\sqrt{x \cdot \operatorname{sen}(\pi x/4)},$$

$$\bar{\varrho}_1 = x + 5{,}7851175x^2 + 1{,}6666667x^3 - 0{,}0530542x^4 - \\ - 0{,}5211782x^5 - 1{,}4776507x^6 + 0{,}8581738x^7 - 0{,}1258640x^8 .$$

Si tratta ora di farsi un'idea, sia pure indiretta, del grado d'approssimazione raggiunto. A questo scopo determiniamo l'errore col quale le espressioni trovate soddisfano l'equazione proposta.

In base alla (5) tale errore è:

$$(\varrho_1^2 - \varrho_0^2)/\operatorname{sen}(\pi x/4) .$$

Da questa espressione ci s'avvede che già in tre punti dell'intervallo, e precisamente per $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, l'errore è nullo, giacchè in essi si ha per costruzione $\varrho_0 = \varrho_1$.

L'esame dovrà farsi per altri punti, ed intuitivamente è sufficiente farlo per $x = 0{,}5$ ed $x = 1{,}5$, ove si bisecano gli intervalli parziali determinati dai valori esatti.

Tabulando i risultati si ha, per la prima soluzione:

x	ϱ_0	ϱ_1	ε
0	0	0	0
0,5	− 0,0259721	+ 0,0060585	− 0,00166678
1,0	− 0,1446348	− 0,1446813	0
1,5	+ 0,7318555	+ 0,7938650	+ 0,10240417
2,0	+ 4,0000647	+ 4,0002792	0

Come si vede, gli errori sono molto piccoli e la ϱ_1 è senz'altro accettabile.

Per quanto riguarda l'altra soluzione si ha la tabella:

x	$\bar{\varrho}_0$	$\bar{\varrho}_1$	ε
0	0	0	0
0,5	2,8129972	2,1181315	− 8,95388365
1,0	7,1321774	7,1322109	0
1,5	12,1923285	10,5208129	− 41,09339976
2,0	4,0000647	4,0026516	0

Questa rivela errori notevolissimi, e pertanto la seconda soluzione non è accettabile.

Si può concludere che o vi è una sola soluzione, oppure che, se ve ne sono due, la seconda non è sufficientemente rappresentata dalla $\overline{\varrho}_1$.

Per togliere il dubbio si dovrebbe replicare la ricerca partendo con una $\overline{\varrho}_0$ contenente più parametri indeterminati dell'unico a da noi preso in considerazione, e che si presti ad un andamento simile a quello delineato dalla colonna $\overline{\varrho}_1$ dell'ultima tabella.

Trieste, *Istituto di Scienza delle Costruzioni.*