Rivista Mat. Univ. Parma 4, 363-386 (1953)

GIUSEPPE PALAMÀ (*)

Polinomi più generali di altri classici e dei loro associati, e relazioni tra essi. Funzioni di seconda specie. (**)

Introduzione.

Sono note alcune relazioni che legano classici polinomi, quali ad esempio le relazioni di SZEGÖ tra i polinomi di LAGUERRE ed HERMITE.

Ora è interessante il fatto che, come vedremo, delle relazioni analoghe a quelle che esistono tra dei polinomi classici, quali ad esempio le dette relazioni di SZEGÖ, vi siano pure tra i loro polinomi associati (1) ed anche tra polinomi più generali di essi. Ciò potrebbe forse far pensare che vi sia un legame più stretto, di quanto si può dedurre dalle formule di definizione, tra un polinomio ed il suo associato, anche se lo sviluppo di un polinomio si abbia in forma più semplice, come sembra avvenire in generale, di quella del suo associato.

In questo lavoro oltre a stabilire relazioni del tipo detto tra polinomi più generali di altri classici e dei loro associati, diamo anche un contributo allo studio di tali polinomi e di alcune classiche funzioni di 2ª specie.

§ 1. - Funzioni più generali di alcune classiche di 1ª e 2ª specie e polinomi ad esse associati.

1. - Indichiamo con $M_n(x)$ ed $m_n(x)$ rispettivamente un polinomio di grado n [se n è intero positivo o nullo; se n è intero negativo è invece $M_n(x)=0$]

(*) Indirizzo: Via Sepolcri Messapici 20, Lecce (Italia).

(**) Ricevuto il 24-XII-1953.

(1) Per la definizione, ad esempio, dei polinomi associati alle funzioni di LAGUERRE di 1ª e 2ª specie, e per un contributo al loro studio cfr. G. PALAMÀ: *Sul Wronskiano delle funzioni di Laguerre di 1ª e 2ª specie e su dei polinomi ad esse associati*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 8, 185-193 (1953); *Relazioni integrali tra le funzioni d'Hermite e di Laguerre di prima e seconda specie, e su dei polinomi ad esse associati*, Rivista Mat. Univ. Parma 4, 105-122 (1953).

ed una funzione dipendente da n (intero relativo o nullo), da x (reale) e da r parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ soggetti ad opportune condizioni, e con x variabile in un intervallo tale che la $m_n(x)$ risulti finita.

Nei simboli $M_n(x)$, $m_n(x)$ non sono stati indicati i parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, perchè essi non mutano nelle varie relazioni che qui saranno stabilite.

Inoltre $M_n(x)$ ed $m_n(x)$ ammettiamo soddisfino alle relazioni

$$M_{n-1}(x)m_n(x) - M_n(x)m_{n-1}(x) = W_n(x)\,, \tag{1}$$

$$\mu_{n+1}(x) = (a_n + b_n x)\mu_n(x) - c_n\mu_{n-1}(x)\,, \tag{2}$$

ove con $\mu_n(x)$ indichiamo indifferentemente $M_n(x)$ ed $m_n(x)$; a_n, b_n, c_n dipendono da n, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$; e si indica poi con $W_n(x)$ un'opportuna funzione di n, x, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

Dalla (2) con un processo d'induzione si ha

$$\mu_{n+p}(x) = T^{n,p}(x)\mu_n(x) + T_1^{n,p}(x)\mu_{n-1}(x)\,, \tag{3}$$

in cui con $T^{n,p}(x)$, $T_1^{n,p}(x)$ rappresentiamo dei polinomi in x di gradi p, $p-1$ rispettivamente, dipendenti anche da $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Allo studio di tali polinomi si dà qui anche un contributo. Essi sono una notevole generalizzazione sia di classici polinomi che dei loro associati.

Dal confronto di (2) e (3) segue intanto

$$T^{n,0}(x) = 1\,, \qquad T^{n,1}(x) = a_n + b_n x\,.$$

2. – Moltiplichiamo la (1) per $T^{n,p}(x)$ e poi con la (3) eliminiamo $T^{n,p}(x)m_n(x)$, $T^{n,p}(x)M_n(x)$, abbiamo così

$$M_{n-1}(x)m_{n+p}(x) - M_{n+p}(x)m_{n-1}(x) = W_n(x)T^{n,p}(x)\,. \tag{4}$$

Analogamente moltiplichiamo la (1) per $T_1^{n,p}(x)$ ed eliminiamo poi $T_1^{n,p}(x)m_{n-1}(x)$, $T_1^{n,p}(x)M_{n-1}(x)$, con la stessa (3), si ha

$$M_{n+p}(x)m_n(x) - M_n(x)m_{n+p}(x) = W_n(x)T_1^{n,p}(x)\,. \tag{5}$$

Il confronto di (4) e (5) dà, se non è $W_n(x) = 0$,

$$T_1^{n,p}(x) = \frac{-W_{n+1}(x)}{W_n(x)}\,T^{n+1,p-1}(x)\,, \tag{6}$$

per cui la (3) può scriversi

$$(3_1) \qquad \mu_{n+p}(x) = T^{n,p}(x)\mu_n(x) - \frac{W_{n+1}(x)}{W_n(x)}\, T^{n+1,p-1}(x)\mu_{n-1}(x)\,.$$

Si faccia nella (3_1) $p = 1$ e si confronti poi con la (2), si ha

$$\frac{W_{n+1}(x)}{W_n(x)} = c_n\,.$$

Pertanto la (6) e la (3_1) possono scriversi

$$(6_1) \qquad T_1^{n,p}(x) = -\,c_n T^{n+1,p-1}(x)\,,$$

$$(3_2) \qquad \mu_{n+p}(x) = T^{n,p}(x)\mu_n(x) - c_n T^{n+1,p-1}(x)\mu_{n-1}(x)\,.$$

Nella (3_2) si faccia $n = 0$ e $\mu_n(x) \equiv M_n(x)$, $m_n(x)$ e si ha rispettivamente, se scriviamo $T^{(p)}(x)$ invece di $T^{1,p-1}(x)$,

$$(7) \qquad T^{0,p}(x) = M_p(x)\,,$$

$$(8) \qquad m_p(x) = M_p(x)m_0(x) - c_0 T^{(p)}(x)m_{-1}(x)\,,$$

se, come abbiamo supposto, esista, sia finito ed uguale ad $m_{-1}(x)$ il limite di $m_{n-1}(x)$ per $n \to 0$.

Si vede intanto dalla (7) che i polinomi $T^{n,p}(x)$ sono una generalizzazione degli $M_n(x)$, riducendosi ad essi per $n = 0$.

3. – Diamo in questo e nei nn. successivi un contributo allo studio di tali polinomi $T^{n,p}(x)$.

Nella (1) si muti n in $n+p+1$ e vi si eliminino poi con la (3_1) tutte le $\mu_{n+p}(x)$, $\mu_{n+p+1}(x)$, si ha così la relazione che segue, se si tien presente poi la stessa (1),

$$(9) \qquad T^{n,p}(x)T^{n+1,p}(x) - T^{n,p+1}(x)T^{n+1,p-1}(x) = \frac{W_{n+p+1}(x)}{W_{n+1}(x)}\,,$$

che, per $n = 0$, dà, per la (7),

$$(10) \qquad M_p(x)T^{(p+1)}(x) - M_{p+1}(x)T^{(p)}(x) = \frac{W_{p+1}(x)}{W_1(x)}\,.$$

4. – La (3_1) e la relazione che vi si trae cambiando p in $p+1$, dànno un sistema nelle incognite $\mu_n(x)$, $\mu_{n-1}(x)$ che, risolto rispetto a $\mu_n(x)$, dà, se si utilizza la (9),

$$\mu_n(x) = \frac{W_{n+1}(x)}{W_{n+p+1}(x)}[T^{n+1,p}(x)\mu_{n+p}(x) - T^{n+1,p-1}(x)\mu_{n+p+1}(x)] . \tag{11}$$

Da questa ponendo $n = 0$, si trae:

a) se $\mu_n(x) \equiv M_n(x)$, la (10);

b) se $\mu_n(x) \equiv m_n(x)$, la formula

$$T^{(n+1)}(x)m_n(x) - T^{(n)}(x)m_{n+1}(x) = \frac{W_{n+1}(x)}{W_1(x)} m_0 . \tag{12}$$

Ponendo $n = 0$ nella (1), se $m_0(x)$ come abbiamo ammesso per ipotesi non è infinita, si ha

$$m_{-1}(x) = - W_0(x) . \tag{13}$$

La (8) si può quindi scrivere

$$m_p(x) = M_p(x)m_0(x) + W_1(x)T^{(p)}(x) . \tag{8_1}$$

I polinomi $T^{(p)}(x)$, che soddisfano alle (8_1) e (10), li diciamo *associati alle funzioni $M_n(x)$ ed $m_n(x)$* [talvolta associati soltanto agli $M_n(x)$].

Pertanto i polinomi $T^{n,p}(x)$, poichè per $n = 0, 1$ si riducono rispettivamente ad $M_n(x)$ e $T^{(p+1)}(x)$, cioè ad $M_n(x)$ ed ai loro associati, sono una generalizzazione di entrambi questi ultimi polinomi.

Inoltre, se nella (4) si cambia n in $n-1$ e si fa $p = 1$, si ha

$$M_{n-2}(x)m_n(x) - M_n(x)m_{n-2}(x) = W_{n-1}(x)T^{n-1,1}(x) ,$$

da cui per $n = 1$ si riottiene la (13). Invece la precedente per $n = 0$ dà, se esiste e non è infinito il limite,

$$\lim_{n\to 0} [W_{n-1}(x)T^{n-1,1}(x)] = \lim_{n\to 0} [W_{n-1}(x)(a_{n-1} + b_{n-1}x)] ,$$

$$- m_{-2}(x) = \lim_{n\to 0} [(a_{n-1} + b_{n-1}x)W_{n-1}(x)] . \tag{14}$$

Se poniamo

$$\bar{a}_n = (n+1)a_n , \quad \bar{b}_n = (n+1)b_n , \quad \overline{W}_n(x) = \frac{W_n(x)}{n+1} ,$$

la (14) può ancora scriversi nella forma che ci sarà utile in seguito

$$-m_{-2}(x)=\lim_{n\to 0}\left[(\bar{a}_{n-1}+\bar{b}_{n-1}x)\overline{W}_{n-1}(x)\right]. \tag{15}$$

Dalla (3_2), se cambiamo prima n in $n+q$ e poi p in $p+q$, si hanno due relazioni che, confrontate, dopo aver eliminato nella prima di esse, a mezzo della (3_2), μ_{n+q} e μ_{n+q-1}, dànno una formula che, per sussistere identicamente, si deve avere

$$T^{n,p+q}(x)=T^{n+q,p}(x)T^{n,q}(x)-c_{n+q}T^{n+q+1,p-1}(x)T^{n,q-1}(x). \tag{16}$$

Da questa formula per $p=1$, $q=1$ rispettivamente si ha

$$T^{n,q+1}(x)=T^{n+q,1}(x)T^{n,q}(x)-c_{n+q}T^{n,q-1}(x), \tag{17}$$

che è ricorrente rispetto all'indice q,

$$T^{n,p+1}(x)=T^{n,1}(x)T^{n+1,p}(x)-c_{n+1}T^{n+2,p-1}(x). \tag{18}$$

Valori particolari di $T^{n,p}(x)$ sono i seguenti

$$\begin{cases} T^{n,0}(x)=1, \qquad T^{n,1}(x)=a_n+b_nx, \\ T^{n,2}(x)=b_nb_{n+1}x^2+(a_nb_{n+1}+a_{n+1}b_n)x+a_na_{n+1}-c_{n+1}. \end{cases} \tag{19}$$

5. – Dimostriamo ora la seguente formula

$$\frac{W_{n+1}(x)}{W_1(x)}\,T^{n+1,p}(x)=M_n(x)T^{(p+n+1)}(x)-M_{p+n+1}(x)T^{(n)}(x), \tag{20}$$

con la quale i polinomi $T^{n+1,p}(x)$, che generalizzano gli $M_n(x)$ ed i loro associati $T^{(p)}(x)$, sono espressi mediante questi stessi polinomi.

Ammettiamo che la (20) [che sussiste per $n=0,1,2$, come per questi due ultimi valori di n si ricava subito dalla (18)] sia vera per tutti i valori $n\leqslant n+1$ e qualunque sia p.

Se cambiamo nella (18) p in $p+1$, la moltiplichiamo per $\dfrac{W_{n+1}(x)}{W_1(x)}$ ed eliminiamo poi $T^{n+1,p+1}(x)$, $T^{n,p+2}(x)$ a mezzo della (20), si ha

$$\begin{aligned}\frac{W_{n+2}(x)}{W_1(x)}\,T^{n+2,p}(x)=&\left[T^{n,1}(x)M_n(x)-c_nM_{n-1}(x)\right]T^{(p+n+2)}(x)-\\ &-\left[T^{n,1}(x)T^{(n)}(x)-c_nT^{(n-1)}(x)\right]M_{p+n+2}(x).\end{aligned} \tag{21}$$

Ora la (3_2) per $\mu_n(x) \equiv M_n(x)$, $p = 1$, e la (17) cambiandovi q in $n-1$, dopo aver fatto $n = 1$, ci dànno rispettivamente

$$M_{n+1}(x) = T^{n,1}(x) M_n(x) - c_n M_{n-1}(x) ,$$

$$T^{(n+1)}(x) = T^{n,1}(x) T^{(n)}(x) - c_n T^{(n-1)}(x) ;$$

pertanto la (21) si riduce alla (20) dopo aver cambiato in questa ultima n in $n+1$.

6. – Nella formula seguente, dimostrata al n. **2**,

$$\frac{W_{n+1}(x)}{W_n(x)} = c_n$$

si muti n in $n-1$, $n-2, \ldots, 1, 0$ e si moltiplichino poi tra loro tutte le relazioni così ottenute, si ha

$$W_n(x) = c_0 c_1 \ldots c_{n-1} W_0(x)$$

ossia, per la (13),

$$W_n(x) = - c_0 c_1 \ldots c_{n-1} m_{-1}(x) . \tag{22}$$

7. – Possiamo ottenere formule più generali delle (13) e (15). Però notiamo innanzi tutto che nelle applicazioni che faremo ci interessano le funzioni $M_n(x)$, $m_n(x)$ che dipendono da n, x e da un parametro α ed il cui corrispondente $W_n(x)$ sia della forma

$$W_n(x) = \frac{1}{n!} A(\alpha, n) w(\alpha, x) ,$$

ove $A(\alpha, n)$, $w(\alpha, x)$ sono funzioni di α e rispettivamente di n ed x. Si vedrà poi subito l'opportunità di non conglobare il fattore $1/n!$ in $A(\alpha, n)$.

Nella (4) si muti difatti n in $n-p$ e si moltiplichi poi per $n!$, si ha così, se si passa al limite per $n \to 0$,

$$m_{-p-1}(x) = (-1)^p (p-1)! \, A(\alpha, -p) w(\alpha, x) \lim_{n \to 0} [n T^{n-p,p}(x)] , \tag{23}$$

ammesso che si abbia

$$\lim_{n \to 0} [A(\alpha, n-p)] = A(\alpha, -p),$$

con $A(\alpha, -p)$ determinato e finito, e che esista il limite

$$\lim_{n\to 0} [nT^{n-p,p}(x)] . \tag{24}$$

Ora tale limite esiste, se esso esiste per $p=1$, $p=2$; e se esistono quelli di $a_{n-p}+b_{n-p}x$, c_{n-p+1}, per $n\to 0$, cioè, per esempio, se si ha

$$\lim_{n\to 0} (a_{n-p}+b_{n-p}x) = a_{-p}+b_{-p}x ,$$

$$\lim_{n\to 0} c_{n-p+1} = c_{-p+1} ,$$

essendo a_{-p}, b_{-p}, c_{-p+1} determinati e finiti.

Difatti, dalla (18), mutando n in $n-p$, p in $p-1$ e moltiplicandola poi per n, si ha

$$nT^{n-p,p}(x) = (a_{n-p}+b_{n-p}x)nT^{n-(p-1),p-1}(x) - c_{n-p+1}nT^{n-(p-2),p-2}(x) \tag{25}$$

e quindi, poichè la (25) è ricorrente rispetto a p, il detto limite esiste anche per $p=3, 4,\ldots$.

Ponendo

$$\lim_{n\to 0} [nT^{n-p,p}(x)] = U^{(p)}(x) ,$$

la (25), passando al limite, può pertanto scriversi

$$U^{(p)}(x) = (a_{-p}+b_{-p}x)U^{(p-1)}(x) - c_{-p+1}U^{(p-2)}(x) , \qquad (p>2). \tag{26}$$

Quindi la (23) dà

$$m_{-p-1}(x) = (-1)^p(p-1)!\, A(\alpha, -p)w(\alpha, x)U^{(p)}(x) . \tag{27}$$

§ 2. - Applicazione delle formule del § precedente a classiche funzioni.

Applichiamo in questo § i risultati precedenti a classiche funzioni.

Notiamo innanzi tutto però che ciascuna formula che ricaveremo in questo §, nei tre casi che considereremo, sarà contraddistinta dallo stesso numero che ha la formula del § precedente, dalla quale sarà ricavata, e rispettivamente con uno, due e tre apici.

a) Il caso delle funzioni di Laguerre di 1^a e 2^a specie.

1. – Il polinomio $M_n(x)$ e la funzione $m_n(x)$ siano cioè rispettivamente il polinomio $L_n^{(\alpha)}(x)$ e la funzione $l_n^{(\alpha)}(x)$ (α non intero ed x finito qualsiasi) di LAGUERRE di 2^a specie.

Le corrispondenti delle (1) e (2) sono ora le note formule [2]:

$$L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\, l_n^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x) l_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n)e^x}{n!\sqrt{2\pi}\,x^\alpha}, \tag{1'}$$

$$\lambda_{n+1}^{(\alpha)}(x) = \frac{2n+\alpha+1-x}{n+1}\lambda_n^{(\alpha)}(x) - \frac{\alpha+n}{n+1}\lambda_{n-1}^{(\alpha)}(x), \tag{2'}$$

ove $\lambda_n^{(\alpha)}(x)$ sta indifferentemente sia per $L_n^{(\alpha)}(x)$ che per $l_n^{(\alpha)}(x)$.

Si ha

$$a_n = \frac{2n+\alpha+1}{n+1}, \qquad b_n = -\frac{1}{n+1}, \qquad c_n = \frac{\alpha+n}{n+1}.$$

Poichè $L_n^{(\alpha)}(x)$ e $l_n^{(\alpha)}(x)$ soddisfano alle (1') e (2'), che sono dello stesso tipo di (1) e (2), si possono trasferire, a questo nostro caso, tutti i risultati del § precedente, quando si indichino con $P^{\alpha,n,p}(x)$, $P_1^{\alpha,n,p}(x)$ i polinomi corrispondenti a $T^{n,p}(x)$, $T_1^{m,p}(x)$.

Perciò dalle (3), (4), (5), (6_1), (3_2), (7), (8_1) del § **1** abbiamo rispettivamente:

$$\lambda_{n+p}^{(\alpha)}(x) = P^{\alpha,n,p}(x)\lambda_n^{(\alpha)}(x) + P_1^{\alpha,n,p}(x)\lambda_{n-1}^{(\alpha)}(x), \tag{3'}$$

$$L_{n-1}^{(\alpha)}(x) l_{n+p}^{(\alpha)}(x) - L_{n+p}^{(\alpha)}(x) l_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n)e^x}{n!\sqrt{2\pi}x^\alpha} P^{\alpha,n,p}(x), \tag{4'}$$

$$L_{n+p}^{(\alpha)}(x) l_n^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x) l_{n+p}^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n)e^x}{n!\sqrt{2\pi}x^\alpha} P_1^{\alpha,n,p}(x), \tag{5'}$$

$$P_1^{\alpha,n,p}(x) = -\frac{\alpha+n}{n+1} P^{\alpha,n+1,p-1}(x), \tag{6'_1}$$

---

[2] Per la (1') del testo cfr. il primo dei lavori citati in [1]. Per la (2'), nel caso $\lambda_n^{(\alpha)}(x) \equiv l_n^{(\alpha)}(x)$, cfr. G. PALAMÀ, *Funzioni di Laguerre di* 2^a *specie*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 5, 72-77 (1950).

$$(3_2')\qquad \lambda_{n+p}^{(\alpha)}(x) = P^{\alpha,n,p}(x)\lambda_n^{(\alpha)}(x) - \frac{\alpha+n}{n+1}P^{\alpha,n+1,p-1}(x)\lambda_{n-1}^{(\alpha)}(x)\,,$$

$$(7')\qquad P^{\alpha,0,p}(x) = L_p^{(\alpha)}(x)\,,$$

$$(8_1')\qquad l_p^{(\alpha)}(x) = L_p^{(\alpha)}(x)l_0^{(\alpha)}(x) + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^x}{x^\alpha}P^{\alpha,p}(x)\,.$$

Quest'ultima segue dalla (8_1) essendo ora

$$W_1(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)e^x}{\sqrt{2\pi}x^\alpha}\,,$$

e perchè poniamo $P^{\alpha,p}(x)$ invece di $P^{\alpha,1,p-1}(x)$.

È da notarsi poi che per la $(7')$ i polinomi $P^{\alpha,n,p}(x)$ sono una generalizzazione di quelli di LAGUERRE.

Inoltre, poichè (3)

$$l_0^{(\alpha)}(x) = -\frac{\sqrt{2\pi}\,x^{-\alpha}}{2\Gamma(-\alpha)\,\mathrm{sen}\,\pi\alpha}\int_0^1 u^{-\alpha-1}e^{ux}\mathrm{d}u\,,$$

cui subito si può dare la forma

$$l_0^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{e^t\,\mathrm{d}t}{t^{\alpha+1}}\,,$$

la $(8_1')$ può scriversi

$$l_p^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[L_p^{(\alpha)}(x)\int_0^x \frac{e^t\,\mathrm{d}t}{t^{\alpha+1}} + P^{\alpha,p}(x)\frac{e^x}{x^\alpha}\right]$$

che, confrontata con l'altra da noi stabilita (4)

$$l_p^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[L_p^{(\alpha)}(x)\int_0^x \frac{e^t\mathrm{d}t}{t^{\alpha+1}} + P_p^{(\alpha)}(x)\frac{e^x}{x^\alpha}\right],$$

porta all'identità

$$P^{\alpha,p}(x) = P_p^{(\alpha)}(x)\,.$$

(3) Cfr. il secondo lavoro citato in (2).
(4) Cfr. il primo dei lavori citati in (1).

Ora nel lavoro citato in (4) con $P_p^{(\alpha)}(x)$ si indicò il polinomio associato alle funzioni di LAGUERRE di 1ª e 2ª specie: quindi coincide con tale polinomio, come del resto era d'aspettarsi, per quanto si è detto in generale nel § **1**, il polinomio $P^{\alpha,1,p-1}(x) \equiv P^{\alpha,p}(x)$.

Noi però adotteremo qui il simbolo $P^{\alpha,n}(x)$ per questi polinomi associati alle funzioni di LAGUERRE, per non confonderli con gli ultrasferici dei quali pure dovremo occuparci.

Pertanto i polinomi $P^{\alpha,n,p}(x)$ sono, non soltanto una generalizzazione dei polinomi di LAGUERRE, come si è notato più in alto a proposito della (7'), ma anche dei loro associati, riducendosi ad essi per $n = 1$.

Si noti infine che dalle (13) e (15) si ricava subito (5)

$$l_{-1}^{(\alpha)}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\Gamma(\alpha)e^x}{x^\alpha}\,, \qquad l_{-2}^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\sqrt{2\pi}}\,(x-\alpha+1)\,\frac{e^x}{x^\alpha}\,.$$

2. - Inoltre le (9), (10), (11), (12), (16), (17), (18), (19), (20) diventano in questo caso rispettivamente:

$$(9') \qquad P^{\alpha,n,p}(x)P^{\alpha,n+1,p}(x) - P^{\alpha,n,p+1}(x)P^{\alpha,n+1,p-1}(x) = \frac{(n+1)!\,\Gamma(\alpha+n+p+1)}{(n+p+1)!\,\Gamma(\alpha+n+1)}\,,$$

$$(10') \qquad L_p^{(\alpha)}(x)P^{\alpha,p+1}(x) - L_{p+1}^{(\alpha)}(x)P^{\alpha,p}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+p+1)}{(p+1)!\,\Gamma(\alpha+1)}\,,$$

$$(11') \qquad \lambda_n^{(\alpha)}(x) =$$

$$= \frac{(n+p+1)!\,\Gamma(\alpha+n+1)}{(n+1)!\,\Gamma(\alpha+n+p+1)}\left[P^{\alpha,n+1,p}(x)\lambda_{n+p}^{(\alpha)}(x) - P^{\alpha,n+1,p-1}(x)\lambda_{n+p+1}^{(\alpha)}(x)\right],$$

$$(12') \qquad P^{\alpha,n+1}(x)\lambda_n^{(\alpha)}(x) - P^{\alpha,n}(x)\lambda_{n+1}^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(n+1)!\,\Gamma(\alpha+1)}\,\lambda_0^{(\alpha)}(x)\,,$$

$$(16') \qquad P^{\alpha,n,p+q}(x) = P^{\alpha,n+q,p}(x)P^{\alpha,n,q}(x) - \frac{\alpha+n+q}{n+q+1}\,P^{\alpha,n+q+1,p-1}(x)P^{\alpha,n,q-1}(x)\,,$$

$$(17') \qquad P^{\alpha,n,q+1}(x) = \frac{\alpha+2n+2q+1-x}{n+q+1}\,P^{\alpha,n,q}(x) - \frac{\alpha+n+q}{n+q+1}\,P^{\alpha,n,q-1}(x)\,,$$

(5) Cfr. il secondo dei lavori citati in (2). In tale lavoro, nelle formule del testo, ci si è dimenticati di scrivere il fattore costante $-1/\sqrt{2\pi}$.

$$(18') \qquad P^{\alpha,n,p+1}(x) = \frac{\alpha+2n+1-x}{n+1} P^{\alpha,n+1,p}(x) - \frac{\alpha+n+1}{n+2} P^{\alpha,n+2,p-1}(x) \,,$$

$$(19') \qquad \begin{cases} P^{\alpha,n,0}(x) = 1 \,, \qquad P^{\alpha,n,1}(x) = \dfrac{\alpha+2n+1-x}{n+1} \,, \\ (n+1)(n+2)P^{\alpha,n,2}(x) = x^2 - 2(A+1)x + A(A+2) - (\alpha+n+1)(n+1), \\ \qquad\qquad \text{ove} \quad A = 2n+\alpha+1 \,, \end{cases}$$

$$(20') \qquad \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(n+1)!\,\Gamma(\alpha+1)} P^{\alpha,n+1,p}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) P^{\alpha,p+n+1}(x) - L_{p+n+1}^{(\alpha)}(x) P^{\alpha,n}(x) \,.$$

Notiamo poi che la (16′) è una generalizzazione della ($3_2'$) nel caso $\lambda_n^{(\alpha)}(x) \equiv$ $\equiv L_n^{(\alpha)}(x)$, cui la (16′) si riduce per $n = 0$; e che la (17′) è una formula ricorrente rispetto all'indice q.

Infine nella (20′) i polinomi $P^{\alpha,n+1,p}(x)$, che generalizzano quelli di LAGUERRE ed i loro associati, sono espressi mediante questi polinomi.

b) **Il caso delle funzioni d'Hermite di 1ª e 2ª specie.**

3. – Si abbia cioè

$$M_n(x) = H_n(x) \,, \qquad m_n(x) = h_n(x) \,,$$

ove $H_n(x)$ ed $h_n(x)$ sono il polinomio e la funzione d'HERMITE di 2ª specie che indichiamo, indifferentemente l'una e l'altra, con $\theta_n(x)$. Le $\theta(_n x)$, di cui qui ci si occupa, sono quelle per le quali è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \theta_n(x) = n\theta_{n-1}(x) \,.$$

Inoltre, come si sa [6], risulta

$$(1'') \qquad H_{n-1}(x) h_n(x) - H_n(x) h_{n-1}(x) = -(n-1)!\, e^{x^2/2} \,,$$

$$(2'') \qquad \theta_{n+1}(x) = x\theta_n(x) - n\theta_{n-1}(x) \,.$$

E quindi anche in tal caso possono utilizzarsi i risultati del § **1.**

---

[6] Cfr. P. APPELL et J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynomes d'Hermite*, Paris 1926, p. 360.

Si ha intanto

$$a_n = 0\,, \qquad b_n = 1\,, \qquad c_n = n\,.$$

Se inoltre assumiamo

$$T^{n,p}(x) = H^{n,p}(x)\,, \qquad T_1^{n,p}(x) = H_1^{n,p}(x)\,,$$

le (3), (4), (5), (6_1), (3_2), (7), (8_1) del § **1** dànno rispettivamente:

$$\theta_{n+p}(x) = H^{n,p}(x)\theta_n(x) + H_1^{n,p}(x)\theta_{n-1}(x)\,, \tag{3''}$$

$$H_{n-1}(x)h_{n+p}(x) - H_{n+p}(x)h_{n-1}(x) = -(n-1)!\,e^{x^2/2}H^{n,p}(x)\,, \tag{4''}$$

$$H_{n+p}(x)h_n(x) - H_n(x)h_{n+p}(x) = -(n-1)!\,e^{x^2/2}H_1^{n,p}(x)\,, \tag{5''}$$

$$H_1^{n,p}(x) = -nH^{n+1,p-1}(x)\,, \tag{6''_1}$$

$$\theta_{n+p}(x) = H^{n,p}(x)\theta_n(x) - nH^{n+1,p-1}(x)\theta_{n-1}(x)\,, \tag{3''_2}$$

$$H^{0,p}(x) = H_p(x)\,, \tag{7''}$$

$$h_p(x) = H_p(x)h_0(x) - e^{x^2/2}H^{1,p-1}(x)\,. \tag{8''_1}$$

La ($8''_1$) confrontata con la nota formula (7)

$$h_p(x) = H_p(x)h_0(x) - e^{x^2/2}G_{p-1}(x)\,,$$

ove $G_p(x)$ è il polinomio associato a quello d'Hermite, dà

$$H^{1,p-1}(x) = G_{p-1}(x)\,.$$

Quindi i polinomi $H^{n,p}(x)$ sono una generalizzazione, per la ($7''$) e quest'ultima, sia dei polinomi d'Hermite che dei loro associati.

4. – Le (9), (10), (11), (12,) (16), (17), (18), (19), (20) dànno luogo invece

---

(7) Cfr. l. c. in (6).

rispettivamente alle seguenti:

$$(9'') \qquad H^{n,p}(x)H^{n+1,p}(x) - H^{n,p+1}(x)H^{n+1,p-1}(x) = \frac{(n+p)!}{n!},$$

$$(10'') \qquad H_p(x)G_p(x) - H_{p+1}(x)G_{p-1}(x) = p!,$$

$$(11'') \qquad \theta_n(x) = \frac{n!}{(n+p)!}\left[H^{n+1,p}(x)\theta_{n+p}(x) - H^{n+1,p-1}(x)\theta_{n+p+1}(x)\right],$$

$$(12'') \qquad G_n(x)h_n(x) - G_{n-1}(x)h_{n+1}(x) = n!\,h_0(x),$$

$$(16'') \qquad H^{n,p+q}(x) = H^{n+q,p}(x) - (n+q)H^{n+q+1,p-1}(x)H^{n,q-1}(x),$$

$$(17'') \qquad H^{n,q+1}(x) = xH^{n,q}(x) - (n+q)H^{n,q-1}(x),$$

$$(18'') \qquad H^{n,p+1}(x) = xH^{n+1,p}(x) - (n+1)H^{n+2,p-1}(x),$$

$$(19'') \qquad H^{n,0}(x) = 1, \qquad H^{n,1}(x) = x, \qquad H^{n,2}(x) = x^2 - (n+1),$$

$$(20'') \qquad n!\,H^{n+1,p}(x) = H_n(x)G_{n+p}(x) - H_{n+p+1}(x)G_{n-1}(x).$$

Qui si possono ripetere analoghe osservazioni di quelle fatte alla fine del caso precedente.

Notiamo però ancora che la (4″), se vi cambiamo n in $n-p$ e la moltiplichiamo per $(n-p,\ p+1)$, dà

$$(n-p,\ p+1)[H_{n-p-1}(x)h_n(x) - h_{n-p-1}(x)H_n(x)] = -\,n!\,e^{x^2/2}H^{n-p,p}(x),$$

cioè passando al limite per $n \to 0$, essendo $\lim\limits_{n\to 0} H^{n-p,p}(x) = H^{-p,p}(x)$,

$$\lim_{n\to 0}\left[nh_{n-p-1}(x)\right] = \frac{(-1)^p}{p!}H^{-p,p}(x)e^{x^2/2}.$$

Una formula ricorrente che consente di ricavarsi gli $H^{-p,p}(x)$ si ottiene dalla (18″), quando vi si cambi n in $-p$ e p in $p-1$. Si ha difatti dalla (18″), dopo le dette trasformazioni, se si assume $H^{-p,p}(x) \equiv K_p(x)$,

$$K_p(x) = xK_{p-1}(x) + (p-1)K_{p-2}(x).$$

Valori particolari di $K_\nu(x)$ sono, ad esempio, i seguenti:

$$K_1(x)=x\,,\qquad K_2(x)=x^2+1\,,\qquad K_3(x)=x^3+3x\,,\qquad K_4(x)=x^4+6x^2+3\,,$$

$$K_5(x)=x^5+10x^3+10\,x,\quad K_6(x)=x^6+15x^4+40x^2+15\,.$$

c) **Il caso delle funzioni ultrasferiche di 1ª e 2ª specie.**

5. – Le formule corrispondenti a (1) e (2) del § **1** sono ora [8]:

$$(1''')\qquad P_{n-1}^{(\nu)}(x)Q_n^{(\nu)}(x)-P_n^{(\nu)}(x)Q_{n-1}^{(\nu)}(x)=-\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu+n-1)}{n!\,\Gamma(\nu)}(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\,,$$

$$(2''')\qquad K^{\nu,n+1}(x)=2\frac{\nu+n}{n+1}xK^{\nu,n}(x)-\frac{2\nu+n-1}{n+1}K^{\nu,n-1}(x)\,,$$

ove $K^{\nu,n}(x)$ sta indifferentemente per l'una o l'altra delle due funzioni ultrasferiche $P_n^{(\nu)}(x)$, $Q_n^{(\nu)}(x)$, $(|x|>1)$, di 1ª e 2ª specie.

Essendo ora

$$M_n(x)\equiv P_n^{(\nu)}(x)\,,\qquad m_n(x)\equiv Q_n^{(\nu)}(x)\,,$$

si possono, per le (1‴) e (2‴), anche in questo caso, ricavare dal § **1** le formule corrispondenti, quando si assuma

$$T^{n,p}(x)=A^{\nu,n,p}(x)\,,\qquad T_1^{n,p}(x)=A_1^{\nu,n,p}(x)\,,$$

e si ponga

$$A^{\nu,1,p-1}(x)\equiv A^{\nu,p}(x)\,.$$

Si ha in particolare

$$A^{\nu,n,0}(x)=1\,,\qquad A^{\nu,n\,1}(x)=2\,\frac{\nu+n}{n+1}(x)\,.$$

Tali formule sono state in parte già date dal NIELSEN [9].

Notiamo soltanto le seguenti, che si ricavano dalla (10) e dalla (8_1) a mezzo

(8) Cfr. NIELS NIELSEN, *Théorie des fonctions métasphériques*, Paris 1911, pp. 117-118.

(9) Cfr. l. c. in (8), pp. 117-121.

della (1‴),

$$(10‴)\qquad P_n^{(\nu)}(x)A^{\nu,n+1}(x) - P_{n+1}^{(\nu)}(x)A^{\nu,n}(x) = \frac{\Gamma(2\nu+n-1)}{n!\,\Gamma(2\nu)},$$

$$[A^{\nu,0}(x) = 0, \quad A^{\nu,1}(x) = 1],$$

$$(8_1‴)\qquad Q_n^{(\nu)}(x) = P_n^{(\nu)}(x)Q_0^{(\nu)}(x) - \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)}(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}A^{\nu,n}(x),$$

che ci fanno vedere, come è naturale, per quanto si è detto in generale nel § **1**, che i polinomi $A^{\nu,n}(x)$ sono gli associati alle funzioni ultrasferiche di 1ª e 2ª specie.

Se assumiamo $\nu = 1/2$, i polinomi $A^{\frac{1}{2},n}(x)$, che scriviamo più semplicemente $A_n(x)$, attribuiti dal Nielsen a Gauss, sono perciò gli associati alle funzioni sferiche $P_n(x)$, $Q_n(x)$.

Si noti che P. Humbert ([10]) dice, invece, polinomi associati a quelli di Legendre i polinomi $A_n(x)$, $B_n(x)$ [il primo dei quali, perchè non sia confuso con $A_n(x)$ usato in alto, indicheremo per un momento con $\bar{A}_n(x)$] definiti da

$$\bar{A}_n(x)P_n(x) + B_n(x)P_n'(x) = 1,$$

(una analoga posizione iniziale fa l'Humbert per i polinomi associati agli ultrasferici), e trova poi la formula

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\log\frac{x+1}{x-1} - \frac{xP_n(x) - B_n(x)}{x^2-1}$$

che confrontata con l'analoga seguente, attribuita dal Nielsen pure al Gauss,

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\log\frac{x+1}{x-1} - A_n(x)$$

porta alla relazione

$$A_n(x) = \frac{xP_n(x) - B_n(x)}{x^2-1}.$$

I polinomi $A_n(x)$ di Gauss, indicati invece con f_{n-1} da Humbert, sono stati studiati, come nota lo stesso Humbert, da Cristoffel al quale si deve uno

([10]) Cfr. P. Humbert, *Sur deux polynomes associés aux polynomes de Legendre*, Bull. Soc. Math. **46**, 120-151 (1918).

sviluppo di f_{n-1} in serie di polinomi di LEGENDRE. Una formula di SCHÄFLI ed HERMITE, relativa a questi f_{n-1}, è stata poi generalizzata anche dallo stesso CRISTOFFEL.

I polinomi di GAUSS inoltre sono stati studiati da F. NEUMANN che li ha indicati con $R_n(x)$, essendoci tra questi e gli $A_n(x)$ la relazione

$$A_n(x) = -2R_n(x)\,.$$

Si noti però che tra i risultati nuovi, ai quali si perviene con l'applicazione delle formule del § 1, vi è per esempio la formula che si trae dalla (20):

$$(20''')\qquad \frac{\Gamma(2\nu+n)}{(n+1)!\,\Gamma(2\nu)}\,A^{\nu,n+1,p}(x) = P_n^{(\nu)}(x)A^{\nu,p+n+1}(x) - P_{p+n+1}^{(\nu)}(x)A^{\nu,n}(x)\,,$$

in cui, al solito, i polinomi $A^{\nu,n,p}(x)$, che generalizzano sia gli $A^{\nu,n}(x)$ che i $P_n^{(\nu)}(x)$, sono espressi mediante questi stessi polinomi.

Dei resultati che possono trarsi dal § 1, trascriviamo qui il seguente, che ci servirà in seguito,

$$(17''')\qquad (n+1)A^{\nu,n+1}(x) = 2(\nu+n)xA^{\nu,n}(x) - (2\nu+n-1)A^{\nu,n-1}(x)\,.$$

Infine notiamo che dalle (13) e (15) del § 1 si ricava, rispettivamente,

$$Q_{-1}^{(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(2\nu-1)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}\,(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\,,$$

$$Q_{-2}^{(\nu)}(x) = 2^{2\nu-2}\Gamma(\nu-(1/2))x(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\,.$$

La prima di esse è stata data dal NIELSEN ([11]).

§ 3. - Relazioni tra polinomi che generalizzano altri classici ed i loro associati.

Diamo in questo § delle relazioni tra polinomi che generalizzano altri classici, i soliti già considerati precedentemente, ed i loro associati.

([11]) Cfr. l. c. in ([8]), p. 112.

a) **Polinomi che generalizzano quelli di Laguerre e di Hermite ed i loro associati.**

1. – Sono notissime le seguenti formule di SZEGÖ:

$$(1)\qquad \begin{cases} H_{2n}(x) = (-2)^n n!\, L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2/2)\,, \\ H_{2n+1}(x) = (-2)^n n!\, x L_n^{(\frac{1}{2})}(x^2/2)\,; \end{cases}$$

d'altra parte noi abbiamo dimostrato le analoghe alle precedenti per le funzioni di 2ª specie ([12]):

$$(2)\qquad \begin{cases} h_{2n}(x) = (-2)^n n!\, l_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2/2)\,, \\ h_{2n+1}(x) = (-2)^n n!\, x l_n^{(\frac{1}{2})}(x^2/2)\,. \end{cases}$$

Ora, formule analoghe ad (1) e (2) sussistono anche per i polinomi $P^{\alpha,n,p}(x)$, $H^{n,p}(x)$ che, come abbiamo visto, generalizzano i polinomi di LAGUERRE, quelli d'HERMITE ed i corrispondenti loro associati.

Dimostriamo difatti, innanzi tutto, le due seguenti formule:

$$(3)\qquad (-2)^p x P^{-\frac{1}{2},n,p}(x^2/2) = \frac{n!}{(p+n)!} H^{2n-1,2p+1}(x)\,,$$

$$(4)\qquad (-2)^p x P^{\frac{1}{2},n,p}(x^2/2) = \frac{n!}{(p+n)!} H^{2n,2p+1}(x).$$

Per dimostrare la (3) basta porre $\alpha = -1/2$ nella (20′) del § **2**, cambiare x in $x^2/2$, moltiplicare per $(-2)^{p+2n}x$ e tener presente la prima delle (1) e ([13])

$$(5)\qquad (-2)^p x P^{-\frac{1}{2},p+1}(x^2/2) = \frac{1}{(p+1)!} G_{2p+1}(x)\,.$$

In modo analogo si dimostra la (4) quando si tenga presente la relazione ([14])

$$x G_{2n}(x) = (-2)^{n-1} n!\, x P^{\frac{1}{2},n}(x^2/2) + H_{2n+1}(x)\,,$$

([12]) Cfr. il secondo dei lavori citati in ([2]).

([13]) Cfr. G. PALAMÀ. *Relazioni tra i polinomi associati alle funzioni di Laguerre ed Hermite*, d'imminente pubblicazione in « Boll. Un. Mat. Ital. ».

([14]) Cfr. l. c. in ([13]).

che per la (20″) (se vi si pone $n = 1$ e si cambia poi p in $2n - 1$) può anche scriversi più semplicemente

$$(6) \qquad (-2)^{n-1} n!\, x P^{\frac{1}{2},n}(x^2/2) = H^{2,2n-1}(x)\,.$$

Dalla (3) e (4) per $n = 1$ seguono la (5) e (6) rispettivamente.

2. – Analogamente si dimostra la seguente formula limite:

$$(7) \qquad \lim_{h\to 0}\left[\frac{\Gamma(h^{-2}+k+n)}{\Gamma(h^{-2}+k+1)}\, h^{p+2n-2} P^{h^{-2}+k,n,p}\left(\frac{x}{h}+\frac{1}{h^2}\right)\right] = \frac{(-1)^p n!}{(p+n)!} H^{n,p}(x)\,,$$

basta cioè servirsi della (20′) e delle note formule ([15])

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\lim_{h\to 0}\left[h^p L_p^{(h^{-2}+k)}\left(\frac{x}{h}+\frac{1}{h^2}\right)\right] = \frac{(-1)^p}{p!} H_p(x)\,,\\ &\lim_{h\to 0}\left[h^p P^{h^{-2}+k,p+1}\left(\frac{x}{h}+\frac{1}{h^2}\right)\right] = \frac{(-1)^p}{(p+1)!} G_p(x)\,, \end{aligned}$$

per ottenere, con un lecito passaggio al limite, la (7).

Dalla (7) per $n = 1$ segue la (8).

3. – Dimostriamo con il metodo d'induzione completa la relazione

$$(9) \qquad \lim_{n\to 0}[nP^{\alpha,n-p,p}(x)] = -\,pL_p^{(-\alpha)}(-x)\,.$$

Si verifica subito che vale per $p = 1, 2$; ammesso che valga per ogni valore di $p \leqslant p$, dalla (18′), mutando n in $n - p - 1$ e moltiplicando per n, si ha, se si passa, come è lecito al limite, per la stessa (9),

$$\lim_{n\to 0}[nP^{\alpha,n-(p+1),p+1}(x)] = (\alpha - 2p - 1 - x)L_p^{(-\alpha)}(-x) - (\alpha - p)L_{p-1}^{(-\alpha)}(-x)\,,$$

che, riducendosi il suo secondo membro per la formula ricorrente rispetto all'indice p dei polinomi di LAGUERRE a $-(p+1)L_{p+1}^{(-\alpha)}(-x)$, non è che la (9) quando vi si cambi p in $p+1$, e quindi la (9) è vera.

Se nella (9) si fa $\alpha = -1/2$, si muta x in $x^2/2$ e si moltiplica per $(-2)^p x$,

---

([15]) Per la prima cfr. L. TOSCANO, *Formule limiti sui polinomi di Laguerre*, Boll. Un. Mat. Ital. (2) 1, 337-339 (1939); G. PALAMÀ, *Sulla soluzione polinomiale della* $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$, Boll. Un. Mat. Ital. (2) 1, 27-35 (1939); per la seconda cfr. l. c. in ([13]).

a mezzo della (3) e della seconda delle (1), abbiamo

$$H^{-2p-1,2p+1}(x) = (-1)^{p-1} i H_{2p+1}(ix)\,, \qquad i = \sqrt{-1}\,. \tag{10}$$

In modo analogo si dimostra la seguente:

$$H^{-2p,2p+1}(x) = (-1)^p x H_{2p}(ix)\,. \tag{11}$$

Inoltre, se nella (18″) assumiamo $n = -2p-1$ e mutiamo p in $2p$, abbiamo a mezzo della (10):

$$xH^{-2p,2p}(x) = (-1)^{p-1} i H_{2p+1}(ix) + 2pH_{2p-1}(ix),$$

cioè, per la formula ricorrente rispetto all'indice dei polinomi di HERMITE,

$$H^{-2p,2p}(x) = (-1)^p H_{2p}(ix)\,. \tag{12}$$

In modo analogo dalla (18″) per $n = -2p$, quando si cambi p in $2p$, si ha

$$H^{-(2p-1),2p}(x) = (-1)^p ix H_{2p-1}(ix)\,. \tag{13}$$

Dalle quattro formule trovate (10), (11), (12), (13) seguono per confronto queste altre:

$$xH^{-2p,2p}(x) = H^{-2p,2p+1}(x)\,,$$

$$xH^{-2p+1,2p-1}(x) = H^{-2p+1,2p}(x)\,.$$

Le (10), (11), (12), (13) si generalizzano nelle seguenti due notevoli formule:

$$H^{-2p,2p+m}(x) = (-1)^p H_{2p}(ix) H_m(x)\,,$$

$$H^{-(2p-1),2p+m}(x) = (-1)^p i H_{2p-1}(ix) H_{m+1}(x)\,, \qquad p > 0,$$

che si dimostrano facilmente con il metodo d'induzione completa a mezzo della (17″).

Si osservi che se nella (1) del § **2** mutiamo p in $2p$ abbiamo, per la (12),

$$\lim_{n\to 0}\,[nh_{n-2p-1}(x)] = (-1)^p H_{2p}(ix)\, e^{x^2/2}\,.$$

Analogamente la stessa (1), se si cambia p in $2p-1$, ci dà

$$\lim_{n\to 0}\,[nh_{n-2p}(x)] = (-1)^{p-1} i H_{2p-1}(ix)\, e^{x^2/2}\,.$$

Con delle nostre formule ([15']) si scrive agevolmente l'equazione differenziale cui soddisfa il prodotto degli integrali particolari $H_n(qx)$, $H_m(x)$ rispettivamente di

$$y'' - q^2xy' + q^2ny = 0, \qquad y'' - xy' + my = 0,$$

e si trova così che

$$H^{-2p,s}(x) = (-1)^p H_{2p}(ix) H_m(x), \qquad H^{-(2p-1),s}(x) = (-1)^p i H_{2p-1}(ix) H_{m+1}(x)$$

(ove $i=\sqrt{-1}$, $s = 2p+m$) sono integrali particolari rispettivamente delle equazioni

$$y^{(4)} + (-x^2 + 2r)y'' - 3xy' + s(s+2)y = 0,$$

$$y^{(4)} + (-x^2 + 2r + 4)y'' - 3xy' + s(s+2)y = 0,$$

in cui è $r = m - 2p$, $s = 2p + m$.

b) Polinomi che generalizzano gli ultrasferici, quelli di Hermite ed i loro associati.

4. – Sussiste la formula limite

$$\lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{\Gamma(s)}\Gamma(s+n-1)s^{-(p+2n-2)/2}A^{s/2,n,p}\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)\right] = \frac{n!}{(p+n)!}H^{n,p}(x)\,. \tag{14}$$

Innanzi tutto però dimostriamo la relazione

$$\lim_{n\to\infty}[s^{-p/2}A^{s/2,p+1}(x/\sqrt{s})] = \frac{1}{(p+1)!}G_p(x)\,, \tag{15}$$

a mezzo della quale è facile dimostrare poi la (14).

([15']) Cfr. G. PALAMÀ: *Sulle equazioni differenziali soddisfatte dal prodotto di integrali particolari di due equazioni differenziali lineari omogenee assegnate e su alcune formule integrali dei polinomi di Laguerre e di Hermite*, Annali Mat. pura applicata (4) **18**, 309-325 (1939).

Si osservi che la (15) è analoga alla nota relazione [16]

$$\lim_{s\to\infty}[s^{-n/2}P_n^{(s/2)}(x/\sqrt{s})] = \frac{1}{n!}H_n(x). \tag{16}$$

Per dimostrare la (15), che vale per $p = 0, 1, 2$, supposta vera per ogni $p \leqslant n-1$, basta moltiplicare la (17''') per $s^{-n/2}$, mutarvi x in $x/\sqrt{s}$, ν in $s/2$ e passare al limite, come è lecito, per ottenere, a mezzo della (15) e della nota formula

$$G_n(x) = xG_{n-1}(x) - nG_{n-2}(x),$$

la (15) per $p = n$.

Per dimostrare ora la (14) si cambi nella (20''') ν in $s/2$, x in $x/\sqrt{s}$, si moltiplichi per $s^{-(p+2n)/2}$ e si passi al limite, si ottiene così a mezzo delle (15) e (16):

$$\lim_{s\to\infty}\left[\frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)}\,s^{-(p+2n)/2}A^{s/2,n+1,p}\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)\right] =$$

$$= \frac{n+1}{(n+p+1)!}\,[H_n(x)G_{n+p}(x) - H_{n+p+1}(x)G_{n-1}(x)],$$

che mediante la (20'') si riduce appunto alla (14) se vi si muta n in $n+1$.

Si noti poi che la (15) segue dalla (14) per $n = 1$.

5. – Con il metodo d'induzione completa si dimostrano anche facilmente le formule:

$$\lim_{a\to\infty}\frac{A^{a-n,2n+1}(x/\sqrt{a})}{(a-n,\,n)} = \frac{2^n}{(2n+1)!}\,G_{2n}(x\sqrt{2}), \tag{17}$$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{a}\,A^{a-n,2n}(x/\sqrt{a})}{(a-n,\,n)} = \frac{2^{n-\frac{1}{2}}}{(2n)!}\,G_{2n-1}(x\sqrt{2}), \tag{18}$$

che sono analoghe a due altre relative ai polinomi ultrasferici e d'HERMITE [17], di cui i polinomi che compaiono nelle (17) e (18) sono gli associati.

Noi dimostriamo la (17), in modo analogo si dimostra la (18).

---

[16] Cfr. l. c. in [6], p. 332.

[17] Cfr. G. PALAMÀ, *Contributo alla ricerca di relazioni tra classici polinomi*, Rivista Mat. Univ. Parma **2**, 383-402 (1951).

Dalla (17''') si ricava immediatamente

$$(n, 2)(\nu+n-2)A^{\nu,n+1}(x)=[4(\nu+n-2, 3)x^2-2(\nu+n-1)B]A^{\nu,n-1}(x)-$$
$$-(\nu+n)(2\nu+n-3, 2)A^{\nu,n-3}(x)\,,$$

essendo

$$B=n(2\nu+n-2)-\nu\,.$$

Se poi in questa cambiamo n in $2n$, ν in $a-n$, x in $x/\sqrt{a}$, dividiamo per $(a-n, n+1)$ e passiamo al limite, come è anche ora possibile, abbiamo, se si ammette che la (15) valga per ogni $n \leqslant n-1$,

$$\lim_{a\to\infty}\frac{A^{a-n,2n+1}(x/\sqrt{a})}{(a-n, n)}=$$
$$=\frac{2^n}{(2n+1)!}[(2x^2-4n+1)G_{2n-2}(x\sqrt{2})-(2n-2)(2n-1)G_{2n-4}(x\sqrt{2})],$$

che dà, per identità facile a dimostrarsi, appunto la (17) e quindi essa, che vale per $n=0, 1$, è vera.

6. – In maniera analoga a quella seguita per dimostrare la (9) si dimostra la relazione

$$\lim_{n\to 0}[nA^{\nu,n-p,\nu}(x)]=(-1)^{p-1}pP^{(-\nu+1)}(-x)\,. \tag{19}$$

§ 4. – Formule relative alle funzioni di 2ª specie. Wronskiani.

1. – Applichiamo le formule (26) e (27) del § **1** alle funzioni ultrasferiche e a quella di LAGUERRE.

a) *Le funzioni ultrasferiche.*

Con i simboli del § **1** si ha ora

$$a_n=0\,,\qquad b_n=\frac{2(\nu+n)}{n+1}\,,\qquad c_n=\frac{2\nu+n-1}{n+1}\,,$$

$$A(\nu, n)=\frac{-\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}\,\Gamma(2\nu+n-1)\,,\qquad w(\nu, x)=(x^2-1)^{-\nu+\frac{1}{2}}$$

e perciò le (26), (27) del § **1** diventano, ponento $U^{(p)}(x) = N^{(p)}(x)$,

$$N^{(p)}(x) = -\frac{2(\nu - p)}{p-1}\, x\, N^{(p-1)}(x) + \frac{2\nu - p}{p-2}\, N^{(p-2)}(x),$$

$$Q^{(\nu)}_{-p-1}(x) = (-1)^{p-1}(p-1)!\, \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}\, \Gamma(2\nu - p - 1)(x^2 - 1)^{-\nu+\frac{1}{2}} N^{(p)}(x),$$

ossia, per la (19) del precedente §,

$$Q^{(\nu)}_{-p-1}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}\, p!\, \Gamma(2\nu - p - 1)(x^2 - 1)^{-\nu+\frac{1}{2}} P^{(-\nu+1)}_p(-x)\,.$$

b) *Le funzioni di Laguerre.*

Si ha

$$a_n = \frac{\alpha + 2n + 1}{n+1}, \qquad b_n = -\frac{1}{n+1}, \qquad c_n = \frac{\alpha + n}{n+1},$$

$$A(\alpha, n) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\sqrt{2\pi}}, \qquad w(\alpha, x) = \frac{e^x}{x^\alpha}\,.$$

Quindi le (26), (27) del § **1** dànno rispettivamente, se $U^{(p)}(x) = S^{(p)}(x)$,

$$S^{(p)}(x) = \frac{-\alpha + 2p - 1 + x}{p-1}\, S^{(p-1)}(x) + \frac{\alpha - p + 1}{p-2}\, S^{(p-2)}(x)\,,$$

$$l^{(\alpha)}_{-p-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, (-1)^p (p-1)!\, \Gamma(\alpha - p)\, \frac{e^x}{x^\alpha}\, S^{(p)}(x)\,,$$

ossia, per la (9) del § **3**,

$$l^{(\alpha)}_{-p-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, (-1)^{p-1} p!\, \Gamma(\alpha - p)\, \frac{e^x}{x^\alpha}\, L^{(-\alpha)}_p(-x)\,,$$

come già avevamo trovato altrove [18].

2. – La (22) del § **1**, qualora si conosca e non sia infinita $m_{-1}(x)$, consente di ricavarci il valore del corrispondente $W_n(x)$.

Facciamo due esempi.

---

[18] Cfr. il primo dei lavori citati in [1].

a) *Le funzioni ultrasferiche.*

NIELSEN dà la formula [19], da noi ritrovata alla fine del § **2**,

$$Q_{-1}^{(\nu)}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu-1)}{\Gamma(\nu)}(x^2-1)^{-\nu+\frac{1}{2}},$$

e poichè in questo caso è

$$c_n = \frac{2\nu+n-1}{n+1},$$

dalla (22) del § **1** si ha subito il noto valore di $W_n(x)$:

$$W_n(x) = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu+n-1)}{n!\,\Gamma(\nu)}(x^2-1)^{-\nu+\frac{1}{2}}.$$

b) *Le funzioni di Laguerre.*

Noi abbiamo stabilito, indipendentemente dal valore di $W_n(x)$, la formula

$$l_{-1}^{(\alpha)}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(\alpha)e^x}{x^\alpha},$$

e poichè in questo caso è

$$c_n = \frac{\alpha+n}{n+1},$$

dalla (22) del § **1** abbiamo la seguente nota espressione di $W_n(x)$ [20]:

$$W_n(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n)e^x}{\sqrt{\pi 2}\,n!\,x^\alpha}.$$

Questo valore di $W_n(x)$ è legato al Wronskiano delle funzioni di LAGUERRE da una semplice relazione [21].

---

(19) Cfr. l. c. in (8), p. 112.
(20) Cfr. il primo dei lavori citati in (1).
(21) Cfr. il primo dei lavori citati in (1): formula (4').