Rivista Mat. Univ. Parma 4, 337-361 (1953)

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Sui teoremi di Mercer e Vijayaraghavan precisati per le successioni oscillanti.

1. – Introduzione.

Alcune proposizioni classiche stabiliscono la convergenza di una successione $\{x_n\}$ di numeri reali quando sia supposta la convergenza di una media ponderata $\{\alpha x_n + (1-\alpha)X_n\}$ fra la successione data $\{x_n\}$ e la successione $\{X_n\}$ delle sue medie aritmetiche X_n (teorema di J. MERCER [4] ([1])), oppure quando sia supposta la convergenza a zero di una successione $\{x_n + \beta_n X_n\}$ ottenuta da quella data $\{x_n\}$ con una « perturbazione » $\{\beta_n X_n\}$ espressa in funzione della successione $\{X_n\}$ delle medie aritmetiche e con peso variabile β_n (teoremi di T. VIJAYARAGHAVAN [5]).

Nella presente Nota si riprende l'argomento e si studia a fondo questa connessione, fra i caratteri delle successioni in discorso, da un punto di vista generale e cioè quello degli estremi di oscillazione $\underline{\lim}$ e $\overline{\lim}$ e quello del peso variabile α_n nel teorema di MERCER: si ritrovano come casi particolari il teorema di MERCER e due dei teoremi di VIJAYARAGHAVAN sopra ricordati; si dà poi una dimostrazione di un terzo teorema di VIJAYARAGHAVAN (di questi teoremi si riportano gli enunciati nel n. 2 seguente).

Riteniamo che questo nostro lavoro presenti interesse, oltre che per i nuovi risultati, anche dal punto di vista metodologico, giacchè è richiesta solo una rudimentale attrezzatura per giungere alle proposizioni generali. L'idea di questo studio ci è stata suggerita dalla elegante dimostrazione del teorema di MERCER che venne data da K. KNOPP ([2]): abbiamo però dovuto introdurre alcuni concetti appropriati per sistemare le successioni oscillanti.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

([1]) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del presente lavoro.

([2]) Cfr. K. KNOPP [3]; G. H. HARDY [2], p. 106.

2. – Un teorema di Mercer e tre teoremi di Vijayaraghavan.

Consideriamo una successione

$$x_0\,,\quad x_1\,,\quad x_2\,,\ \ldots\,,\ x_n\,,\ \ldots$$

di numeri reali e, accanto ad essa, la successione delle sue medie aritmetiche

$$X_0\,,\quad X_1\,,\quad X_2\,,\ \ldots\,,\ X_n\,,\ \ldots$$

il cui elemento generale è pertanto dato da

$$X_n = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1}\,. \tag{2.1}$$

Consideriamo poi una successione di numeri reali positivi [3]

$$\alpha_0\,,\ \alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \ldots\,,\ \alpha_n\,,\ \ldots\,,\qquad (\alpha_n > 0 \ \text{ per } \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{2.2}$$

Indicheremo con

$$y_0\,,\quad y_1\,,\quad y_2\,,\ \ldots\,,\ y_n\,,\ \ldots$$

la successione il cui elemento generale è

$$y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) X_n\,; \tag{2.3}$$

indicheremo infine con

$$v_0\,,\quad v_1\,,\quad v_2\,,\ \ldots\,,\ v_n\,,\ \ldots$$

la successione il cui elemento generale è

$$v_n = x_n + \beta_n X_n\,,\qquad \text{con}\qquad \beta_n = \frac{1-\alpha_n}{\alpha_n}\,; \tag{2.4}$$

risulta evidentemente

$$v_n = \frac{y_n}{\alpha_n}\,,\qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{2.5}$$

---

(3) Le proposizioni considerate in questo lavoro riguardano proprietà di limite delle successioni e pertanto le ipotesi potranno in modo ovvio essere sostituite da altre non sostanzialmente più generali: per esempio basterà supporre $\alpha_n > 0$ per $n \geqq n_0$ conveniente, ecc..

È classica ed elementare la catena di disuguaglianze attenuate ([4])

$$\varliminf x_n \leqq \varliminf X_n \leqq \varlimsup X_n \leqq \varlimsup x_n \,. \tag{2.6}$$

Ciò premesso ricordiamo il seguente

Teorema (di J. MERCER). Se $\alpha > 0$, la relazione di limite $y_n \to L$ (finito) implica $x_n \to L$ ([5]).

In questo teorema α è fisso (cioè indipendente da n): quando lo si consideri variabile con n, cioè lo si sostituisca con α_n [vedasi la (2.2)], sussistono i seguenti teoremi:

Teorema 1° (di T. VIJAYARAGHAVAN). Se $0 < \alpha_n \leqq A$ (A indipendente da n), allora $v_n \to 0$ implica $X_n \to 0$.

Teorema 2° (di T. VIJAYARAGHAVAN). Se $0 < a \leqq \alpha_n \leqq A$ (a, A indipendenti da n), allora $v_n \to 0$ implica $x_n \to 0$.

Teorema 3° (di T. VIJAYARAGHAVAN). Se $\beta_n > cn$ ($c > 0$, indipendente da n), allora $v_n \to 0$ implica $x_n \to 0$ e $nX_n \to 0$.

Questo Teorema 3° viene soltanto enunciato dall'Autore ([6]), insieme ad altre proposizioni, con la riserva di presentare in una occasione successiva la dimostrazione. Non ci consta che tale dimostrazione sia stata da lui pubblicata; una dimostrazione è stata data, in modo semplice, da E. T. COPSON e W. L. FERRAR (vedasi [6], in particolare p. 259). Noi ne daremo una che si presenta come interessante applicazione dei concetti introdotti: questo teorema sarà elencato come Teorema D (vedasi n. **5**).

3. – Osservazioni preliminari.

Dalla (2.1) risulta

$$x_n = X_n + n(X_n - X_{n-1}) \; ; \tag{3.1}$$

da questa e dalla (2.3) si ha poi

$$y_n = X_n + n\alpha_n(X_n - X_{n-1}) \tag{3.2}$$

([4]) Nelle relazioni di limite è ovviamente sottinteso $n \to +\infty$. In circostanze analoghe verrà sottinteso, perchè sempre evidente, l'indice che cresce indefinitamente.

([5]) Cfr. J. MERCER [4]; G. H. HARDY [1], [2], (p. 104).

([6]) Cfr. T. VIJAYARAGHAVAN [5], p. 134, dove questa proposizione viene formulata in Theor. 3 e Theor. 5.

e, sottraendo membro a membro quest'ultima dalla precedente (3.1),

$$x_n - y_n = n(1-\alpha_n)(X_n - X_{n-1})\,. \tag{3.3}$$

Dalle (3.1) e (3.2) seguono le tre relazioni

$$x_n \gtreqless X_n \iff y_n \gtreqless X_n \iff X_n \gtreqless X_{n-1} \quad (^7), \tag{3.4}$$

le quali valgono contemporaneamente ed inoltre in esse i tre segni $>$, $=$, $<$ si corrispondono.

Si ha ancora che

$$x_{n+1} \gtreqless X_n \iff X_{n+1} \gtreqless X_n\,; \tag{3.5}$$

infatti

$$x_{n+1} \gtreqless X_n \implies X_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}X_n + \frac{x_{n+1}}{n+2} \gtreqless \left(\frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{n+2}\right)X_n = X_n\,;$$

e inversamente

$$X_{n+1} \gtreqless X_n \implies x_{n+1} \gtreqless X_{n+1} \implies x_{n+1} \gtreqless X_n\,.$$

Dalla (3.3) risulta poi

$$\begin{cases} 0<\alpha_n<1\,, & x_n \gtreqless y_n \iff X_n \gtreqless X_{n-1}\,, \\ \alpha_n = 1\,, & x_n = y_n\,, \\ 1<\alpha_n\,, & x_n \gtreqless y_n \iff X_{n-1} \gtreqless X_n\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

È anche evidentemente

$$\min(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leqq X_n \leqq \max(x_0, x_1, \ldots, x_n)\,,$$

dove il segno $=$ vale se e solo se gli x_i, $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, sono tutti eguali fra loro.

4. – Una semplice rappresentazione geometrica.

Supponiamo che per ogni n sia $\alpha_n = \alpha > 0$; riferiamo il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $0(\alpha, X_n)$ e sulle tre rette verticali di ascisse 0, 1, α consideriamo rispettivamente i punti di ordinate $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$; $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$; $y_0, y_1, \ldots$,

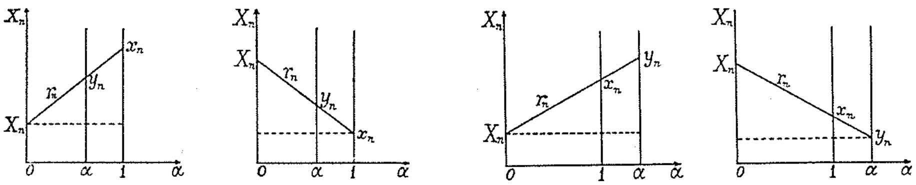
---

(7) Con la scrittura $A \iff B$ intenderemo: *da A segue B e inversamente*. Con la scrittura $A \implies B$ intenderemo: *da A segue B*.

$y_n, \ldots,$ e la retta r_n congiungente i punti $(0, X_n)$ e $(1, x_n)$. Su questa retta r_n si trova anche il punto (α, y_n): infatti dalla (2.3), per $\alpha_n = \alpha$, si ha la proporzione

$$\frac{y_n - X_n}{\alpha} = \frac{x_n - X_n}{1}\,. \tag{4.1}$$

Come illustrazione di ciò possiamo considerare, ad esempio, i quattro schemi (a seconda che sia $0 < \alpha < 1$ o $\alpha > 1$ e $x_n > X_n$ o $x_n < X_n$).



Quando $x_n \to L$ (finito), dalla catena di diseguaglianze attenuate (2.6) si ha $X_n \to L$ e, dalla (4.1), $y_n \to L$: allora la retta r_n tende alla retta orizzontale limite di ordinata L.

Quando $X_n \to L$, ma non è $x_n \to L$, la retta r_n tende, per così dire, ad «imperniarsi» nel punto $(0, L)$: evidentemente in tal caso la successione $\{y_n\}$ non potrà essere convergente.

Quando $\{X_n\}$ è oscillante, lo è pure $\{x_n\}$. Ci chiediamo: r_n tenderà ad «imperniarsi» sulla verticale di ascissa α ad una qualche quota L? *La risposta è negativa, giacchè il teorema li Mercer afferma che da $y_n \to L$ segue $x_n \to L$, $X_n \to L$.*

5. - Risultati.

Consideriamo il caso generale del peso α_n dipendente da n: ci proponiamo di dimostrare i seguenti tre teoremi, di cui i primi due relativi all'oscillazione della successione $\{y_n\}$ nei confronti delle successioni $\{x_n\}$ e $\{X_n\}$ e il terzo relativo alla oscillazione della successione $\{v_n\}$ nei confronti della $\{X_n\}$ [8].

Teorema A. *Sia* $0 < \alpha_n \leqq A$,

$$y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) X_n\,, \qquad X_n = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1}\,.$$

Risulta allora

$$\underline{\lim}\, y_n \leqq \underline{\lim}\, X_n \leqq \overline{\lim}\, X_n \leqq \overline{\lim}\, y_n\;; \tag{5.1}$$

[8] Per il quarto teorema enunciato alla pagina 343 si veda la fine del n. 2.

in particolare

$$(5.2)\qquad \begin{cases} y_n \to +\infty \ \textit{implica}\ X_n \to +\infty, & \overline{\lim}\, x_n = +\infty, \\ y_n \to -\infty \ \textit{implica}\ X_n \to -\infty, & \underline{\lim}\, x_n = -\infty. \end{cases}$$

(Nell'ipotesi che la successione $\{X_n\}$ non sia definitivamente monotona, la (5.1) vale anche nel caso in cui la successione $\{\alpha_n\}$ non sia limitata superiormente.)

Osservazione. Il Teorema A contiene come caso particolare il Teorema 1° di VIJAYARAGHAVAN (vedasi n. 2): infatti $v_n \to 0$ implica $y_n = \alpha_n v_n \to 0$ e quindi, per la (5.1), anche $X_n \to 0$.

Teorema B. *Sia* $0 < \alpha' = \underline{\lim}\, \alpha_n \leqq \overline{\lim}\, \alpha_n = \alpha''$ (*finito*) *e poniamo*

$$\Delta = \overline{\lim}\, y_n - \underline{\lim}\, y_n, \qquad (\Delta \geqq 0 \textit{ ed eventualmente infinito}).$$

Allora è

$$(5.3)\qquad \underline{\lim}\, y_n - \frac{\Delta}{\alpha'} \leqq \begin{Bmatrix} \underline{\lim}\, x_n \\ \underline{\lim}\, y_n \end{Bmatrix} \leqq \underline{\lim}\, X_n \leqq \overline{\lim}\, X_n \leqq \begin{Bmatrix} \overline{\lim}\, x_n \\ \overline{\lim}\, y_n \end{Bmatrix} \leqq \overline{\lim}\, y_n + \frac{\Delta}{\alpha'};$$

nei due casi $y_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$ *vanno soppressi, nella* (5.3), *i due membri estremi.*

In particolare, se per ogni $n \geqq n_0$ *conveniente è*

1°) $1 \leqq \alpha_n$, *allora*

$$(5.4)\qquad \underline{\lim}\, y_n \leqq \underline{\lim}\, x_n \leqq \overline{\lim}\, x_n \leqq \overline{\lim}\, y_n,$$

2°) $\alpha_n \leqq 1$, *allora*

$$(5.5)\qquad \underline{\lim}\, x_n \leqq \underline{\lim}\, y_n \leqq \overline{\lim}\, y_n \leqq \overline{\lim}\, x_n.$$

In questo caso 2°) *ai due membri estremi della catena di diseguaglianze attenuate* (5.3) *si possono sostituire rispettivamente le seguenti espressioni*

$$(5.6)\qquad \underline{\lim}\, X_n - \frac{1}{\alpha'}(\overline{\lim}\, X_n - \underline{\lim}\, y_n), \qquad \overline{\lim}\, X_n + \frac{1}{\alpha'}(\overline{\lim}\, y_n - \underline{\lim}\, X_n).$$

Osservazione. Il Teorema B contiene come caso particolare il Teorema 2° di VIJAYARAGHAVAN (vedasi n. **2**): infatti $v_n \to 0$ implica $y_n = \alpha_n v_n \to 0$ e quindi, per la (5.3), anche $x_n \to 0$.

Teorema C. *Sia* $0 < \alpha_n \leqq A$ (*A indipendente da n*),

$$v_n = x_n + \beta_n X_n\,, \qquad \beta_n = \frac{1-\alpha_n}{\alpha_n}\,;$$

allora se

$$\underline{\lim}\, v_n \leqq 0 \leqq \overline{\lim}\, v_n \tag{5.7}$$

risulta

$$A\,\underline{\lim}\, v_n \leqq \underline{\lim}\, X_n \leqq \overline{\lim}\, X_n \leqq A\,\overline{\lim}\, v_n\,. \tag{5.8}$$

(*In particolare*

$$\underline{\lim}\, v_n = 0 \quad \textit{implica} \quad \underline{\lim}\, X_n \geqq 0\,,$$

$$\overline{\lim}\, v_n = 0 \quad \textit{implica} \quad \overline{\lim}\, X_n \leqq 0)\,.$$

Teorema D. *Sia* $\beta_n > cn$ ($c > 0$, *indipendente da* n), *allora* $v_n \to 0$ *implica* $x_n \to 0$ *e* $nX_n \to 0$.

Dai Teoremi A e B discendono i seguenti corollari:

Corollario 1°. *Nell'ipotesi* $0 < \alpha' = \underline{\lim}\, \alpha_n \leqq \overline{\lim}\, \alpha_n = \alpha''$ (*finito*) *sia, per n abbastanza grande,*

$$L - c \leqq y_n \leqq L + c \qquad (L,\ c \textit{ numeri finiti});$$

allora per ogni $\varepsilon > 0$ *è anche, per n abbastanza grande* (*ossia per* $n \geqq n_0(\varepsilon)$),

$$L - c - \varepsilon \leqq X_n \leqq L + c + \varepsilon\,; \tag{5.9}$$

inoltre, quando risulta definitivamente $1 \leqq \alpha_n$, *è pure definitivamente*

$$L - c - \varepsilon \leqq x_n \leqq L + c + \varepsilon\,, \tag{5.10}$$

e quando è definitivamente $\alpha_n \leqq 1$ *è pure definitivamente*

$$L - \frac{\alpha'+2+\varepsilon}{\alpha'}\,c \leqq x_n \leqq L + \frac{\alpha'+2+\varepsilon}{\alpha'}\,c\,. \tag{5.11}$$

Osservazione. Questo Corollario 1° contiene come caso particolare il classico Teorema di MERCER (vedasi n. **2**): infatti se $\alpha_n = \alpha > 0$ (indipendente da n) e se $y_n \to L$, si possono assumere c ed ε piccoli a piacere e, sia dalla (5.10) che dalla (5.11), segue $x_n \to L$.

Corollario 2°. *Nell'ipotesi* $0 < \alpha' = \underline{\lim}\, \alpha_n \leqq \overline{\lim}\, \alpha_n = \alpha''$ *(finito) sia, per n abbastanza grande,*

$$L - b \leqq X_n \leqq L + b\,, \qquad L - c \leqq y_n \leqq L + c\,, \qquad (b \geqq c);$$

allora per ogni $\varepsilon > 0$ è anche, per n abbastanza grande,

a) *quando è definitivamente* $1 \leqq \alpha_n$:

$$L - c - \varepsilon \leqq x_n \leqq L + c + \varepsilon\,; \tag{5.12}$$

b) *quando è definitivamente* $\alpha_n \leqq 1$:

$$L - \left[b + \frac{1}{\alpha'}(b + c) + \varepsilon\right] \leqq x_n \leqq L + \left[b + \frac{1}{\alpha'}(b + c) + \varepsilon\right]. \tag{5.13}$$

Corollario 3°. *Nell'ipotesi* $0 < \alpha' = \underline{\lim}\, \alpha_n \leqq \overline{\lim}\, \alpha_n = \alpha''$ *(finito) sia $X_n \to L$ e per n abbastanza grande si abbia*

$$M - c \leqq y_n \leqq M + c\,, \qquad (M - c \leqq L \leqq M + c)\,;$$

allora per ogni $\varepsilon > 0$ è anche, per n abbastanza grande,

a) *quando è definitivamente* $1 \leqq \alpha_n$:

$$M - c - \varepsilon \leqq x_n \leqq M + c + \varepsilon\,, \tag{5.14}$$

b) *quando è definitivamente* $\alpha_n \leqq 1$:

$$L + \frac{1}{\alpha'}(M - L - c) - \varepsilon \leqq x_n \leqq L + \frac{1}{\alpha'}(M - L + c) + \varepsilon\,. \tag{5.15}$$

Le dimostrazioni dei teoremi e dei corollari enunciati nel presente numero sono riportate nel n. **10**: a tali dimostrazioni perverremo dopo aver considerato il caso delle successioni $\{x_n\}$ e $\{X_n\}$ definitivamente monotone, indi il caso delle successioni $\{x_n\}$ e $\{X_n\}$ oscillanti, e dopo aver premesso alcuni lemmi relativi all'uno o all'altro dei due casi suddetti.

6. – Il caso delle successioni $\{x_n\}$ e $\{X_n\}$ definitivamente monotone.

Si riconosce facilmente quanto segue:

Se le due successioni $\{x_n\}$ e $\{X_n\}$ sono ambedue definitivamente monotone non decrescenti (oppure non crescenti) allora

$$\begin{array}{llll} \text{da } x_n \to L \text{ (finito)} & \text{segue} & X_n \to L, & y_n \to L, \\ \text{da } x_n \to +\infty & \text{segue} & X_n \to +\infty, & y_n \to +\infty, \\ \text{(oppure da } x_n \to -\infty & \text{segue} & X_n \to -\infty, & y_n \to -\infty). \end{array}$$

Il carattere di monotonia della successione $\{y_n\}$ concorde con quello di $\{x_n\}$ e $\{X_n\}$ è garantito quando sia definitivamente $0 < \alpha_n \leqq 1$.

Veniamo ad illustrare le conseguenze su $\{X_n\}$ della monotonia di $\{x_n\}$. Sussiste in proposito il seguente

Teorema. *Se $\{x_n\}$ è definitivamente monotona, tale risulta anche $\{X_n\}$ (non vale in generale il viceversa). Più precisamente, se $x_n \to +\infty$ ($x_n \to -\infty$), si ha $X_n \to +\infty$ ($X_n \to -\infty$) e $\{X_n\}$ è definitivamente crescente (decrescente).*

Se $x_n \to L$ (finito), allora $X_n \to L$ nello stesso senso di $\{x_n\}$ o in senso opposto.

Dimostrazione. Distinguiamo i seguenti casi:

1°) Sia $\{x_n\}$ definitivamente monotona non decrescente.

a) Sia $x_n \to +\infty$ e sia $\{x_n\}$ non decrescente a partire da $n = n_0$ (cioè per ogni $n \geqq n_0$ sia $x_n \geqq x_{n-1}$).

Allora per la (2.6) è $X_n \to +\infty$. Mostriamo che la successione $\{X_n\}$ è definitivamente crescente. Posto

$$\mu_n = \max(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

è ovvio che μ_n è non decrescente, $\mu_n \to +\infty$ ed esiste un minimo indice $\nu \geqq n_0$ tale che x_ν sia il primo elemento che superi tutti i precedenti; si ha pertanto $x_\nu = \mu_\nu > \mu_{\nu-1} \geqq X_{\nu-1}$, da cui, per le (3.5), $X_\nu > X_{\nu-1}$ e, per le (3.4), $x_\nu > X_\nu$. Avremo poi $x_{\nu+1} \geqq x_\nu > X_\nu$ e, per le (3.5), $X_{\nu+1} > X_\nu$. Procediamo ora per induzione: sia

$$x_\nu \leqq x_{\nu+1} \leqq \ldots \leqq x_{\nu+k}, \qquad X_\nu < X_{\nu+1} < \ldots < X_{\nu+k} < x_{\nu+k}$$

e mostriamo che è ancora $X_{\nu+k} < X_{\nu+k+1}$. Infatti $x_{\nu+k+1} \geqq x_{\nu+k} > X_{\nu+k}$ e dalle (3.5) segue che la successione $\{X_n\}$ risulta quindi definitivamente crescente.

b) Sia $x_n \to L$ (finito) e sia $\{x_n\}$ non decrescente a partire da $n = n_0$.

Se esiste un indice $\nu \geqq n_0$ tale che $x_\nu \geqq X_\nu$, allora per le (3.4) è $X_\nu \geqq X_{\nu-1}$; si ha poi $x_{\nu+1} \geqq x_\nu \geqq X_\nu$ e per le (3.5) $X_{\nu+1} \geqq X_\nu$; per le (3.2) è poi $x_{\nu+1} \geqq X_{\nu+1}$ e per induzione $X_{\nu+k} \leqq X_{\nu+k+1}$, $(k=0, 1, 2, \ldots)$. La successione $\{X_n\}$ risulta quindi definitivamente monotona non decrescente a partire, per lo meno, da $n = \nu$; per la (2.6) $\{x_n\}$ e $\{X_n\}$ convergono allo stesso limite, entrambe per difetto.

Se invece per ogni $n \geqq n_0$ è $x_n < X_n$, allora $X_n < X_{n-1}$ e in questo caso $\{X_n\}$ è definitivamente decrescente a partire da $n = n_0$. Per la (2.6) $X_n \to L$, ma, mentre $x_n \to L$ per difetto, $X_n \to L$ per eccesso.

2°) Sia $\{x_n\}$ definitivamente monotona non crescente. Considerazioni perfettamente simmetriche a quelle fatte nel caso 1°) completano la dimostrazione del teorema.

Esempi.

I) Sia $x_0 = 1$, $x_n = -\dfrac{1}{n!}$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$. Risulta

$$X_0 = 1\,, \quad X_1 = 0\,, \quad X_2 = -\frac{1}{6}\,, \quad X_3 = -\frac{1}{6} = x_3\,, \quad X_4 = -\frac{17}{120} < x_4 = -\frac{1}{4!}\,,$$

$$X_5 = -\frac{43}{360} < x_5 = -\frac{1}{5!}\,, \ldots, \quad X_N = \left(-\sum_2^N \frac{1}{n!}\right)\Big/(N+1) < \frac{2-e}{N+1} < 0\,, \ldots .$$

La successione $\{x_n\}$ è monotona crescente a partire da $n=2$; la successione $\{X_n\}$ è monotona crescente a partire da $n=4$. È $x_n \to 0-$, $X_n \to 0-$: questo esempio illustra la prima possibilità contemplata nel caso 1°, $b)$ [cioè che esista un indice $\nu \geqq n_0$ tale che $x_\nu \geqq X_\nu$]; qui si ha infatti $x_3 = X_3$, $x_4 > X_4$, ecc..

II) Sia $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_n = -\dfrac{1}{n!}$ per $n = 2, 3, 4, \ldots$. Risulta

$$X_0 = 0\,, \quad X_1 = \frac{1}{2}\,, \quad X_2 = \frac{1}{6}\,, \quad X_3 = \frac{1}{12}\,,$$

$$X_4 = \frac{7}{120}\,, \ldots, \quad X_N = \left(1 - \sum_2^N \frac{1}{n!}\right)\Big/(N+1) > \frac{3-e}{N+1} > 0, \ldots .$$

La successione $\{x_n\}$ è monotona crescente a partire da $n=3$; la successione $\{X_n\}$ è invece monotona decrescente a partire da $n=2$. È $x_n \to 0-$, $X_n \to 0+$: questo esempio illustra la seconda possibilità contemplata nel caso 1°, $b)$ [cioè che per ogni $n \geqq n_0$ sia $x_n < X_n$]; qui si ha infatti $x_n < X_n$ per ogni $n \geqq 2$.

Nel seguito faremo uso del seguente

Lemma 1°. a) *Sia $\{X_n\}$ definitivamente monotona non decrescente. Allora (indicando a ed A numeri indipendenti da n):*

1°) *se* $0 < \alpha_n \leqq A$,
da $X_n \to +\infty$ *segue* $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$;
da $X_n \to L$ *(finito) segue* $\underline{\lim}\, x_n = L$, $x_n = o(n)$; $\underline{\lim}\, y_n = L$, $y_n = o(n)$;

2°) *se* $0 < a \leqq \alpha_n \leqq A$,
da $y_n \to +\infty$ *segue* $X_n \to +\infty$, $x_n \to +\infty$;
da $y_n \to L$ *(finito) segue* $X_n \to L$, $x_n \to L$.
(Il caso $y_n \to -\infty$ non si può presentare).

b) *Sia* $\{X_n\}$ *definitivamente monotona non crescente. Allora (indicando* a *ed* A *numeri indipendenti da* n*):*

1°) *se* $0 < \alpha_n \leqq A$,
da $X_n \to -\infty$ *segue* $x_n \to -\infty$, $y_n \to -\infty$;
da $X_n \to L$ *(finito) segue* $\overline{\lim}\, x_n = L$, $x_n = o(n)$; $\overline{\lim}\, y_n = L$, $y_n = o(n)$;

2°) *se* $0 < a \leqq \alpha_n \leqq A$,
da $y_n \to -\infty$ *segue* $X_n \to -\infty$, $x_n \to -\infty$;
da $y_n \to L$ *(finito) segue* $X_n \to L$, $x_n \to L$.
(Il caso $y_n \to +\infty$ non si può presentare).

Dimostrazione. Dimostriamo la parte a) del Lemma:

1°) Per ipotesi esiste un indice n_0 tale che per ogni $n \geqq n_0$ si ha $X_n \geqq X_{n-1}$ e, per le (3.4), $x_n \geqq X_n$, $y_n \geqq X_n$. Allora, se $X_n \to +\infty$ è anche $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$; se $X_n \to L$ è $\underline{\lim}\, x_n \geqq L$ e $\underline{\lim}\, y_n \geqq L$; tenendo presente la (2.6) risulta $\underline{\lim}\, x_n = L$. Dalla relazione

$$y_n = X_n + \alpha_n(x_n - X_n)\,, \tag{6.1}$$

osservando che, per una conveniente successione $\{x_\nu\}$ di indici $n = \nu$ per cui $x_\nu \to L$, si ha $x_\nu = L - \xi_\nu$, $X_\nu = L - \eta_\nu$, $(\xi_\nu \to 0,\ \ \eta_\nu \to 0+)$, $X_\nu \to L$, $x_\nu - X_\nu \to 0$, risulta $y_\nu \to L$, e quindi $\underline{\lim}\, y_n = L$. Consideriamo la differenza $X_n - X_{n-1}$; si ha, con semplici calcoli,

$$X_n - X_{n-1} = \frac{x_n - X_{n-1}}{n+1}\,.$$

Poichè $X_n \to L$ è $X_n - X_{n-1} \to 0$ e quindi $x_n - X_{n-1} = o(n)$, da cui $x_n = o(n)$; dalla (6.1) segue ancora $y_n = o(n)$.

2°) Sia $y_n \to +\infty$. Se fosse $X_n \to L$ (finito), essendo, per $n \geqq n_0$, $X_n \geqq X_{n-1}$, dalla (6.1) seguirebbe, per la parte a), 1°) del Lemma, $\underline{\lim}\, y_n = L$, contro l'ipotesi; dunque $X_n \to +\infty$. Poichè per $n \geqq n_0$ è $x_n \geqq X_n$, si ha anche

$x_n \to +\infty$. (Essendo poi, per $n \geqq n_0$, $y_n \geqq X_n$, ne segue che il caso $y_n \to -\infty$ non si può presentare.)

Sia ora $y_n \to L$ (finito). Per $n \geqq n_0$ risulta $X_n \geqq X_{n-1}$ e, per le (3.4), $y_n \geqq X_n$, $x_n \geqq X_n$: ne segue che la successione $\{X_n\}$ è limitata superiormente e che è $X_n \to M \leqq L$. Dimostriamo che è $M = L$. Per la (2.6) è $\underline{\lim}\, x_n \leqq \leqq M \leqq \overline{\lim}\, x_n$, ma $x_n \geqq X_n$ (per $n \geqq n_0$) e quindi $\underline{\lim}\, x_n = M \leqq L$. Dalla (6.1), tenendo conto che esiste una successione di valori n' dell'indice n pei quali $x_{n'} \to M$ e passando al limite lungo la successione $\{x_{n'}\}$, ricordando che $y_{n'} \to L$, $\alpha_{n'} \leqq A$, $x_{n'} - X_{n'} \to 0$, risulta $y_{n'} - X_{n'} \to 0$, ossia $L - M = 0$: pertanto $X_n \to L$. Consideriamo adesso la successione $\{n''\}$ dei valori di n lungo la quale $\{x_{n''}\}$ tende al massimo limite, cioè $x_{n''} \to \overline{\lim}\, x_n$ e sia $\overline{\lim}\, x_n = L + c$, $(c \geqq 0)$. Allora dall'eguaglianza $y_{n''} - X_{n''} = \alpha_{n''}(x_{n''} - X_{n''})$, passando al limite si ha $\alpha_{n''}(x_{n''} - X_{n''}) \to 0$ ed essendo $\alpha_{n''} \geqq a > 0$, risulta $x_{n''} - X_{n''} \to 0$ ed è quindi $c = 0$ e $\overline{\lim}\, x_n = L$. Si ha in definitiva $x_n \to L$.

La parte a) del Lemma risulta così completamente dimostrata.

Analogamente si dimostra la parte b).

7. – Successioni qualunque: elementi sopramediani, mediani e sottomediani. Tratti ascendenti e tratti discendenti.

Definizione. Un elemento x_n della successione $\{x_n\}$ si dirà *sopramediano*, *mediano*, *sottomediano*, secondo che rispettivamente è

$$x_n > X_n\,, \qquad x_n = X_n\,, \qquad x_n < X_n\,.$$

Denoteremo con p, m, q i valori dell'indice n corrispondenti rispettivamente ad elementi x_n sopramediani, mediani o sottomediani; pertanto, in base alle (3.4), possiamo scrivere:

$$\begin{array}{lcccl} x_p > X_p & \Longleftrightarrow & y_p > X_p & \Longleftrightarrow & X_p > X_{p-1}\,, \\ x_m = X_m & \Longleftrightarrow & y_m = X_m & \Longleftrightarrow & X_m = X_{m-1}\,, \\ x_q < X_q & \Longleftrightarrow & y_q < X_q & \Longleftrightarrow & X_q < X_{q-1}\,, \end{array}$$

Osservazioni. Se due o più elementi x_n consecutivi sono mediani, essi sono eguali: infatti se x_m e x_{m+1} sono mediani, per le (3.4) risulta $x_{m+1} = = X_{m+1} = X_m = x_m$.

Se la successione $\{X_n\}$ è definitivamente monotona, allora la classe degli indici q oppure la classe degli indici p (una almeno delle due) è vuota o costituita di un numero finito di elementi.

oppure, per $Q \leqq n \leqq P$ risulta

$$X_Q \leqq X_n \leqq X_P ;$$

4°) per le (3.4) è

(7.1) $$x_p > X_p > X_{p-1} , \qquad y_p > X_p ,$$

(7.2) $$x_m = X_m = X_{m-1} , \qquad y_m = X_m ,$$

(7.3) $$x_q < X_q < X_{q-1} , \qquad y_q < X_Q ;$$

5°) fissato un X_p, o esso è un X_P, oppure l'estremo finale X_P del tratto ascendente al quale esso appartiene è tale che $X_p < X_P$; è in ogni caso $X_p \leqq X_{P(p)}$; analogamente è $X_q \geqq X_{Q(q)}$;

6°) fissato un indice m, se esso è interno ad una coppia separatrice (cioè se $P < m < q$, oppure $Q < m < p$), si ha, per le (7.1), (7.2), (7.3),

(7.4) $$X_P = X_m > X_q , \quad \text{oppure} \quad X_Q = X_m < X_p ,$$

(7.5) $$x_P > x_m > x_q , \quad \text{oppure} \quad x_Q < x_m < x_p ,$$

(7.6) $$y_P > y_m > y_q , \quad \text{oppure} \quad y_Q < y_m < y_p ;$$

se esso è interno ad un tratto ascendente (cioè se $p < m < P$) ed è $Q < p < < m < P$, si ha

(7.7) $$X_Q < X_p \leqq X_m < X_P , \qquad x_Q < x_m < x_P , \qquad y_Q < y_m < y_P ;$$

se, infine, è interno ad un tratto discendente (cioè se $q < m < Q$) ed è $P < q < < m < Q$, si ha

(7.8) $$X_P > X_q \geqq X_m > X_Q , \qquad x_P > x_m > x_Q , \qquad y_P > y_m > y_Q .$$

8. – Alcuni lemmi sulle sucessioni non definitivamente monotone.

Dalle precedenti osservazioni seguono immediatamente i seguenti altri lemmi:

Lemma 2°. *Se la successione $\{X_n\}$ non è definitivamente costante, cioè se per n abbastanza grande non è $X_n = x_n$, allora il massimo limite e il minimo limite di ciascuna delle tre successioni $\{x_n\}$, $\{X_n\}$, $\{y_n\}$ non si alterano se in esse* *si sopprimono tutti gli elementi di indice m, cioè, nel caso che esistano infiniti indici m, si ha:*

$$\underline{\lim}\, x_n \leqq \underline{\lim}\, x_m \leqq \overline{\lim}\, x_m \leqq \overline{\lim}\, x_n \ ,$$

$$\underline{\lim}\, X_n \leqq \underline{\lim}\, X_m \leqq \overline{\lim}\, X_m \leqq \overline{\lim}\, X_n \ ,$$

$$\underline{\lim}\, y_n \leqq \underline{\lim}\, y_m \leqq \overline{\lim}\, y_m \leqq \overline{\lim}\, y_n \ .$$

Dimostrazione. Segue subito osservando che, in forza delle (7.4), (7.5), (7.6), (7.7), (7.8), ogni x_m, X_m, y_m si trova compreso fra valori di x_n, X_n, y_n muniti di indice di tipo diverso da m (e diverso fra loro).

Lemma 3°. *Risulta*

$$\underline{\lim}\, X_n = \underline{\lim}\, X_q = \underline{\lim}\, X_Q \ , \tag{8.1}$$

$$\overline{\lim}\, X_n = \overline{\lim}\, X_p = \overline{\lim}\, X_P \ . \tag{8.2}$$

Dimostrazione. Poichè $\{X_Q\}$ è parte di $\{X_q\}$ e questa è parte di $\{X_n\}$, è evidentemente

$$\underline{\lim}\, X_n \leqq \underline{\lim}\, X_q \leqq \underline{\lim}\, X_Q \ . \tag{8.3}$$

Per provare che $\underline{\lim}\, X_q = \underline{\lim}\, X_Q$ osserviamo che ogni q o è un Q oppure è seguito da $Q(q)$ per il quale $X_q > X_{Q(q)}$. Da ciò e dalla (8.3) segue

$$\underline{\lim}\, X_q = \underline{\lim}\, X_Q \ . \tag{8.4}$$

Per completare la dimostrazione della (8.1) osserviamo che esistono infiniti indici P e Q e se $P \leqq n \leqq Q$ (P, Q consecutivi) è anche $X_n \geqq X_Q$; se poi $Q \leqq n \leqq P$ (Q, P consecutivi) è ancora $X_Q \leqq X_n$. Tenuto conto della (8.3) si ha quindi

$$\underline{\lim}\, X_n = \underline{\lim}\, X_Q \ . \tag{8.5}$$

Dalle (8.4), (8.5) segue la (8.1).

Analogamente si dimostra la (8.2).

Lemma 4°. *Risulta*

$$\underline{\lim}\, x_q = \underline{\lim}\, x_n \leqq \overline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_p \ , \tag{8.6}$$

$$\underline{\lim}\, y_q = \underline{\lim}\, y_n \leqq \overline{\lim}\, y_n = \overline{\lim}\, y_p \ . \tag{8.7}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la parte sinistra della (8.6). Ogni q è un n e quindi $\underline{\lim}\, x_q \geqq \underline{\lim}\, x_n$: dimostriamo che in questa vale il segno $=$.

Ogni x_m di indice interno ad una coppia separatrice (P, q) o rispettivamente (Q, p) è seguito o rispettivamente preceduto da un $x_q < x_m$ che è l'elemento x_q della coppia separatrice stessa.

Ogni x_m di indice interno ad un tratto discendente è seguito da un $x_q < x_m$ che è l'elemento x_q terminale del tratto.

Ogni x_m di indice interno ad un tratto ascendente (escluso il primo tratto se è ascendente) è tale che per l'indice Q che lo precede risulta $x_Q < x_m$.

Da queste tre osservazioni segue che $\underline{\lim}\, x_q \leqq \underline{\lim}\, x_m$.

Ogni x_p ha il corrispondente X_p che appartiene, per definizione, ad un tratto ascendente e (escludendo il primo tratto se è ascendente) se consideriamo l'indice Q che precede quel p, risulta $X_Q < X_p$ e anche $x_Q < x_p$. Ne segue $\underline{\lim}\, x_Q \leqq \underline{\lim}\, x_p$; ma, essendo $\underline{\lim}\, x_Q \geqq \underline{\lim}\, x_q$, si ha anche $\underline{\lim}\, x_q \leqq \underline{\lim}\, x_p$. Poichè

$$\underline{\lim}\, x_n = \min\,(\underline{\lim}\, x_p,\ \underline{\lim}\, x_m,\ \underline{\lim}\, x_q)\,,$$

ne segue

$$\underline{\lim}\, x_q = \underline{\lim}\, x_n\,,$$

ossia la parte a sinistra della (8.6); analogamente si dimostra la parte a destra.

Per la dimostrazione della (8.7) si procede come per la dimostrazione della (8.6), tenendo conto delle (7.6) e delle ultime delle (7.7) e (7.8).

9. – Confronto fra x_n e y_n.

Per il confronto fra x_n e y_n occorre distinguere i tre casi $0 < \alpha_n < 1$, $\alpha_n = 1$, $1 < \alpha_n$ e anche i tre casi $n = p$, $n = m$, $n = q$. Precisamente, tenuto conto delle (3.6), si ha

a) $0 < \alpha_q < 1 \implies x_q < y_q\,, \quad \alpha_q = 1 \implies x_q = y_q\,, \quad 1 < \alpha_q \implies y_q < x_q\,;$

b) α_m qualunque $\implies x_m = y_m\,,$

c) $0 < \alpha_p < 1 \implies y_p < x_p\,, \quad \alpha_p = 1 \implies x_p = y_p\,, \quad 1 < \alpha_p \implies x_p < y_p\,.$

10. – Dimostrazione dei teoremi e dei corollari enunciati nel n. 5.

Dimostrazione del Teorema A.

Cominciamo col dimostrare la (5.1).

Sia $\{X_n\}$ definitivamente monotona non decrescente: allora per il 1° caso della parte a) del Lemma 1°, è [tanto per $X_n \to L$ (finito), quanto per $X_n \to +\infty$]

$$\underline{\lim}\, y_n = \lim X_n \leqq \overline{\lim}\, y_n$$

e la (5.1) è verificata.

Sia $\{X_n\}$ definitivamente monotona non crescente: la (5.1) è in questo caso immediata conseguenza del 1° caso della parte b) del Lemma 1°.

Sia $\{X_n\}$ non definitivamente monotona: esistono allora infiniti indici q e infiniti indici p e per le (7.3) e (7.1) si ha rispettivamente $y_q < X_q$, $X_p < y_p$, da cui

$$\underline{\lim}\, y_q \leqq \underline{\lim}\, X_q\,, \qquad \overline{\lim}\, X_p \leqq \overline{\lim}\, y_p$$

e anche, per i Lemmi 3° e 4°,

$$\underline{\lim}\, y_n \leqq \underline{\lim}\, X_n\,, \qquad \overline{\lim}\, X_n \leqq \overline{\lim}\, y_n\,.$$

Di qui segue la (5.1), la quale risulta così dimostrata per ogni tipo di successione.

Resta anche provata l'affermazione posta tra parentesi alla fine dell'enunciato del Teorema A: infatti, nel caso in cui la successione $\{X_n\}$ non sia definitivamente monotona, la dimostrazione della (5.1) non ha richiesto l'ipotesi che la successione $\{\alpha_n\}$ sia limitata superiormente.

Le (5.2) sono evidenti, poichè $y_n \to +\infty$ $(y_n \to -\infty)$ implica $X_n \to +\infty$ $(X_n \to -\infty)$ per la (5.1); e d'altronde è $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ $(\underline{\lim}\, x_n = -\infty)$, giacchè x_n non può essere limitato superiormente (inferiormente), essendo la successione $\{X_n\}$ delle medie aritmetiche divergente a $+\infty$ $(-\infty)$.

Il Teorema A risulta così dimostrato.

D i m o s t r a z i o n e del Teorema B.

Cominciamo col dimostrare la parte a sinistra della (5.3): che sia

$$\underline{\lim}\, x_n \leqq \underline{\lim}\, X_n \quad \text{e} \quad \underline{\lim}\, y_n - \frac{\Delta}{\alpha'} \leqq \underline{\lim}\, y_n$$

è ovvio [per la prima vedasi la (2.6)]; è poi $\underline{\lim}\, y_n \leqq \underline{\lim}\, X_n$ per il Teorema A. Resta dunque da dimostrare che è

$$\underline{\lim}\, y_n - \frac{\Delta}{\alpha'} \leqq \underline{\lim}\, x_n\,. \tag{10.1}$$

Consideriamo le due successioni

$$\begin{array}{lllllll} \{x_n\} & x_0\,, & x_1\,, & x_2\,, & x_3\,, & \ldots, & x_n\,, & \ldots, \\ \{X_n - X_{n-1}\} & & X_1 - X_0\,, & X_2 - X_1\,, & X_3 - X_2\,, & \ldots, & X_n - X_{n-1}\,, & \ldots, \end{array}$$

con gli elementi in corrispondenza e consideriamo il segno $+$, 0, $-$ dell'elemento $X_n - X_{n-1}$ della seconda: ebbene, tale segno è $+$, 0, $-$ secondochè n è p, m, q; pertanto tale segno costituisce l'indicatore per distinguere il tipo del posto n.

Si dice *variazione* il susseguirsi di due segni opposti, quando si trascurino gli eventuali 0 interposti; si dice *permanenza* il susseguirsi di due segni eguali, quando si trascurino gli eventuali 0 interposti.

Si dice che due elementi x_p, x_q, oppure x_q, x_p costituiscono una *coppia separatrice* quando ad essi corrisponde una variazione nella successione $\{X_n - X_{n-1}\}$; due tali elementi sono consecutivi oppure separati da uno o più elementi x_m.

Per le osservazioni che precedono, ogni successione non definitivamente monotona presenta infinite coppie separatrici.

Due coppie separatrici consecutive hanno elementi x_n con indici del tipo (p, q), (q', p'), oppure (q, p), (p', q') (è eventualmente $q' = q$, oppure $p' = p$).

È pertanto consistente la seguente

Definizione. Si dice *tratto ascendente di* $\{X_n\}$ un insieme di elementi consecutivi

$$X_p\,, \quad X_{p+1}\,, \quad X_{p+2}\,, \quad \ldots, \quad X_{p'}\,,$$

tali che p e p' (eventualmente coincidenti) siano due indici p e p' di due coppie separatrici consecutive (q, p), (p', q'): nel caso in cui all'indice p non preceda alcun indice q, p risulta l'indice del primo elemento sopramediano e (p', q') è la prima coppia separatrice.

Se $p' > p$ si verifica in ogni caso

$$X_p \leqq X_{p+1} \leqq \ldots \leqq X_{p'-1} < X_{p'}\,.$$

Il tratto è costituito da un solo elemento se e soltanto se $p' = p$.

In corrispondenza ciascuno degli elementi consecutivi x_p, $x_{p+1}, \ldots, x_{p'}$ risulta sopramediano o mediano: e più precisamente x_p e $x_{p'}$ (eventualmente coincidenti) sono necessariamente sopramediani. Se $p' > p$ il tratto ascendente corrisponde in sostanza ad un tratto di permanenze $(+, +)$.

Analogamente diamo quest'altra

Definizione. Si dice *tratto discendente di* $\{X_n\}$ un insieme di elementi consecutivi

$$X_q, \quad X_{q+1}, \quad X_{q+2}, \quad \dots, \quad X_{q'}$$

tali che q e q' (eventualmente coincidenti) siano due indici q e q' di due coppie separatrici consecutive (p, q), (q', p'): nel caso in cui all'indice q non preceda alcun indice p, q risulta l'indice del primo elemento sottomediano e (q', p') è la prima coppia separatrice.

Se $q' > q$ si verifica in ogni caso

$$X_q \geqq X_{q+1} \geqq \dots \geqq X_{q'+1} > X_{q'}.$$

Il tratto è costituito da un solo elemento se e soltanto se $q' = q$.

In corrispondenza ciascuno degli elementi consecutivi $x_q, x_{q+1}, \dots, x_{q'}$ risulta sottomediano o mediano: e più precisamente x_q e $x_{q'}$ (eventualmente coincidenti) sono necessariamente sottomediani. Se $q' > q$ il tratto discendente corrisponde ad un tratto di permanenze (—, —).

Osserviamo che l'insieme dei tratti ascendenti e dei tratti discendenti di $\{X_n\}$ così definiti non esaurisce, in generale, la successione $\{X_n\}$: restano infatti esclusi gli eventuali tratti stazionari (cioè costituiti di elementi X_m di $\{X_n\}$ ai quali corrispondono elementi mediani x_m di $\{x_n\}$) compresi ciascuno fra due tratti di tipo diverso. In altri termini possiamo dire che tali tratti corrispondono a segni zero compresi fra segni opposti della successione $\{X_n - X_{n-1}\}$. L'esclusione dei detti tratti stazionari non porterà però ad alcun inconveniente per le applicazioni che seguiranno.

Denoteremo con P e rispettivamente con Q gli indici degli elementi terminali dei tratti ascendenti e rispettivamente discendenti.

Pertanto ad ogni elemento x_p o x_q della successione $\{x_n\}$ viene a corrispondere, con una ben determinata legge, rispettivamente un elemento x_P $[P = P(p)]$ o x_Q $[Q = Q(q)]$, corrispondenti rispettivamente all'elemento X_P o X_Q terminale del tratto al quale appartiene rispettivamente X_p o X_q.

Si vede ovviamente quanto segue:

1°) x_P e x_Q sono i primi elementi di ogni coppia separatrice: per le successioni non definitivamente monotone gli elementi di ciascuno di questi due tipi sono infiniti;

2°) per due indici P e Q consecutivi risulta sempre $X_P > X_Q$ (sia quando X_P precede, sia quando X_P segue);

3°) per ogni indice n compreso fra due indici P e Q consecutivi (in questo ordine), cioè per $P \leqq n \leqq Q$, risulta

$$X_P \geqq X_n \geqq X_Q;$$

Dalla (2.3) si ha

$$x_n = X_n - \frac{1}{\alpha_n}(X_n - y_n) \ ;$$

passando qui al minimo limite e tenendo presente che per il Teorema A è, come si è già ricordato, $\underline{\lim}\, X_n \geqq \underline{\lim}\, y_n$, risulta

$$\underline{\lim}\, x_n \geqq \underline{\lim}\, X_n - \overline{\lim} \left\{ \frac{1}{\alpha_n}(X_n - y_n) \right\}.$$

Per ciò che riguarda il $\overline{\lim}$ al secondo membro osserviamo che $1/\alpha_n > 0$, mentre

$$\overline{\lim}\,(X_n - y_n) \leqq \overline{\lim}\, X_n - \underline{\lim}\, y_n \, ,$$

e quest'ultima differenza è $\geqq 0$ per la (5.1); pertanto

$$\underline{\lim}\, x_n \geqq \underline{\lim}\, X_n - \frac{1}{\alpha'}(\overline{\lim}\, X_n - \underline{\lim}\, y_n) \, . \tag{10.2}$$

Di qui, tenendo presente la (5.1), discende

$$\underline{\lim}\, y_n - \frac{1}{\alpha'}(\overline{\lim}\, y_n - \underline{\lim}\, y_n) \leqq \underline{\lim}\, X_n - \frac{1}{\alpha'}(\overline{\lim}\, X_n - \underline{\lim}\, y_n) \ ;$$

da ciò e dalla (10.2) segue la (10.1).

Per simmetria vale anche la parte a destra della (5.3), la quale risulta così completamente dimostrata.

Osserviamo che nel dimostrare la parte a destra della (5.3) si trova la relazione [come corrispondente a destra della (10.2)]

$$\overline{\lim}\, x_n \leqq \overline{\lim}\, X_n + \frac{1}{\alpha'}(\overline{\lim}\, y_n - \underline{\lim}\, X_n) \, , \tag{10.3}$$

che assieme alla (10.2) considereremo nel seguito.

Dimostriamo ora la (5.4).

Consideriamo i seguenti casi:

a) Sia $\{X_n\}$ definitivamente monotona: allora la (5.4) è verificata per il Lemma 1°. Infatti, se $\{X_n\}$ è definitivamente monotona non decrescente, risulta, per il 1° caso della parte a) del Lemma 1°, [tanto per $X_n \to L$ (finito), quanto per $X_n \to +\infty$]

$$\underline{\lim}\, y_n = \underline{\lim}\, x_n = \lim X_n \leqq \begin{cases} \overline{\lim}\, x_n \\ \overline{\lim}\, y_n \end{cases},$$

e rimane soltanto da confrontare questi due ultimi massimi limiti. A tale scopo scriviamo

$$y_n = x_n + (\alpha_n - 1)(x_n - X_n) ;$$

dall'ipotesi fatta su $\{X_n\}$ risulta definitivamente $x_n \geqq X_n$, ed essendo pure definitivamente $\alpha_n \geqq 1$ si ha $\overline{\lim}\, x_n \leqq \overline{\lim}\, y_n$: la (5.4) è così verificata in questo caso.

Analogo ragionamento vale nel caso in cui $\{X_n\}$ sia definitivamente monotona non crescente.

b) Sia $\{X_n\}$ non definitivamente monotona: esistono allora infiniti indici q ed infiniti indici p e possiamo scrivere

$$y_q = x_q + (\alpha_q - 1)(x_q - X_q) , \qquad y_p = x_p + (\alpha_p - 1)(x_p - X_p) ;$$

da queste, essendo $x_q < X_q$ e $x_p > X_p$ e tenendo presente che è definitivamente $\alpha_n \geqq 1$, risulta

$$\underline{\lim}\, y_q \leqq \underline{\lim}\, x_q \leqq \overline{\lim}\, x_p \leqq \overline{\lim}\, y_p .$$

Da queste ultime, tenendo presente il Lemma 4°, segue la (5.4), la quale risulta così dimostrata per ogni tipo di successione.

Dimostriamo la (5.5): cominciamo col dimostrarne la parte a sinistra, ossia

$$\underline{\lim}\, y_n \geqq \underline{\lim}\, x_n . \tag{10.4}$$

Consideriamo i seguenti casi:

a) Sia $\{X_n\}$ definitivamente monotona non decrescente; allora è definitivamente $x_n \geqq X_n$ e quindi ogni n abbastanza grande è un p oppure un m: se ogni n abbastanza grande è un m, allora si ha definitivamente $X_n = x_n$ e quindi $y_n = x_n$ e la (10.4) è verificata; in caso contrario, tenendo presente il 1° caso della parte a) del Lemma 1°, si ha [tanto per $X_n \to L$ (finito), quanto per $X_n \to +\infty$] $\underline{\lim}\, y_n = \underline{\lim}\, x_n$ e la (10.4) è ancora verificata.

b) Sia $\{X_n\}$ definitivamente monotona non crescente; allora è definitivamente $x_n \leqq X_n$ e quindi ogni n abbastanza grande è un q oppure un m: se ogni n abbastanza grande è un m, allora è definitivamente $y_n = x_n$ e la

(10.4) è verificata; in caso contrario esistono infiniti q per i quali, ricordando che è definitivamente $\alpha_n \leqq 1$ e tenendo presente il caso a) del n. **9**, si ha

$$y_q \geqq x_q \tag{10.5}$$

e quindi $\underline{\lim}\, y_q \geqq \underline{\lim}\, x_q$, da cui, per il Lemma 4°, segue la (10.4).

c) Sia $\{X_n\}$ non definitivamente monotona: allora esistono infiniti indici q e dalla (10.5) si ricava la (10.4) come nel caso b) precedente.

Con considerazioni perfettamente simmetriche si dimostra la parte a destra della (5.5).

Proviamo infine l'affermazione fatta alla fine dell'enunciato del Teorema B, relativa alla sostituzione dei membri estremi della (5.3) rispettivamente con le espressioni (5.6). Basterà osservare che nell'ipotesi che sia definitivamente $\alpha_n \leqq 1$ vale la (5.5): da ciò e dalle (10.2) e (10.3) segue l'asserto.

Il Teorema B è così completamente dimostrato.

Dimostrazione del Teorema C.

Il Teorema C si ottiene facilmente dal Teorema A nelle ipotesi (5.7). Infatti la (5.1) del Teorema A, ponendo, in base alla (2.5), $y_n = \alpha_n v_n$, si scrive

$$\underline{\lim}\,(\alpha_n v_n) \leqq \underline{\lim}\, X_n \leqq \overline{\lim}\, X_n \leqq \overline{\lim}\,(\alpha_n v_n)\,. \tag{10.6}$$

Nelle ipotesi $0 < \alpha_n \leqq A$ (da cui $\overline{\lim}\,\alpha_n \leqq A$) e $\underline{\lim}\; v_n \leqq 0$, si ha

$$\underline{\lim}\,(\alpha_n v_n) \geqq \overline{\lim}\,\alpha_n \cdot \underline{\lim}\, v_n \geqq A\, \underline{\lim}\, v_n$$

e quindi la parte a sinistra della (10.6) si può sostituire con

$$A\, \underline{\lim}\, v_n \leqq \underline{\lim}\, X_n\,. \tag{10.7}$$

Nelle ipotesi $0 < \alpha_n \leqq A$ e $\overline{\lim}\, v_n \geqq 0$, si ha

$$\overline{\lim}\,(\alpha_n v_n) \leqq \overline{\lim}\,\alpha_n \cdot \overline{\lim}\, v_n \leqq A\, \overline{\lim}\, v_n$$

e quindi la parte a destra della (10.6) si può sostituire con

$$\overline{\lim}\, X_n \leqq A\, \overline{\lim}\, v_n\,. \tag{10.8}$$

Dalle (10.7) e (10.8) segue la (5.8). Il Teorema C è così dimostrato.

Dimostrazione del Teorema D.

Cominciamo con l'osservare che, essendo $v_n \to 0$ e $\beta_n > cn$, risulta [vedasi (2.4)] $\alpha_n = 1/(1+\beta_n)$ limitato e quindi ci troviamo nelle ipotesi del Teorema C ed è $X_n \to 0$. Inoltre, tenendo presente la (2.4) e la (3.1), risulta $x_n = v_n - \beta_n X_n$, $x_n = (n+1)X_n - nX_{n-1}$; pertanto $v_n \to 0$, $nX_n \to 0$ implica $x_n \to 0$; mentre $v_n \to 0$, $x_n \to 0$ implica $\beta_n X_n \to 0$, $nX_n \to 0$.

Distinguiamo due casi:

1º) Sia $\{X_n\}$ definitivamente monotona; si può supporre definitivamente non crescente e quindi $X_n \to 0+$, $X_n \geqq 0$ per $n \geqq \nu$ conveniente; sommando per $h = 0, 1, 2, \ldots, n$ l'espressione di v_n, otteniamo:

$$\sum_{h=0}^{n} v_h = \sum_{h=0}^{n} x_h + \sum_{h=0}^{n} \beta_h X_h = (n+1)X_n + \sum_{h=0}^{\nu} \beta_h X_h + \sum_{h=\nu+1}^{n} \beta_h X_h ,$$

$$\sum_{h=0}^{n} v_h \geqq (n+1)X_n + C + c\sum_{h=\nu+1}^{n} hX_h , \qquad (C \gtreqless 0, \text{ indipendente da } n),$$

$$\sum_{h=0}^{n} v_h \geqq (n+1)X_n + C + cX_n \sum_{h=\nu+1}^{n} h = (n+1)X_n + C + c\left\{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\nu(\nu+1)}{2}\right\} X_n ,$$

$$\sum_{h=0}^{n} v_h \geqq \left\{\frac{c}{2} n^2 + \left(\frac{c}{2}+1\right) n + 1 - c\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right\} X_n + C .$$

Per n abbastanza grande risulta $0 < \frac{c}{2} n^2 X_n < \sum_{h=0}^{n} v_h - C$, e poichè $v_n \to 0$, $C/n \to 0$, segue $(\sum_{h=0}^{n} v_h)/n \to 0$ ed anche $nX_n \to 0$. Il Teorema D è così stabilito per le successioni $\{x_n\}$ per le quali $\{X_n\}$ è definitivamente monotona.

2º) Sia $\{X_n\}$ non definitivamente monotona; allora esistono infiniti indici p ed infiniti indici q (vedasi n. 7) ed è, per il Lemma 4º, $\underline{\lim}\, x_q = \underline{\lim}\, x_n \leqq \leqq \overline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_p$, e basterà dimostrare che

$$\overline{\lim}\, x_p \leqq 0 , \qquad \underline{\lim}\, x_q \geqq 0 , \tag{10.9}$$

perchè allora necessariamente $x_n \to 0$.

Distinguiamo gli indici p nelle tre classi p', p'', p''' (qualcuna eventualmente finita o vuota) tali che sia $x_{p'} > X_{p'} \geqq 0$, $x_{p''} > 0 > X_{p''}$, $0 > x_{p'''} > X_{p'''}$, e analogamente distinguiamo gli indici q nelle tre classi q', q'', q''' (qualcuna eventualmente finita o vuota) tali che sia $x_{q'} < X_{q'} \leqq 0$, $x_{q''} < 0 < X_{q''}$, $0 < x_{q'''} < X_{q'''}$. La prima delle (10.9) sarà stabilita quando avremo mostrato che

$$\overline{\lim}\, x_{p'} \leqq 0 , \qquad \overline{\lim}\, x_{p''} \leqq 0 , \qquad \overline{\lim}\, x_{p'''} \leqq 0 \tag{10.10}$$

(si intendono soppresse quelle limitazioni attinenti a classi vuote o finite di indici).

Che sia $\overline{\lim}\, x_{p'''} \leqq 0$ è ovvio, poichè $x_{p'''} < 0$.

Che sia $\overline{\lim}\, x_{p'} \leqq 0$ si vede subito, poichè, essendo $x_{p'} > X_{p'} \geqq 0$ e $v_{p'} = x_{p'} + \beta_{p'} X_{p'}$, risulta $0 < x_{p'} \leqq v_{p'}$, $0 \leqq cp'X_{p'} < \beta_{p'} X_{p'}$ e quindi $x_{p'} \to 0$, $p'X_{p'} \to 0$.

Analogamente si ha $\underline{\lim}\, x_{q'} \geqq 0$, $\underline{\lim}\, x_{q'''} \geqq 0$ e anzi, più precisamente, $x_{q'} \to 0$, $q'X_{q'} \to 0$.

Meno facile risulta vedere che $\overline{\lim}\, x_{p''} \leqq 0$, e, a questo scopo, procediamo nel modo seguente.

Consideriamo l'indice Q immediatamente precedente il p'' in esame (supponiamo che questo p'' non appartenga al primo tratto ascendente); questo Q è un Q': infatti, per l'Osservazione 3ª che segue la definizione dei P e dei Q (vedasi n. 7) risulta $Q' + 1 \leqq p''$ e $x_{Q'} < X_{Q'} < X_{p''} < 0 < x_{p''}$.

Si ha

$$\sum_{h=Q'+1}^{p''} v_h = \sum_{h=Q'+1}^{p''} x_h + \sum_{h=Q'+1}^{p''} \beta_h X_h ,$$

ed essendo $X_{Q'+1} \leqq X_h \leqq X_{p''} < 0$ s'ottiene

$$\sum_{h=Q'+1}^{p''} v_h \leqq (p''+1)X_{p''} - (Q'+1)X_{Q'} + \sum_{h=Q'+1}^{p''} \beta_h X_{p''} .$$

Ponendo $V_n = \min\,(v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{n+r}, \ldots)$, risulta

$$(p''-Q')V_{Q'} + (Q'+1)X_{Q'} < \Big\{p'' + 1 + c \sum_{h=Q'+1}^{p''} h\Big\} X_{p''} =$$

$$= \left\{ p'' + 1 + c\,\frac{p''-Q'}{2}\,(p''+Q') + c\,\frac{p''-Q'}{2} \right\} X_{p''} ;$$

dividendo per $p''-Q'$ che è intero positivo, otteniamo

$$V_{Q'} + \frac{Q'+1}{p''-Q'} X_{Q'} < \left\{ \frac{p''+1}{p''-Q'} + \frac{c}{2}\,(p'' + Q' + 1) \right\} X_{p''} < 0 . \tag{10.11}$$

Adesso osserviamo che se esistono infiniti indici p'' esistono anche infiniti Q' ad essi coordinati e per $Q' \to +\infty$ risulta $V_{Q'} \to 0$, $Q'X_{Q'} \to 0$, $\dfrac{Q'+1}{p''-Q'} X_{Q'} \to 0$; l'espressione entro $\{\,\}$ al secondo membro di (10. 11) supera $cp''/2$. Si conclude $p''X_{p''} \to 0$.

Teniamo conto dell'eguaglianza [vedasi (3.1)]

$$x_{p''} = (p''+1)X_{p''} - p''X_{p''-1} ; \tag{10.12}$$

per ciò che precede $(p''+1)X_{p''} \to 0$ e se per infiniti p'' è $Q'=p''-1$, lungo la successione di questi è anche $p''X_{p''-1}=(Q'+1)X_{Q'} \to 0$; se invece $Q'<p''-1$ si può stabilire la disuguaglianza analoga alla (10.11), considerando la somma $\sum v_h$ estesa al campo $Q'+1 \leqq h \leqq p''-1$; pertanto è ancora $(p''-1)X_{p''-1} \to 0$.

La (10.12) ci dà $x_{p''} \to 0$ poichè ognuno dei due termini del secondo membro tende a zero.

Essendo verificate tutte e tre le limitazioni (10.10) vale la prima delle (10.9) e, per simmetria, anche la seconda e risulta dimostrato che $x_n \to 0$ anche per le successioni $\{x_n\}$ per le quali $\{X_n\}$ non è definitivamente monotona.

Dimostrazione del Corollario 1º.

Per ipotesi è $L-c \leqq \underline{\lim}\, y_n \leqq \overline{\lim}\, y_n \leqq L+c$ e risulta pertanto, per la (5.1) del Teorema A, $L-c \leqq \underline{\lim}\, X_n \leqq \overline{\lim}\, X_n \leqq L+c$, da cui la (5.9); inoltre, quando è definitivamente $1 \leqq \alpha_n$, per la (5.4) del Teorema B risulta $L-c \leqq \underline{\lim}\, x_n \leqq \overline{\lim}\, x_n \leqq L+c$, da cui la (5.10); infine quando è definitivamente $\alpha_n \leqq 1$, dal fatto che $\Delta = \overline{\lim}\, y_n - \underline{\lim}\, y_n \leqq 2c$, segue

$$L-\left(1+\frac{2}{\alpha'}\right)c \leqq \underline{\lim}\, y_n - \frac{\Delta}{\alpha'} \leqq \overline{\lim}\, y_n + \frac{\Delta}{\alpha'} \leqq L+\left(1+\frac{2}{\alpha'}\right)c\,;$$

da questa e dalla (5.3) del Teorema B segue la (5.11).

Dimostrazione del Corollario 2º.

La (5.12) è conseguenza immediata della (5.4) del Teorema B, mentre la (5.13) è conseguenza della (5.3) del Teorema B, nella quale il primo e l'ultimo membro siano sostituiti rispettivamente con la prima e con la seconda delle (5.6). Infatti, per la parte a sinistra, si ha

$$\underline{\lim}\, X_n - \frac{1}{\alpha'}(\overline{\lim}\, X_n - \underline{\lim}\, y_n) \geqq L-b-\frac{1}{\alpha'}(L+b-L+c) = \\ = L-\left[b+\frac{1}{\alpha'}(b+c)\right],$$

da cui segue la parte a sinistra della (5.13). Analogamente si deduce la parte a destra.

Dimostrazione del Corollario 3º.

La (5.14) è conseguenza immediata della (5.4) del Teorema B, mentre la (5.15) è conseguenza della (5.3) del Teorema B, nella quale i membri estremi siano anche qui sostituiti con le (5.6). Infatti, per la parte a sinistra, si ha

$$\underline{\lim}\, X_n - \frac{1}{\alpha'}(\overline{\lim}\, X_n - \underline{\lim}\, y_n) \geqq L+\frac{1}{\alpha'}(M-L-c)\,,$$

da cui segue la parte a sinistra della (5.15). Analogamente si deduce la parte a destra.

Bibliografia.

[1] G. H. HARDY, *Generalizations of a limited theorem of Mr. Mercer*, Quart. J. Math., Oxford Ser. **43**, 143-150 (1912).

[2] G. H. HARDY, *Divergent Series*, Oxford 1949.

[3] K. KNOPP, *Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn I. Schur*, Math. Ann. **74**, 459-461 (1913).

[4] J. MERCER, *On the limits of real variants*, Proc. London Math. Soc. (2) **5**, 206-224 (1907).

[5] T. VIJAYARAGHAVAN, *A generalization of a theorem of Mercer*, J. London Math. Soc. **3**, 130-134 (1928).

[6] E. T. COPSON and W. L. FERRAR, *Notes on the structure of sequences* (I), J. London Math. Soc. **4**, 258-264 (1929).