Rivista Mat. Univ. Parma 4, 241-254 (1953)

GIORGIO SESTINI (*)

Sulla regolarità dei moti unidimensionali di un mezzo continuo disgregato.

1. - Introduzione.

Recentemente ho avuto occasione di prendere ancora in esame lo studio del moto di un mezzo materiale continuo, disgregato nel senso di LEVI-CIVITA [1] ([1]), la cui determinazione, in dipendenza da opportune ipotesi, si può ricondurre alle quadrature.

Nello studio di un tale moto ha particolare interesse ed importanza la ricerca delle condizioni iniziali che possano assicurare la regolarità del moto con riferimento alla densità del mezzo, nel senso che questa non deve mai diventare infinita nell'intervallo di tempo in cui il moto viene considerato. Quando infatti tale regolarità venisse a cessare con essa cadrebbe di necessità l'ipotesi che il mezzo sia disgregato, ipotesi che del resto verrà sicuramente a cadere assai prima che la densità diventi infinita.

Tale *regolarità* era stata discussa dal LEVI-CIVITA [1] per i moti *per piani paralleli,* in un caso particolare da me [4] per i moti *per sfere concentriche,* mentre rimaneva da discuterla nel caso dei moti *per cilindri rotondi coassiali* considerati dal TONOLO [5].

Avendo potuto stabilire un metodo semplice, applicabile a tutti e tre i casi ora ricordati, non mi è parso inutile farne oggetto di questa Nota, in quanto resta così completato il gruppo di ricerche sopra ricordate.

(*) Prof. o. della Università di Parma. Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

([1]) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

2. - Richiami.

Un mezzo materiale continuo si chiama *disgregato* quando si possono trascurare le forze agenti sulla unità di volume, dovute agli sforzi interni nei confronti delle forze specifiche di massa.

Le equazioni che reggono il moto di un mezzo disgregato sono ancora quelle classiche dei mezzi continui, salvo che in esse non compaiono più gli sforzi interni e che la distribuzione delle masse è legata al moto soltanto dalla equazione di continuità.

Nell'ipotesi di cercare soluzioni particolari delle equazioni di moto dipendenti soltanto da una coordinata spaziale, oltre che dal tempo, il problema della integrazione di tali equazioni viene ricondotto alle quadrature. Come è stato mostrato nei citati lavori, ci troviamo in questo caso particolare quando in un certo istante t_0, assunto come iniziale, la velocità delle singole particelle e la distribuzione della densità del mezzo varino o per piani paralleli ad una giacitura fissa o per sfere concentriche o infine per cilindri rotondi coassiali. Questi tre casi (*moti unidimensionali*), come osserva il TONOLO (2), esauriscono tutte le possibilità di moti dipendenti, oltre che dal tempo, da una sola coordinata spaziale: la distanza da un piano fisso, da un punto fisso, da una retta fissa.

Tralasciando il primo caso completamente trattato e discusso [1], riprenderemo in esame gli altri due casi, supponendo ancor qui il mezzo disgregato distribuito con simmetria sferica (cilindrica) attorno ad un nucleo rigido sferico (cilindrico indefinito) di raggio a.

Con le stesse notazioni dei lavori [4], [5], indicheremo: con $r_0 > a$ la distanza iniziale dal centro (dall'asse) di simmetria della particella di cui si studia il moto; con $r \geqslant a$ la distanza della stessa particella dal centro (dall'asse) all'istante t; con $v_0(r_0)$ il modulo della velocità iniziale della particella considerata; con $\mu_0(r)$ la distribuzione iniziale di densità del mezzo; con $\mu(r, t)$ ciò che è diventata all'istante t la distribuzione iniziale di densità; con m_1 la massa del nucleo rigido sferico (della parte di nucleo rigido cilindrico indefinito compresa tra due piani normali all'asse a distanza unitaria); con m_0 la massa del mezzo disgregato, riempiente, all'istante t, l'involucro sferico (cilindrico di altezza unitaria), compreso tra i raggi a ed r.

Il principio della conservazione della massa fornisce nei due casi, sferico

(2) Cfr. [5], pag. 206.

e cilindrico, per m_0 l'espressione (3):

$$(1)\qquad \begin{cases} m_0 = 4\pi \displaystyle\int_a^r \mu(\xi, t)\xi^2\,d\xi = 4\pi \int_a^{r_0} \mu_0(\xi)\xi^2\,ds\,, & (\textit{caso sferico})\;; \\[2ex] m_0 = 2\pi \displaystyle\int_a^r \mu(\xi, t)\xi\,d\xi = 2\pi \int_a^{r_0} \mu_0(\xi)\xi\,d\xi\,, & (\textit{caso cilindrico})\,. \end{cases}$$

Indicato con $U(r, r_0)$ il potenziale specifico delle forze gravitazionali, uniche agenti sul nostro mezzo, le equazioni del problema, nello schema lagrangiano, si riducono, per entrambi i casi, a

$$(2)\qquad \ddot{r} = \frac{\partial U}{\partial r}\,, \qquad (\textit{equazione di moto});$$

$$(3)\qquad \mu(r, t) = \mu_0(r_0)\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{\partial r_0}{\partial r}\,, \qquad (n = 1, 2)\,, \qquad (\textit{equazione di continuità})\,,$$

$n = 2$ corrispondendo al caso sferico ed $n = 1$ al caso cilindrico.

Alla (2) può sostituirsi, quale suo integrale primo, l'integrale della energia

$$(4)\qquad \dot{r}^2 = f(r, r_0)\,,$$

che, per quadrature, dà

$$(5)\qquad t = t(r, r_0)$$

e quindi

$$(6)\qquad r = r(r_0, t)\,.$$

3. – Il problema della regolarità del moto.

Riguardo alla densità, la regolarità del moto viene a mancare, come abbiamo già rilevato, in tutti quegli istanti $t > t_0$ in cui sia $\mu(r, t) = +\infty$. Per la (5) potremo anche dire che tale regolarità cesserà per tutti gli r, con

---

(3) Cfr. [4], pag. 41; [5], pag. 208.

$a \leqslant r \leqslant r_0$, per cui sia

$$\mu[r, t(r, r_0)] = +\infty .$$

Essendo $\mu_0(r)$ finita e $r \geqslant a$, la (3), per la regolarità di $\mu(r, t)$, richiede che risulti finita la derivata parziale della r rispetto alla r_0 o, ciò che è lo stesso, che in tutti gli istanti dell'intervallo di tempo in cui il moto viene studiato, *non sia*

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = -\frac{\partial t}{\partial r_0} \bigg/ \frac{\partial t}{\partial r} = 0 , \tag{7}$$

la (5) fornendo la possibilità del calcolo effettivo di tale derivata e quindi del suo studio.

Nei paragrafi successivi esamineremo dettagliatamente la regolarità del moto considerato, con riferimento alla densità, rispettivamente nel caso della simmetria sferica e della simmetria cilindrica. Resteranno così determinate le relazioni alle quali devono soddisfare le condizioni iniziali di posizione e velocità, la distribuzione iniziale di densità, il raggio e la massa del nucleo attraente per potere assicurare o meno la regolarità del moto in esame.

4. – La regolarità nel caso di moto con simmetria sferica.

Il mezzo disgregato occupi la regione esterna ad un nucleo rigido sferico di raggio a. Con le notazioni del n. 2, avendosi $U = fm/r$, con $m = m_1 + m_0$ e f costante gravitazionale, posto

$$\alpha = \sqrt{2fm} , \qquad \beta = \frac{v_0^2}{\alpha^2} - \frac{1}{r_0} ,$$

l'equazione (2) assume la forma

$$\pm \dot{r} = \alpha \left(\frac{1}{r} + \beta \right)^{\frac{1}{2}} , \tag{8}$$

valendo il segno $+$ se $\dot{r}(t_0) = \dot{r}_0 > 0$ oppure il segno $-$ se $\dot{r}_0 \leqslant 0$.

È già stato osservato [4] che, in dipendenza dei valori di r_0, $\dot{r}_0$, $\mu_0(r)$, β può risultare positivo, nullo o negativo e che la regolarità del moto, relativamente alla densità può cessare, qualunque sia il segno di β, se $\dot{r}_0 \leqslant 0$ e solo

(4) Cfr. [4], pag. 42.

se $\beta < 0$ quando risulti $\dot{r}_0 > 0$. In questi casi infatti o tutte le particelle, fin dall'istante iniziale, si muovono verso il nucleo ($\dot{r}_0 \leqslant 0$), creando così addensamento di materia, oppure, dopo un iniziale allontanamento dal nucleo ($\dot{r}_0 > 0$), ogni particella, raggiunta la posizione $r = |\beta|^{-1} > r_0$, inverte il suo moto cosicchè, all'istante t^* nel quale la particella passa nuovamente per la posizione r_0, vengono a riprodursi, come facilmente si constata (5), le condizioni del caso $\dot{r}_0 < 0$, $\beta < 0$.

In dipendenza dai segni di $\dot{r}_0$ e di β si devono quindi considerare e discutere i seguenti casi:

$$\dot{r}_0 < 0\,, \quad \beta > 0\,; \qquad \dot{r}_0 < 0\,, \quad \beta = 0\,; \qquad \dot{r}_0 \leqslant 0\,, \quad \beta < 0\,.$$

Tralasceremo il caso $\beta = 0$, che si verifica per $v_0 = \alpha r_0^{-\frac{1}{2}}$, già discusso nel lavoro [4] (6).

Per questo, come fu già rilevato, resta *assicurata la regolarità del moto* ogni qualvolta la distribuzione iniziale di densità del mezzo $\mu_0(r)$ sia tale da soddisfare alla relazione

$$m \geqslant M = \frac{4}{3}\pi\mu_0(r_0)r_0^3\,. \tag{9}$$

Passiamo allora ad esaminare i casi $\dot{r}_0 < 0$, $\beta > 0$ e $\dot{r}_0 \leqslant 0$, $\beta < 0$.

Posto per comodità, nel primo caso, $\beta = \gamma^2$ e $1/r + \gamma^2 = \gamma^2 z^2$, dalla (8) si ottiene per t l'espressione

$$t(r, r_0) = \frac{2}{\alpha\gamma^3}\int\limits_{v_0/(\alpha\gamma)}^{(1/r+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}/\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)^2}\,.$$

Questa, ricordando la (7), ci fornisce per la $\partial r/\partial r_0$ l'espressione

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{r}+\beta\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{3}{2}\frac{\alpha}{r_0^2}\left[1-\frac{M}{m}\left(2\frac{v_0^2}{\alpha^2}r_0+1\right)\right]t(r, r_0)+\varphi(r)\right\}, \tag{10}$$

---

(5) Si ha infatti da (8) $t(r, r_0) = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{\xi}+\beta\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi$ e quindi

$$t^* = \frac{2}{\alpha|\beta|^{\frac{3}{2}}}\left\{\operatorname{arctg}\frac{v_0}{\alpha|\beta|}+\frac{r_0v_0|\beta|}{\alpha}\right\}.$$

Avendosi poi $r(t^*) = r_0$, per (4) si ha anche $\dot{r}(t^*) = -\dot{r}_0$. Con facili calcoli dall'espressione di t, per la (7), si ottiene $\lim\limits_{t\to t^*}\partial r/\partial r_0 = 1$ e quindi infine da (3) $\mu[r(t^*), t^*] = \mu_0(r_0)$.

(6) Cfr. [4], pag. 43.

avendo posto, come in (9), $M = \frac{4}{3}\pi\mu_0(r_0)r_0^3$ e

$$(11) \qquad \varphi(r) = \frac{1}{r_0^2}\left(1 - 3\frac{v_0^2}{\alpha^2}r_0\frac{M}{m}\right)\frac{r}{\sqrt{1/r+\beta}} + \left(3\frac{M}{m} - 1\right)\frac{v_0}{\alpha}\,.$$

Nel secondo caso, posto $\beta = -\gamma^2$ e $1/r - \gamma^2 = \gamma^2 z^2$, sempre dalla (8), si ottiene per t l'espressione

$$t(r, r_0) = \frac{2}{\alpha\gamma^3}\int\limits_{v_0/(\alpha\gamma)}^{(1/r+\beta)^{\frac{1}{2}}/\gamma}\frac{dz}{(z^2+1)^2}\,,$$

e quindi, dalla (7),

$$(12) \qquad \frac{\partial r}{\partial r_0} = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{r}+\beta\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{3}{2}\frac{\alpha}{r_0^2}\left[1 - \frac{M}{m}\left(2\frac{v_0^2}{\alpha^2}r_0 + 1\right)\right]t(r, r_0) + \varphi(r)\right\},$$

formalmente identica alla (10) con la posizione (11), differenziandosi però le due espressioni per il fatto che in (10) è $\beta > 0$ mentre in (12) è $\beta < 0$.

La (12) si semplifica notevolmente nel caso particolare $\dot{r}_0 = 0$, con che $\beta = -(1/r_0) < 0$. Si ha infatti

$$(13) \qquad \frac{\partial r}{\partial r_0} = r_0^{-1}\left\{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{M}{m}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha t + r\right\},$$

nella quale

$$\alpha t(r, r_0) = r_0^{\frac{3}{2}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{r_0}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Mantenendo $-\beta^{-1}(1/r+\beta)^{\frac{1}{2}}$ segno costante (7), per ricercare gli eventuali valori di r dell'intervallo (a, r_0) per i quali è $\partial r/\partial r_0 = 0$, basterà studiare nello stesso intervallo la funzione

$$(14) \qquad \psi(r) = \frac{3}{2}\frac{\alpha}{r_0^2}\left[1 - \frac{M}{m}\left(2\frac{v_0^2}{\alpha^2}r_0 + 1\right)\right]t(r, r_0) + \varphi(r) = \chi(r) + \varphi(r)\,.$$

Osserveremo subito che, essendo $t(r, r_0)$ funzione essenzialmente positiva (nulla

(7) Infatti $1/r+\beta$ non può annullarsi in (a, r_0), avendosi

$$-\beta^{-1} = r_0\left(1 - \frac{v_0^2}{\alpha^2}r_0\right)^{-1} > r_0\,.$$

per $r = r_0$), il segno del primo termine del secondo membro di (14) è dato dal segno di $1 - (M/m)(2r_0 v_0^2 \alpha^{-2} + 1)$.

Quanto alla $\varphi(r)$, derivando la (11) rispetto ad r, si ha

$$\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r_0^2}\left(1 - 3\frac{v_0^2}{\alpha^2} r_0 \frac{M}{m}\right) K(r)\,. \tag{15}$$

Avendosi

$$K(r) = \left(\frac{1}{r} + \beta\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{r} + 2\beta\right) = 2\left(\frac{1}{r} + \beta\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} + \beta\right)^{-\frac{3}{2}} \geqslant 0\,,$$

qualunque sia il segno di β, il segno della φ', e quindi l'andamento della $\varphi(r)$, dipende esclusivamente dal segno della costante $1 - 3r_0 v_0^2 \alpha^{-2} M/m$.

Converrà ora distinguere i due casi $\beta < 0$ e $\beta > 0$.

a) $\beta < 0$ e quindi $r_0 v_0^2 \alpha^{-2} < 1$.

Si ha in questo caso

$$1 - 3\frac{M}{m} < 1 - \frac{M}{m}\left[1 + 2r_0 \frac{v_0^2}{\alpha^2}\right] < 1 - 3\frac{M}{m} r_0 \frac{v_0^2}{\alpha^2} \tag{16}$$

e quindi, essendo

$$\varphi(0) = \left(3\frac{M}{m} - 1\right)\frac{v_0}{\alpha}\,, \qquad \varphi(r_0) = -\frac{v_0}{\alpha}\beta > 0\,, \tag{17}$$

se i dati iniziali di densità, posizione, velocità e il raggio del nucleo sono tali da far risultare

$$3M \geqslant m \geqslant M\left(1 + 2r_0 \frac{v_0^2}{\alpha^2}\right), \tag{18}$$

con che la $\varphi(r)$ risulta crescente positiva e insieme positivo il coefficiente di t in (14), il moto *è regolare* in tutto l'intervallo (a, r_0), risultando infatti dalla (10) $\partial r/\partial r_0 > 0$, avendosi

$$\lim_{r \to r_0} \frac{\partial r}{\partial r_0} = -\frac{1}{\beta r_0}\left(1 - 3r_0 \frac{v_0^2}{\alpha^2}\frac{M}{m}\right) > 0\,.$$

Se invece della (18), in conseguenza dei dati iniziali, si avesse

$$m > 3M > M\left(1 + 2r_0 \frac{v_0^2}{\alpha^2}\right), \tag{19}$$

pur risultando ancora positivo il coefficiente di t nella (14) e crescente la $\varphi(r)$, essendo ora $\varphi(0) < 0$, esisterà in $(0, r_0)$ uno ed un solo valore $\bar{r}$ di r per il quale si ha $\varphi(\bar{r}) = 0$. Per ogni $r \geqslant \bar{r}$ il moto risulta pertanto *regolare* e se $\bar{r} \leqslant a$ la *regolarità del moto resta assicurata* in tutto (a, r_0). Se invece è $\bar{r} > a$ tale regolarità *può cessare* non appena, in dipendenza dei dati iniziali, esista un r^*, con $a \leqslant r^* < \bar{r}$, per il quale resti soddisfatta l'equazione

$$t(r^*, r_0) = -\frac{2}{3} r_0^2 \alpha^{-1} \varphi(r^*) \left[1 - \frac{M}{m}\left(2r_0 \frac{v_0^2}{\alpha^2} + 1\right)\right]^{-1}.$$

Sia infine, per i dati iniziali,

$$m < M(1 + 2r_0 v_0^2 \alpha^{-2}) < 3M. \tag{20}$$

La $\varphi(r)$, per le (17), è positiva in (a, r_0), ma può crescere, rimanere costante o decrescere secondo che sia $m - 3Mr_0v_0^2\alpha^{-2} \gtreqless 0$. Il coefficiente di t in (14) è invece adesso negativo, con che risulta pure negativa la funzione $\chi(r)$, crescente in (a, r_0), avendosi, per qualunque r,

$$\chi'(r) = -\frac{3}{2} \frac{1}{r_0^2}\left[1 - \frac{M}{m}\left(2r_0 \frac{v_0^2}{\alpha^2} + 1\right)\right]\left(\frac{1}{r} + \beta\right)^{-\frac{1}{2}} > 0.$$

Sia allora $\varphi(r)$ non decrescente $[m - 3Mr_0v_0^2\alpha^{-2} \geqslant 0]$.

Se è $|\chi(a)| \leqslant \varphi(a)$ si ha $\psi(r) > 0$ internamente all'intervallo (a, r_0), nel quale resta quindi *assicurata la regolarità del moto.*

Se invece è $|\chi(a)| > \varphi(a)$, essendo $0 = |\chi(r_0)| < \varphi(a)$, la $\psi(r)$ deve cambiare segno in (a, r_0) e quindi, per la sua continuità, annullarsi almeno una volta, *cessando* così *la regolarità del moto.*

Si vede poi facilmente che la $\psi(r)$ non può annullarsi più di una volta in (a, r_0). Infatti per la sua derivata si ha:

$$\psi'(r) = \frac{1}{r_0^2}\left(\frac{1}{r} + \beta\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{\left(1 - 3\frac{v_0^2}{\alpha^2} r_0 \frac{M}{m}\right)\left(\frac{3}{r} + 2\beta\right)\left(\frac{1}{r} + \beta\right)^{-1} - \frac{3}{2}\left[1 - \frac{M}{m}\left(2r_0\frac{v_0^2}{\alpha^2} + 1\right)\right]\right\}, \tag{21}$$

che, essendo $1/r + \beta > 0$, nelle nostre ipotesi, si mantiene positiva.

Sia adesso $\varphi(r)$ decrescente $[m - 3Mr_0v_0^2\alpha^{-2} < 0]$.

Se $|\chi(a)| > \varphi(a)$, la $\psi(r)$, avendosi ora $\psi(a) \cdot \psi(r_0) < 0$, deve annullarsi in (a, r_0), con che il moto *cessa di essere regolare.* Ancor qui è poi facile vedere che la $\psi(r)$ si annulla per un solo valore di r. Infatti, posto

$$0 < A = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{M}{m}\left(2r_0 \frac{v_0^2}{\alpha^2} + 1\right)}{1 - 3r_0 \frac{v_0^2}{\alpha^2} \frac{M}{m}} < \frac{1}{2} ,$$

la (21) può scriversi:

$$\psi'(r) = \frac{1}{r_0^2}\left(\frac{1}{r} + \beta\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - 3r_0 \frac{v_0^2}{\alpha^2} \frac{M}{m}\right)\left(2 + \frac{1}{1 + r\beta} - 3A\right) .$$

Da questa, essendo $1/r + \beta > 0$, per avere $\psi'(r) = 0$, si richiederebbe

$$\frac{1}{1 + r\beta} = 3A - 2 , \tag{22}$$

manifestamente assurda, essendo i due membri di segno discorde.

Se infine è $|\chi(a)| \leqslant \varphi(a)$ il *moto è regolare* in tutto (a, r_0).

Infatti, avendosi $\psi(a) \geqslant 0$ e $\psi(r_0) > 0$, perchè possa aversi $\psi(r) = 0$, e quindi moto non regolare, occorrerebbe che la $\psi'(r)$ cambiasse segno in (a, r_0), cosa questa che abbiamo visto impossibile, non potendo sussistere la (22) nell'intervallo (a, r_0).

Quindi, valendo la (20), qualunque sia l'andamento della $\varphi(r)$, il moto è *regolare* oppure *non regolare* secondo che sia $|\chi(a)| \leqslant \varphi(a)$ oppure $|\chi(a)| > \varphi(a)$.

Naturalmente nel caso particolare $\dot{r}_0 = 0$ i calcoli si semplificano notevolmente, avendosi ora da considerare soltanto i casi

$$m < M , \qquad m \geqslant M .$$

Si deduce, particolarizzando le considerazioni di cui sopra, o più speditamente col calcolo diretto dalla (13), la *regolarità del moto* per $m \geqslant M$. Per $m < M$ tale regolarità può venire a mancare quando sia

$$\frac{3}{2}\alpha\left(\frac{M}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} t(a, r_0) > a .$$

Infatti, verificata questa, la (13) ci mostra che la $\partial r/\partial r_0$ è crescente in in (a, r_0), cambiando però di segno; essa deve quindi annullarsi una ed una sola volta internamente a (a, r_0).

b) $\beta > 0$ e quindi $r_0 v_0^2 \alpha^{-2} > 1$.

In questa ipotesi si ha

$$1 - 3\frac{M}{m}\frac{v_0^2}{\alpha^2} r_0 < 1 - \frac{M}{m}\left(2 r_0 \frac{v_0^2}{\alpha^2} + 1\right) < 1 - 3\frac{M}{m}\,. \tag{23}$$

Ragionando analogamente al precedente caso $\beta < 0$, si giunge facilmente alle seguenti conclusioni.

Se in conseguenza dei dati iniziali $m \leqslant 3M$, per la (23) risulta negativo il coefficiente di t in (14), mentre la $\varphi(r)$ decresce dal valore $\varphi(a)$ al valore $\varphi(r_0) = -v_0\alpha^{-1}\beta < 0$. Essendo $\varphi(0) > 0$, esisterà uno ed un sol $\bar{r}$ per cui è $\varphi(\bar{r}) = 0$ e quindi per ogni $r \geqslant \bar{r}$ la $\partial r/\partial r_0$ mantiene segno costante in $(\bar{r}, r_0)$. Se quindi è $\bar{r} \leqslant a$ il *moto sarà regolare* internamente a (a, r_0). Tale regolarità potrà venir meno quando, essendo $r > a$, esista, in dipendenza dei dati iniziali, un r^* per cui sia

$$t(r^*, r_0) = -\frac{2}{3}\frac{r_0^2}{\alpha}\varphi(r^*)\left[1 - \frac{M}{m}\left(2r_0\frac{v_0^2}{\alpha^2} + 1\right)\right].$$

Se, per i dati iniziali, risulta:

$$3M < m \leqslant M\left(2\frac{v_0^2}{\alpha^2} r_0 + 1\right),$$

il coefficiente di t in (14) è negativo o nullo ed essendo per le (11) e (23) $\varphi(r) < 0$ in tutto (a, r_0), la (14) ci assicura, col fatto che in (a, r_0) la $\partial r/\partial r_0$ non può cambiare di segno, *la regolarità del moto.*

Sia infine, per i dati iniziali,

$$m > M\left(2\frac{v_0^2}{\alpha^2} r_0 + 1\right).$$

Il coefficiente di t in (14) è positivo e la $\varphi(r) < 0$ è crescente, costante o decrescente secondo che $m \gtreqless 3Mr_0v_0^2\alpha^{-2}$.

Con considerazioni del tutto analoghe al corrispondente caso trattato per $\beta < 0$, il moto risulta in ogni caso *regolare oppure no* secondo che sia $|\chi(a)| \leqslant \varphi(a)$ oppure $|\chi(a)| > \varphi(a)$.

I risultati di questa analisi sono chiaramente riassunti dal seguente specchio:

$\beta < 0$ $\longrightarrow$

$m \ldots$ ——————— $\Big|$ $M\left(2\frac{v_0^2}{\alpha^2} r_0 + 1\right)$ ——————— $\Big|$ $3M$ ——————— $\ldots$

$\left\{\begin{array}{l} |\chi(a)| \leqslant \varphi(a), \textit{ moto regolare,} \\ |\chi(a)| > \varphi(a), \textit{ moto non regolare,} \end{array}\right.$	*moto regolare,*	$\left\{\begin{array}{l} \bar{r} \leqslant a, \textit{ moto regolare,} \\ \bar{r} > a, \textit{ moto non regolare,} \end{array}\right.$ $\varphi(\bar{r}) = 0\,.$

$\longleftarrow$ $\beta > 0$

5. – La regolarità nel caso del moto con simmetria cilindrica.

Consideriamo ora il moto di un mezzo disgregato occupante la regione esterna ad un nucleo rigido cilindrico, indefinito di raggio a. Con le ipotesi e le notazioni del n. 2, posto [5]

$$m = m_0 + m_1 \,; \qquad \alpha = \sqrt{4mf}\,; \qquad \beta = r_0 \exp\frac{v_0^2}{\alpha^2}\,, \qquad |\dot r_0| = v_0$$

ed essendo $U = -2fm\log r$, l'equazione (4) dà

$$\pm\,\dot r = \alpha\sqrt{\log(\beta/r)}\,, \tag{24}$$

dovendosi prendere il segno $+$ se $\dot r(t_0) = \dot r_0 > 0$ e il segno $-$ se è $\dot r_0 \leqslant 0$. Come è stato osservato ([8]), nel caso $\dot r_0 > 0$ la particella si allontana inizialmente dal nucleo fino a raggiungere la distanza $r = \beta$, ove la sua velocità si annulla. A partire dall'istante in cui giunge in β la particella inverte il suo moto, cosicchè, all'istante t^* nel quale la particella passa di nuovo per la posizione iniziale r_0, vengono a riprodursi, come facilmente si constata, condizioni analoghe a quelle del caso $\dot r_0 < 0$. Basterà quindi studiare la regolarità del moto, con riguardo alla densità, soltanto nella ipotesi $\dot r_0 \leqslant 0$.

Supposto da prima $\dot r_0 < 0$, fatto il cambiamento di variabile $\log(\beta/r) = z^2$, a (24) ci dà per t l'espressione:

$$t(r, r_0) = \frac{2\beta}{\alpha}\int_{v_0/\alpha}^{\sqrt{\log(\beta/r)}} \exp[-z^2]\,dz = \frac{\beta\sqrt{\pi}}{\alpha}\left\{\mathrm{E}\left(\sqrt{\log(\beta/r)}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{v_0}{\alpha}\right)\right\}.$$

Per questa, posto $M = \pi\mu_0(r_0)r_0^2$, la (7), a conti fatti, diventa:

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = \tag{25}$$

$$= \frac{1}{r_0}\sqrt{\log(\beta/r)}\left\{\alpha\left[1 - \frac{M}{m}\left(2\frac{v_0^2}{\alpha^2} + 1\right)\right]t(r, r_0) + 2\frac{M}{m}\frac{v_0}{\alpha}r_0 + \left(1 - 2\frac{v_0^2}{\alpha^2}\frac{M}{m}\right)\frac{r}{\sqrt{\log(\beta/r)}}\right\}.$$

Essendo $(1/r_0)\sqrt{\log(\beta/r)} > 0$ in tutto l'intervallo (a, r_0), basterà studiare

---

([8]) Cfr. [5], pag. 209.

nello stesso intervallo il segno di

$$\psi(r) = \alpha\chi(r) + \varphi(r) ,$$

ove si è posto

$$\chi(r) = \left[1 - \left(2\frac{v_0^2}{\alpha^2} + 1\right)\frac{M}{m}\right] t(r, r_0) ,$$

$$\varphi(r) = 2\frac{v_0}{\alpha} r_0 \frac{M}{m} + \left(1 - 2\frac{v_0^2}{\alpha^2}\frac{M}{m}\right)\frac{r}{\sqrt{\log(\beta/r)}} .$$

È facile constatare che la $\varphi(r)$ è positiva in (a, r_0), qualunque siano i dati iniziali. Infatti si ha

$$\varphi(0) = 2r_0(v_0/\alpha)\frac{M}{m} > 0 , \qquad \varphi(r_0) = r_0\alpha/v_0 > 0 \tag{26}$$

e

$$\varphi'(r) = \frac{1}{2}\left(1 - 2\frac{v_0^2}{\alpha^2}\frac{M}{m}\right)[\log(\beta/r)]^{-3/2}[2\log(\beta/r) + 1] . \tag{27}$$

Conservando la $\varphi'(r)$ segno costante in (a, r_0), per le (26), si ha $\varphi(r) > 0$.

La funzione $\chi(r)$ invece può essere positiva, negativa o nulla secondo che, in dipendenza dei dati iniziali, si abbia $m \gtreqless M(2v_0^2\alpha^{-2} + 1)$.

Se quindi è $m \geqslant M(2v_0^2\alpha^{-2} + 1)$, essendo di conseguenza in tutto (a, r_0) $\chi(r) > 0$ e $\varphi(r) > 0$, la $\psi(r)$ non può annullarsi, restando così *assicurata la regolarità del moto* internamente a (a, r_0).

Se invece, per i dati iniziali, si ha

$$m < M(2v_0^2\alpha^{-2} + 1) , \tag{28}$$

la $\chi(r)$ è negativa; se quindi è $|\chi(a)| > \varphi(a)$, essendo $\chi(r_0) = 0$, per le (26) si ha $\psi(a)\cdot\psi(r_0) < 0$, il che assicura l'esistenza di un r^*, interno a (a, r_0), per il quale, essendo $\psi(r^*) = 0$, *il moto cesserà di essere regolare*. Che poi di tali r^* ce ne sia uno solo è subito visto, osservando che, essendo

$$\psi'(r) = \frac{1}{2}\{\log(\beta/r)\}^{-\frac{1}{2}}\left(1 - 2\frac{v_0^2}{\alpha^2}\frac{M}{m}\right)\left[\{\log(\beta/r)\}^{-1} + 2 - \sqrt{\pi}\,\frac{1 - (2v_0^2/\alpha^2 + 1)(M/m)}{1 - 2(v_0^2/\alpha^2)(M/m)}\right]$$

$$\text{se} \qquad m \neq 2\frac{v_0^2}{\alpha^2} M ,$$

$$\psi'(r) = \chi'(r) > 0 \qquad \text{se} \qquad m = 2\frac{v_0^2}{\alpha^2} M ,$$

non può *mai* aversi in (a, r_0), valendo la (28), $\psi'(r) = 0$.

Supponiamo adesso che accanto alla (28) valga $|\chi(a)| \leqslant \varphi(a)$, Possono darsi i tre casi $2v_0^2\alpha^{-2}M \gtreqless m$. Se si ha $2v_0^2\alpha^{-2}M \leqslant m$, risultando la $\varphi(r)$ crescente in (a, r_0), la $\psi(r)$ non può annullarsi in tale intervallo, restando così *assicurata la regolarità del moto.* Nel caso poi che sia $m < 2v_0^2\alpha^{-2}M$, il moto *è ancora regolare* in quanto si ha $\psi(a)\cdot\psi(r_0) > 0$ senza che, come abbiamo visto sopra, la $\psi'(r)$ possa annullarsi in (a, r_0).

L'analisi fatta, anche in questo caso, può essere riassunta nel seguente specchio:

$$M\left(2\frac{v_0^2}{a^2}+1\right)$$

m ...	$\Big\{$ $|\chi(a)| \leqslant \varphi(a)$, *moto regolare,* $|\chi(a)| > \varphi(a)$, *moto non regolare,*	*moto regolare.* ...

Resta ad esaminare il caso $\dot{r}_0 = 0$. Essendo ora $\beta = r_0$, si ha

$$t(r, r_0) = \frac{r_0\sqrt{\pi}}{\alpha}\,\mathrm{E}\left(\sqrt{\log(r_0/r)}\right).$$

I calcoli si semplificano notevolmente. Dall'espressione

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = f(r) = \left(1-\frac{M}{m}\right)\sqrt{\pi\log(r_0/r)}\,\mathrm{E}\left(\sqrt{\log(r_0/r)}\right) + \frac{r}{r_0},$$

si vede subito che *la regolarità* del moto internamente a (a, r_0) *resta senz'altro assicurata* quando, in dipendenza dai dati iniziali, sia $m \geqslant M$. Sia allora

$$m < M\,; \tag{29}$$

soltanto se si ha

$$\left(\frac{M}{m}-1\right)\sqrt{\pi\log(r_0/a)}\,\mathrm{E}\left(\sqrt{\log(r_0/a)}\right) > \frac{a}{r_0}, \tag{30}$$

il moto *cessa di essere regolare*, a partire da un ben determinato valore di r, interno all'intervallo, avendosi $f'(r) > 0$ per ogni r di (a, r_0).

Qualora quindi i dati iniziali non siano tali da rendere contemporaneamente soddisfatte le (29) e (30), come facilmente si constata, *il moto risulta regolare.*

6. – Bibliografia.

[1] T. Levi-Civita, *Moti gravitazionali in una dimensione*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **2**, 365-371 (1925).

[2] L. Lichtenstein, *Ein Problem der Dinamik vollkommen inkohärenter gravitierenden Medien*, Math. Z. **27**, 607-622 (1928).

[3] T. Levi-Civita, *Movimenti per sola gravitazione di un sistema continuo*, Scritti offerti a L. Berzolari, 161-168, Pàvia 1936.

[4] G. Sestini, *Sulla meccanica dei mezzi continui disgregati*, Boll. Un. Mat. Ital. (2) **1**, 38-44 (1939).

[5] A. Tonolo, *Sul moto gravitazionale per cilindri coassiali di un mezzo continuo indefinito disgregato*, Boll. Un. Mat. Ital. (2) **2**, 205-209 (1940).