Rivista Mat. Univ. Parma 4, 227-232 (1953)

ANTONIO MAMBRIANI (*)

Sul concetto di «modulo parziale».

In questa breve Nota propongo (¹) l'introduzione nella Matematica di un semplice ed utile concetto. Indico per esso una denominazione ed un simbolo che mi sembrano assai appropriati: essi sono ispirati dal fatto che questo concetto ha come caso particolare la nozione di «modulo di un numero»; altri casi particolari sono le nozioni di «parte reale di un numero», di «coefficiente della parte immaginaria di un numero». Propongo precisamente la seguente

Definizione. «Dati un numero z qualsiasi e un numero θ reale qual-
«siasi, si chiamerà

modulo parziale rispetto a θ di z (oppure *modulo parziale di z rispetto a θ*),

«e s'indicherà con uno dei simboli

$$\mathrm{mod}_\theta\, z\,, \qquad |z|_\theta\,,$$

«il numero reale

$$|z|_\theta = |z| \cos(\theta - \arg z)\,, \tag{1}$$

«cioè la lunghezza (in valore e segno) della proiezione ortogonale del segmento
«orientato corrispondente a z, nel piano di GAUSS, su la direzione orientata,
«di tale piano, d'argomento θ.»

Posto $z = x + iy$, con x e y reali, si ha manifestamente

$$|z|_\theta = |x + iy|_\theta = x \cos\theta + y \,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{2}$$

(*) Professore o. della Università di Parma. Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

(¹) Ciò, non senza maturate riflessioni: esse hanno avuto origine fin nel lontano anno 1926, durante i miei studi per la Tesi di laurea.

Dalla (1) segue subito

$$-|z| \leqslant |z|_\theta \leqslant |z| , \tag{3}$$

ed è

$$|z|_{\arg z} = |z| , \qquad |z|_{(\arg z) \pm \pi} = -|z| \; ; \tag{4}$$

e la (3) motiva la precisazione espressa dalla parola *parziale* (da intendersi in senso algebrico) nella denominazione del nostro concetto. Abbiamo inoltre

$$|z|_0 = x = \mathcal{R}(z) , \qquad |z|_{\pi/2} = y = \mathcal{J}(z) , \tag{5}$$

onde si può scrivere

$$z = |z|_0 + i\,|z|_{\pi/2} ,$$

e alla (2) si può dare la forma

$$|z|_\theta = |z|_0 \cos\theta + |z|_{\pi/2} \operatorname{sen}\theta . \tag{2'}$$

Mi sembra che i simboli $|z|_0$ e $|z|_{\pi/2}$ siano assai più comodi ed espressivi dei simboli $\mathcal{R}(z)$ e $\mathcal{J}(z)$ o altri analoghi in uso.

In ciò che segue si studia brevemente questo modulo parziale.

1. – Alle (4) e (5) possiamo aggiungere:

$$|-z|_\theta = -|z|_\theta , \qquad |z|_{\theta \pm \pi} = -\,|z|_\theta , \tag{6}$$

e ancora

$$|z|_{(\arg z) \pm \pi/2} = 0 , \qquad |z|_{2 \arg z} = |z|_0 .$$

Inoltre è

$$|z|^2_\theta + |z|^2_{\theta \pm (\pi/2)} = |z|^2, \tag{7}$$

dove si ha

$$|z|_{\theta + (\pi/2)} = -|z| \operatorname{sen}(\theta - \arg z). \tag{8}$$

Osserviamo che risulta

$$|1|_\theta = \cos\theta , \qquad |i|_\theta = \operatorname{sen}\theta . \tag{9}$$

Con ciò la (2') si può scrivere

$$|z|_\theta = |z|_0 |1|_\theta + |z|_{\pi/2} |i|_\theta . \tag{2''}$$

Notiamo ancora che la (2') si può porre sotto la forma

$$|z|_\theta = |ze^{-i\theta}|_0 , \tag{2'''}$$

formula che riconduce il modulo parziale rispetto ad un argomento θ, reale qualsiasi, al modulo parziale rispetto a zero, ossia alla determinazione della parte reale. La (2''') si generalizza nella seguente:

$$|z|_{\theta+\omega} = |ze^{-i\theta}|_\omega , \tag{10}$$

essendo ω un altro numero reale qualsiasi.

2. – Relativamente ad una serie trigonometrica abbiamo, tenendo presente la (2),

$$\sum_1^\infty{}_n (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = \sum_1^\infty{}_n |a_n + ib_n|_{nx} ,$$

ossia:

Una serie trigonometrica $\sum_1^\infty{}_n (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ *non è altro che la serie di termini i moduli parziali dei numeri*

$$a_1 + ib_1 , \quad a_2 + ib_2 , \quad \ldots , \quad a_n + ib_n , \quad \ldots ,$$

ordinatamente rispetto a x, $2x$, ..., nx, ...

3. – L'equazione

$$|z|_\theta = a , \tag{11}$$

con θ ed a numeri reali prefissati e z variabile, è l'equazione della retta, del piano di GAUSS, perpendicolare alla direzione orientata d'argomento θ, e avente dall'origine distanza eguale ad a (in valore e segno). Ne segue che le diseguaglianze

$$|z|_\theta < a , \qquad |z|_\theta > a \tag{12}$$

individuano analiticamente i due semipiani (aperti), del piano di GAUSS, aventi per retta origine comune la retta (11).

Le uguaglianze

$$(13) \qquad |z|_\theta = |z| \,, \qquad |z|_\theta = -|z| \,,$$

con θ numero reale prefissato e z variabile, sono rispettivamente le equazioni delle due semirette secondo cui l'origine del piano di GAUSS divide la retta (orientata) d'argomento θ passante per l'origine.

La (11), ove a è un numero reale prefissato mentre tanto θ che z sono variabili, è l'equazione tangenziale della circonferenza $|z| = |a|$.

4. – Osserviamo che è

$$(14) \qquad |z|_{\theta+2\pi} = |z|_\theta$$

e che $\omega = 2\pi$ è l'unico valore dell'intervallo $0 < \omega \leqslant 2\pi$ per il quale sia $|z|_{\theta+\omega} = |z|_\theta$. Tenendo presente anche (3), abbiamo dunque:

Per ogni z prefissato (finito) la funzione, della variabile θ,

$$(15) \qquad |z|_\theta \,, \qquad -\infty < \theta < +\infty \,,$$

è reale, periodica (con il periodo 2π), continua, limitata (con il massimo $|z|$ e il minimo $-|z|$), derivabile di tutti gli ordini e con quattro sole derivate distinte (date da quelle d'ordine 0, 1, 2, 3) e cioè ordinatamente:

$$|z|_\theta = |x+iy|_\theta \,, \quad |y-ix|_\theta \,, \quad -|x+iy|_\theta \,, \quad -|y-ix|_\theta \,.$$

5. – Risulta

$$(16) \qquad |z+\zeta|_\theta = |z|_\theta + |\zeta|_\theta \,, \quad |z-\zeta|_\theta = |z|_\theta - |\zeta|_\theta \,.$$

Ciò segue subito dalla definizione di modulo parziale con considerazioni geometriche, s'ottiene anche analiticamente da (2) in modo facile [posto $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$, con x, y, ξ, η reali, si ha

$$|z\pm\zeta|_\theta = (x\pm\xi)\cos\theta + (y\pm\eta)\operatorname{sen}\theta = (x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta) \pm (\xi\cos\theta + \eta\operatorname{sen}\theta) \,].$$

Come applicazione di (16) si può provare rapidamente la ben nota relazione fra moduli:

$$|z+\zeta| \leqslant |z| + |\zeta| \,.$$

Invero abbiamo, applicando (4) e (16),

$$|z+\zeta| = |z+\zeta|_{\arg(z+\zeta)} = |z|_{\arg(z+\zeta)} + |\zeta|_{\arg(z+\zeta)},$$

e tenendo presente la (3) si ottiene senz'altro la relazione da provare.

6. – Si ha

$$|z\zeta|_{\theta+\omega} = |z|_\theta\, |\zeta|_\omega - |z|_{\theta+(\pi/2)}\, |\zeta|_{\omega+(\pi/2)}, \tag{17}$$

e, naturalmente, vale anche l'analoga formula ottenuta con lo scambio di z con ζ oppure di θ con ω. Invero, per la (1) abbiamo:

$$|z\zeta|_{\theta+\omega} = |z\zeta| \cos\{\theta+\omega-\arg(z\zeta)\} = |z|\,|\zeta| \cos\{(\theta-\arg z)+(\omega-\arg\zeta)\},$$

onde

$$|z\zeta|_{\theta+\omega} = |z|\,|\zeta|\{\cos(\theta-\arg z)\cos(\omega-\arg\zeta) - \operatorname{sen}(\theta-\arg z)\operatorname{sen}(\omega-\arg\zeta)\},$$

od anche

$$|z\zeta|_{\theta+\omega} = |z|\cos(\theta-\arg z)\cdot|\zeta|\cos(\omega-\arg\zeta) - \\ -|z|\operatorname{sen}(\theta-\arg z)\cdot|\zeta|\operatorname{sen}(\omega-\arg\zeta),$$

cioè, in virtù di (1) e (8), proprio la (17).

Da (17) per $\theta=\omega=0$ e per $\theta=0$ e $\omega=\pi/2$ si hanno le note espressioni della parte reale e del coefficiente della parte immaginaria di un prodotto:

$$|z\zeta|_0 = |z|_0|\zeta|_0 - |z|_{\pi/2}|\zeta|_{\pi/2}, \qquad |z\zeta|_{\pi/2} = |z|_0|\zeta|_{\pi/2} + |z|_{\pi/2}|\zeta|_0$$

[dove nell'ultima si è tenuto conto della seconda delle (6) per $\theta=0$].

Se in (17) facciamo $\omega=0$, segue

$$|z\zeta|_\theta = |z|_\theta\zeta \qquad \text{per } \zeta \text{ reale.} \tag{18}$$

Onde, essendo a e b costanti reali, per (16) e (18) si ha:

$$|az+b\zeta|_\theta = a|z|_\theta + b|\zeta|_\theta.$$

7. – Posto $z = x + iy$, abbiamo

$$\left|\frac{1}{z}\right|_\theta = \left|\frac{1}{x+iy}\right|_\theta = \left|\frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}\right|_\theta,$$

cioè, per la (2),

$$\left|\frac{1}{z}\right|_\theta = \frac{x}{x^2+y^2}\cos\theta - \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta}{x^2+y^2},$$

e infine

$$\left|\frac{1}{z}\right|_\theta = \frac{|z|_{-\theta}}{|z|^2}.$$

8. – Ed ora un semplicissimo esercizio, che è utile tenere presente, ad esempio, nello studio dell'integrale di LAPLACE.

Si abbia l'esponenziale $e^{z\zeta}$, dove $\zeta = |\zeta| e^{i\theta}$ si faccia tendere all'infinito tenendo fisso θ. Per quali z l'esponenziale $e^{z\zeta}$ tende allora a zero?

Per rispondere, notiamo dapprima che è $|e^{z\zeta}| = e^{|z\zeta|_0}$. D'altra parte si ha

$$|z\zeta|_0 = \mathrm{mod}_0\,(z|\zeta|e^{i\theta}),$$

da cui, per la (18),

$$|z\zeta|_0 = |ze^{i\theta}|_0\,|\zeta|,$$

e ancora, per la (2‴) del n. **1**,

$$|z\zeta|_0 = |z|_{-\theta}\,|\zeta|.$$

Gli z cercati sono quindi, manifestamente, tutti e solo quelli pei quali è $|z|_{-\theta} < 0$, equazione del tipo (12) rappresentante analiticamente il semipiano (aperto), del piano di GAUSS, avente per retta origine la retta per l'origine del piano di GAUSS perpendicolare alla direzione (orientata) d'argomento $-\theta$, semipiano contenente inoltre la parte negativa di tale direzione.