Rivista Mat. Univ. Parma 4, 195-205 (1953)

UGO CASSINA (*)

# L'idéographie de Peano du point de vue de la théorie du langage. (**)

Mes études concernant l'idéographie de PEANO et le latin sine-flexione, dû aussi à PEANO, m'ont naturellement incité à étudier le langage, soit en lui-même, soit et bien plus encore comme instrument de la science.

Je me propose d'exposer ici les principes essentiels de l'idéographie de PEANO, du point de vue de la théorie du langage, et je vais donner d'abord quelques notions fondamentales de cette théorie.

## § 1. – Observations générales concernant le langage.

**1. – Le langage et les langues.** Selon quelques linguistes, p. ex. J. VENDRYES (1), le « langage » est l'ensemble des procédés physiologiques et psychiques dont l'être humain dispose pour parler, tandis que la « langue » est le langage employé par une certaine catégorie de personnes.

Dans la catégorie des *langues* paraissent alors les *dialectes*, les langues dites *spéciales* et les *argots*: p. ex. la langue *juridique* et en général les langues spéciales des sciences (les langages *scientifiques*), et les argots des collégiens, des artisans, des malfaiteurs, etc..

Les langues « communes », c'est-à-dire, l'italien, le français, l'allemand, etc. méritent une mention particulière.

---

(*) Professore o. della Università di Milano. Indirizzo: Via Col Moschin 9, Milano 734 (Italia).

(**) Conferenza tenuta al 75° Congresso della « Association française pour l'Avancement des Sciences », Luxembourg 21-28 luglio 1953.

(1) J. VENDRYES, *Le langage, introduction linguistique à l'histoire*, Paris 1921.

Les langues *communes* dérivent presque toujours d'un dialecte, mais elles se superposent aux dialectes et ont une formation différente de celle des dialectes.

Ceux-ci se créent en effet spontanément par le jeu naturel des actions linguistiques, tandis que chaque langue *commune* se manifeste toujours par des particularités externes au langage: p. ex. elle se développe en raison de l'extension du pouvoir politique organisé, de l'influence d'une certaine classe sociale prépondérante, de la suprématie d'une littérature, etc..

**2. – Les instruments du langage.** Je me réfère à un « langage » *déterminé*, mais *générique*: parlé, écrit ou exprimé autrement comme p. ex. le langage télégraphique ou radio-télégraphique ou mimique.

On peut dire alors que chaque langage se manifeste par l'emploi des instruments suivants: 1) les *signes* linguistiques, 2) les *séries* de signes linguistiques, 3) les signes de *ponctuations*. Les deux premiers sont essentiels, le troisième est accessoire.

Dans le langage *parlé* les signes linguistiques sont le *phonèmes* (voyelles, consonnes, demi-voyelles); les séries de signes linguistiques sont les *locutions*: c'est-à-dire suites temporelles de phonèmes; les signes de ponctuations sont les *pauses* d'une différente durée, qui séparent une locution d'une autre.

Chaque signe ou série de signes linguistiques, appartenant au même langage, avec ou sans signes de ponctuation, est appelé *symbole*. Nous pouvons ainsi affirmer que le langage générique est représenté par des symboles: *simples* ou *composés*, c'est-à-dire obtenus par l'*apposition* de symboles simples.

La catégorie des signes de ponctuation d'un langage déterminé peut être constituée par un élément unique, par ex. le *blanc* ou espace typographique dans un langage écrit, et il peut même manquer comme nous le voyons dans les anciens codes compilés en majuscules carrées sans aucun signe orthographique. Les deux premières catégories d'instruments ne manquent jamais

**3. – Propositions et pseudo-propositions.** Un symbole d'un langage déterminé peut avoir une valeur *réelle* (ou valeur *logique* ou *sens*) et différentes valeur *formelles*. Il peut aussi manquer de valeur, c'est-à-dire être un symbole pur, ou, comme nous disons, un *non-sens*. Par ex. la locution italienne (employé par DANTE): « Papè Satan, Papè Satan aleppe ».

Parmi les valeurs formelles d'un symbole, nous pouvons distinguer les valeurs linguistiques, grammaticales, phonétiques, esthétiques, psychologiques, etc..

Nous dirons « objets *réels* » les valeurs réelles des symboles et « objets *formels* » les valeurs formelles des symboles.

La logique et les mathématiques s'occupent seulement des *objets réels*.

Je donnerai le nom de « phrase » — d'un langage déterminé — à chaque symbole (simple ou composé) qui a un *sens achevé*, c'est-à-dire qui est une « proposition » selon la grammaire.

À ce point il est utile de distinguer parmi le langage *intellectuel* (ou logique), qui est employé dans les relations scientifiques ou commerciales, et les langages *subjectifs* (qui se divisent communément en *actifs* et *affectifs* et qui sont constitués, par ex., par les ordres, les prières, les invocations, les questions, etc.)

Par ex.: « Ce mariage n'aura pas lieu! », « La racine carrée de deux est-elle rationnelle? » ce sont des phrases de langages subjectifs et représentent des propositions « selon la grammaire » mais *non* « selon la logique ». Tandis que: « Trois est un nombre premier », « Trois est un nombre pair » sont des phrases du langage intellectuel (arithmétique) et sont des propositions soit « selon la grammaire », soit « selon la logique ». La première est *vraie* et la seconde est *fausse*.

Et encore: « Le chien est constitué par cinq lettres », « L'étoile est du genre féminin », sont des phrases du langage intellectuel et des propositions « selon la grammaire » et *non pas* « selon la logique ».

Comme conclusion de ces remarques, nous donnerons, en logique, le nom de « proposition » aux *phrases* du langage intellectuel qui sont *vraies* ou *fausses* et de « pseudo-propositions » aux *phrases* du langage intellectuel ou non, qui ne sont *ni vraies, ni fausses*, ou qui sont vraies dans une certaine langue et fausses dans une autre, ou vraies pour une certaine personne et fausses pour une autre.

Il faut ici remarquer que le concept de *vrai* (que je nommerai *psychologique* ou *intuitif*), et par négation le concept de *faux*, est nécessaire — comme je l'ai démontré ailleurs (2) —, et même l'écrivain formaliste, qui considère les sciences particulières comme systèmes hypothétiques déductifs et non pas comme une suite de propositions *vraies*, ne peut s'en passer.

**4. – Langues sans grammaire.** La grammaire comparée et l'étude rationnelle des langues particulières, nous portent à la conclusion que les catégories et opérations (ou relations) purement grammaticales ne répondent à aucune nécessité logique et peuvent être supprimées.

De cette manière nous obtenons des langues où nous employons seulement des catégories logiques et par conséquent *sans grammaire* (concevant la grammaire comme morphologie).

Ces langues sont à même d'exprimer les pensées humaines avec la plus grande clarté et précision. G. W. LEIBNIZ l'avait deviné, mais c'est G. PEANO qui

(2) Cfr.: U. CASSINA, *Le dimostrazioni in Matematica*, Annali Mat. Pura Appl. (4) **29**, 131-146 (1949).

l'a démontré par le latin sine-flexione et l'interlingua, comme langues *communes*, et son idéographie, comme langue *spéciale* de la logique et des mathématiques.

**5. – Phrases idéographiques et idéographies.** Par l'usage de racines grecques employées dans la philologie, je vais introduire (3) quelques termes techniques en divisant les symboles — d'un même langage — dans les catégories suivantes: 1) « idéogrammes » représentatifs des *idées* (c'est-à-dire des symboles ayant seulement une valeur logique), 2) « glossogrammes », c'est-à-dire des symboles ayant communément seulement une valeur formelle (bien qu'elle soit quelquefois mêlée à une valeur logique).

Méritent une attention particulière les symboles d'opération ou « morphogrammes », nommés *réels* ou *formels* selon que ces symboles représentent une relation (ou opération) *réelle* ou *formelle*.

Les morphogrammes réels sont des *idéogrammes*, tandis que les morphogrammes formels sont des *glossogrammes*.

Dans le langage ordinaire les *idéogrammes* correspondent aux « sémantèmes » d'objets réels et aux « morphèmes » logiques; les *glossogrammes* aux « mots » (qui peuvent être aussi des sémantèmes d'objets formels ou des morphèmes grammaticaux).

J'appelle *idéographique* une « phrase » si elle ne contient pas de glossogrammes, et *grammaticale* dans le cas contraire.

Un langage est une *idéographie*, si chaque phrase de ce langage est idéographique. Exemples:

Phrases *idéographiques*: $3 > 2$, $3+2 = 5$. Phrases *grammaticales*: (latin): « Tres est maior duobus »; (français): « Trois plus deux font cinq ».

Les langages ordinaires sont *tous* grammaticaux, mais, parmi eux, il y a des langages, comme par ex. la langue chinoise, qui possède une grammaire minime, d'autres au contraire, comme par ex. la langue sanscrite parmi les langues anciennes et les dialectes bantous parmi les langues modernes, ayant une grammaire très étendue.

Dans les langages ordinaires la valeur d'un symbole change généralement avec le changement de sa place dans la phrase. Et non seulement sa valeur grammaticale ou esthétique, mais aussi sa valeur logique. Tandis que, dans une idéographie, chaque signe linguistique est un idéogramme et sa signification logique reste invariable. La langue *écrite*, naturelle, qui s'approche le plus d'une idéographie, dans le sens que je viens d'indiquer, est la langue *chinoise*. Mais les signes graphiques chinois, ne peuvent être considérés comme

(3) Cfr.: U. CASSINA, *Ideografia e logica matematica*, Period. Mat. (4) **30**, 65-78 (1952).

idéogrammes, dans notre sens, car leur valeur logique dépend de la position qu'ils occupent dans la phrase.

Par ex., en écrivant *homme* à la place du signe graphique correspondant de la langue chinoise, l'écriture: « homme homme homme » signifie: « l'homme traite humainement les êtres humains ». Elle est donc dans la plus parfaite analogie avec l'écriture « 222 » de l'arithmétique, où le symbole 2 vaut deux, vingt ou deux cents selon la position.

Afin de créer une idéographie, c'est-à-dire dans le but de donner une forme totalement idéographique à une langue, il ne faut pas envisager d'employer un signe *différent* pour chaque *idée*: puisque, ce procédé, bien qu'extraordinairement compliqué — il nous faudrait en tel cas plusieurs milliers de symboles — serait toujours à recommencer à cause de l'avancement des connaissances humaines.

Dans les projets concernant une « Langue » ou « Écriture universelle », de G. W. LEIBNIZ, nous trouvons les premières bonnes indications à suivre afin d'obtenir une vraie idéographie: il affirme en effet que toutes les idées *composées* doivent être exprimées par les signes conventionnels des idées *simples* selon des règles fixes.

Le projet de LEIBNIZ est utopique, si on l'applique à une langue *commune*, tandis qu'il n'est plus utopique si on l'applique à une langue *spéciale*, comme le langage d'une certaine science.

Le premier qui a démontré cela et a résolu le problème — posé mais non résolu par LEIBNIZ — a été PEANO pour le langage de la logique et plus généralement pour celui des mathématiques.

**6. – La logique mathématique de Peano comme langage.** Moyennant l'emploi d'une vingtaine de symboles (pas tous nécessaires et réductibles à pas plus de *sept* à considérer comme des symboles primitifs), G. PEANO réussit en effet à exprimer toutes les idées de la logique (plus d'un millier) et à donner un complet aspect idéographique à chaque proposition de logique employée par les mathématiciens. Il transforma, de plus, toute forme de raisonnement mathématique dans un calcul pareil au calcul algébrique, c'est-à-dire soumis à des règles bien précises et déterminées.

G. PEANO nomma cette idéographie: « logique mathématique ». En nous référant à la nomenclature qui vient d'être introduite, et en résumant les observations faites, nous pouvons donc dire que la logique mathématique de PEANO est une *idéographie*, c'est aussi un *langage écrit universel*, c'est enfin une *langue spéciale* pour la logique et les mathématiques et en général pour toutes les sciences qui peuvent être exprimées mathématiquement.

Selon l'opinion de quelques auteurs modernes de la logique symbolique, l'œuvre de PEANO est surpassée et offre seulement une importance historique, mais cette opinion — je crois — est due seulement à leur toute petite connaissance de l'œuvre vraie de PEANO [4].

## § 2. – Sur la structure de l'idéographie de Peano.

**7. – Les instruments du langage de Peano.** En faisant usage de la nomenclature introduite dans le § précédent, nous pouvons donc dire que la logique mathématique de PEANO, considérée comme un langage, est un langage *écrit universel* sans grammaire, dont les *signes* linguistiques sont tous des *idéogrammes.*

L'*apposition* des symboles, de ce langage, — de gauche à droite comme dans les langues indo-européennes — est employée seulement entre idéogrammes simples ou composés, c'est-à-dire représentés par un unique idéogramme ou par un certain nombre d'idéogrammes (*digrammes*, *trigrammes*, etc., si ces idéogrammes sont obtenus par l'apposition de *deux*, de *trois*, etc., idéogrammes).

Les signes de *ponctuation* sont de deux espèces: parenthèses de forme différente ( ) [ ] { } et points en nombres différents.

Les règles, tout à fait simples, sur l'emploi de ces signes constituent toute la *syntaxe* du langage de PEANO.

**8. – Symboles constants et variables.** G. PEANO emploie les lettres latines *italiques* minuscules $a$, $b$, $c$,..., $x$, $y$, $z$ (prononcées: a, bé, cé, etc.) pour indiquer des *objets* (réels) quelconque.

Ce sont des symboles *variables*, c'est-à-dire dont le *sens* (ou valeur logique) est « constant » (c'est-à-dire toujours le même) dans la même phrase, mais en général différent dans des phrases différentes; il n'emploie jamais ces signes (graphiques ou phonétiques) en fonction de symboles d'une signification constante dans toutes les phrases, ou dans un grand nombre de phrases qui constituent, par elles-mêmes, une science particulière.

G. PEANO emploie au contraire dans ce but des signes d'une forme spéciale, ou des lettres grecques ou latines (pas italiques minuscules) droites ou renversées, ou des séries de lettres latines (*romaines*) abréviations en général du nom grec ou latin de l'objet représenté par le symbole.

Les symboles ont été choisis afin d'éviter des homonymies. Les signes de

---

[4] Cfr.: U. CASSINA, *L'œuvre philosophique de G. Peano*, Revue Métaphys. Mor. **40**, 481-491 (1933); *L'opera scientifica di Giuseppe Peano*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **7**, 323-389 (1933).

logique possèdent par conséquent une forme différente de ceux des mathématiques. La forme des symboles en permet une facile composition typographique, car toutes les phrases sont unilinéaires.

L'emploi des lettres variables n'est pas nécessaire et pourrait être facilement éliminé aussi de l'idéographie de PEANO: mais leur élimination n'est pas à conseiller, car ce serait contre le commun usage scientifique.

**9. – De la lecture de l'idéographie de Peano.** G. PEANO donne pour chaque idéogramme, en plus de la forme graphique, la forme phonétique ou *lecture* (française, italienne ou en latin sine-flexione) de manière que son idéographie puisse être, outre un langage *écrit universel*, une langue *parlée.*

Le mot italien (et ainsi pour les mots des autres langues) choisi comme symbole phonétique, est ordinairement celui qui a communément la signification de l'idéogramme. Mais, il faut remarquer, que de cette façon, le mot se transforme en « terme » technique et va prendre comme signification seulement celle du symbole graphique correspondant en perdant toutes les autres significations communes.

C'est pour cela que la *lecture* d'une phrase idéographique de PEANO (par ex. en italien) bien qu'elle soit constituée par des mots italiens n'est pas une phrase de la langue italienne commune; elle peut être tout au plus considérée comme une version littérale.

L'oubli de cette circonstance a causé de longues discussions à propos des paradoxes apparents, comme ceux concernant l'implication, portés par la lecture du signe $\supset_x$ d'implication.

À chaque symbole de logique correspondent dans le langage ordinaire plusieurs expressions équivalentes, tandis qu'il n'existe pas un mot avec la valeur exacte du symbole.

Le verbe « être », par ex. (dans toutes ses formes), correspond aux symboles $\in$ $=$ $\supset$ $\exists$; tandis que ces quatre symboles logiques servent à exprimer des idées qui sont énoncées dans le langage ordinaire par les mots provenant de plus de 40 sémantèmes différents.

**10. – Symboles primitifs de 1897.** G. PEANO a employé en 1897 les symboles primitifs suivants ayant une signification fixe (entre parenthèses est indiqué le signe phonétique français).

| | | |
|---|---|---|
| $=$ | (*est égal*). | Signe de la relation d'*égalité* (logique). |
| ; | (*puis*). | Signe de l'opération de *jonction*, qui transforme les objets $x$ et $y$ dans la couple ordonnée (ou *dyade*) $x; y$ . |
| $\in$ | (*est*). | Signe de la relation d'*être un membre* d'une catégorie réelle. |

$\supset_x$ *(alors, quel que soit x)*. Signe de la relation d'*implication* entre *conditions.*

$\cap$ *(et)*. Signe de l'assertion *simultanée.*

$-$ *(non)*. Signe de l'opération de *négation.*

Cls *(classe)*. Signe pour les *classes.*

Les premiers cinq symboles ne paraissent jamais isolés, mais dans les symboles composés suivants, dont chacun représente un trigramme.

1) $x = y$ (*$x$ est égale* à *$y$*). L'écriture $x = y$ a un sens quel que soient les « objets » (réels) $x$ et $y$ et signifie: « $x$ est égal à $y$ » ou, sous une autre forme, « $x$ et $y$ possèdent la même valeur logique ».

2) $x ; y$ (*$x$ puis $y$*). Possède un sens quel que soient les « objets » (réels) $x$ et $y$ et indique la *dyade*, ou couple ordonnée, qui a comme premier terme $x$ et comme second $y$.

Cette dyade pourra exister ou non selon les valeurs qui sont attribuées à $x$ et $y$. Par ex., dans le cas où $x$ et $y$ sont des nombres réels (dans le sens mathématique), la dyade $x ; y$ — qui est indiquée habituellement par $(x,y)$ — représente un point générique d'un plan sur lequel est fixé un système de coordonnées.

3) $x \in y$ (*$x$ est un $y$*). Une condition nécessaire pour que cette écriture ait un sens est la suivante: $x$ et $y$ doivent être des « objets » (réels) *différents* et $y$ une catégorie (réelle). L'écriture $x \in x$ est cependant toujours un « nonsens ».

L'écriture $x \in y$ signifie (lorsqu'elle a un sens): « $x$ est un membre (ou élément) de $y$ ».

En laissant inaltéré $x$ et en substituant à $y$ une valeur « particulière » — pourvu qu'elle soit une *catégorie réelle* — on obtient une « condition » dans la variable $x$. Exemple: $x \in \mathrm{Np}$ (*$x$ est un nombre premier*), où Np indique la catégorie des nombres premiers.

De la *condition* en $x$: $x \in \mathrm{Np}$ (*$x$ est un nombre premier*), en substituant à $x$ une valeur particulière on obtient une « proposition » vraie ou fausse ou un non-sens, selon la nature de la valeur. Ces trois cas se présentent, par ex., en substituant à $x$ respectivement 3, 4 et Np.

Si $p$ est une condition en $x$, alors chaque valeur (réelle) qui, attribuée à $x$, transforme la condition $p$ en une proposition *vraie*, s'appelle une « solution » de $p$.

4) $p . \supset_x . q$ (*$p$, alors quel que soit $x$, $q$*). Cette écriture possède un sens seulement si $p$ et $q$ représentent des « conditions » dans la même variable $x$ et

signifie alors: « $p$ implique, quel que soit $x$, $q$ », ou sous une autre forme: « chaque solution de $p$ est aussi une solution de $q$ ».

5) $p \cap q$ (*p et q*). Si $p$ et $q$ sont des propositions ou conditions, alors « $p \cap q$ » indique la proposition ou condition qui affirme simultanément $p$ et $q$. Exemple:

$2 \in \mathrm{Np} . \cap . 2 \in (2\mathrm{N})$ (deux est un nombre premier et deux est aussi un nombre pair). Nous avons dans cette écriture un premier exemple de l'emploi des points et des parenthèses.

6) $- p$ (*non p*). Si $p$ est une proposition ou une condition alors $- p$ indique la négation de $p$ (proposition ou condition *contradictoire* de $p$).

Puisque la négation d'une proposition fausse est vraie, le signe de négation permet d'écrire seulement des propositions *vraies*. Par ex., au lieu d'écrire dans un langage mixte (idéographique et commun en même temps): « $4 \in \mathrm{Np}$ est une proposition fausse », nous pourrons écrire sous forme idéographique complète: $- (4 \in \mathrm{Np})$.

La convention d'écrire seulement des propositions vraies est toujours observée dans la logique mathématique de PEANO ce qui rend superflu le signe d'assertion de la proposition isolée, employée si largement par quelques auteurs.

7) Cls (*classe*). L'écriture $a \in \mathrm{Cls}$ signifie: « $a$ est une classe ». Conformément aux observations, que nous venons de faire, l'écriture: $\mathrm{Cls} \in \mathrm{Cls}$ est un non-sens. Et cela explique les paradoxes qui résultèrent pour celui qui a voulu considérer cette écriture comme une *proposition* de logique (vraie ou fausse selon les goûts).

**11. – Classes et amas.** Je me permets de faire ici une observation que je crois nouvelle.

On distingue communément un « sac de blé » et le « tas de blé » que l'on obtient lorsque on vide le sac en le jetant par terre.

Dans le sac de blé les grains de froment sont renfermés dans la même enveloppe (le sac) ce qui permet par ex. le transport global, en bloc; dans le tas de blé, que l'on obtient en vidant le sac par terre, les grains sont éparpillés, répandus, ce qui rend impossible de les transporter globalement.

Il faut faire une distinction semblable, en logique, entre « classe » et « amas ». Les « classes » correspondent aux *sacs* d'objets matériels et les « amas » aux *tas* d'objets matériels.

Le symbole Cls indique pourtant un *amas*, précisément l'amas des classes. Et — en me référant encore à la comparaison des tas de blé — c'est un tas *si grand* qui exclut l'existence d'un sac capable de contenir tous ses éléments.

Nous dirons donc que le symbole Cls indique un *amas universel*. Et tandis que l'on a, jusqu'à présent, considéré que chaque catégorie réelle était une classe, c'est-à-dire un membre de la catégorie représentée par le symbole Cls, je crois que chaque *catégorie réelle* est une *classe* ou un *amas universel.*

On trouve d'autres symboles d'amas universels dans l'idéographie de PEANO: par ex. les suivants: Cls'Cls (*classe de classes*) indique la catégorie des classes dont les éléments sont des classes; Dyad (*dyade*) indique la catégorie constituée par les dyades; Funct (*fonction définie*) indique la catégorie constituée par les fonctions dites définies, etc..

L'amas universel le plus étendu possible — et appelé pour cela « tout » (ou *univers* logique) et représenté par V — c'est la catégorie des « objets » (réels), (de tous les *types* selon la locution de RUSSELL).

Nous observons enfin que les « objets » de la logique sont des éléments d'amas universels, tandis qu'*aucun* amas universel est un objet du calcul logique.

**12. – De quelques autres idéogrammes.** D'autres idéogrammes ont été particulièrement utiles, dans l'usage commun, mais ils représentent des idées qui peuvent être définies par celles qui ont été représentées par les symboles que nous avons déjà examinés.

8) $\ni$ (*qui*). Signe pour la *transformation* d'une *condition* dans une *catégorie réelle.*

Si $p$ indique une condition en $x$ alors l'écriture: $x \ni p$ (lire: $x$ *qui* $p$) indique la catégorie (réelle) formée par les solutions de $p$.

Si nous indiquons la catégorie $x \ni p$ par $a$ nous obtenons que $p$ a la même signification que $x \in a$. C'est-à-dire: chaque condition dans la variable $x$ peut être réduite à la forme $x \in a$, où $a$ représente une catégorie convenable. De même: chaque condition en deux variables $x$ et $y$ peut être réduite à la forme $(x; y) \in a$, où $a$ représente maintenant une catégorie de dyades, etc..

On peut ajouter à ce point que le symbole $\ni$ (*qui*) permet de donner à chaque proposition de logique (ou des mathématiques) la forme $c \in a$, où $c$ et $a$ sont respectivement un « objet » et une « catégorie » convenables, qui sont déterminés par la proposition assignée.

9) $\iota$ (*égal*). Signe pour les classes *unitaires*, c'est-à-dire: si $x$ est un élément de quelque classe, alors $\iota x$ indique la classe contenant le seul élément $x$.

10) $\rotatebox[origin=c]{180}{$\iota$}$ (*le*). Signe de l'*élément*, c'est-à-dire: si $a$ est une classe contenant un seul élément, alors $\rotatebox[origin=c]{180}{$\iota$}a$ indique l'élément appartenant à la classe $a$.

11) $\exists$ (*existe*). Signe de la proposition *existentielle*. Précisons: Si $a$ représente une catégorie réelle, alors l'écriture $\exists a$ signifie: des $a$ existent, c'est-à-dire: la catégorie $a$ n'est pas vide.

12) $\cup$ (*ou*). Signe de l'assertion *alternative*, c'est-à-dire: si $p$ et $q$ sont des propositions (ou conditions) alors $p \cup q$ indique la proposition (ou condition) qui affirme au moins l'une des propositions (ou conditions) assignées.

**13. – Remarques finales.** C'est, G. PEANO, qui a découvert la grande importance des idées représentées par les symboles $\ni$ $\supset_x$ $\in$ $\iota$ $\text{ɿ}$ $\exists$ et c'est lui qui a introduit les symboles mêmes dans la forme que nous venons d'employer (5).

L'introduction de ces symboles, particulièrement la découverte de la fonction des idées représentées par les symboles $\in$ et $\iota$ (et par leurs inverses $\ni$ et $\text{ɿ}$) et l'équivalence entre le calcul des classes et celui des conditions et la décomposition du signe $=$ dans le digramme $\in \iota$, qui en résultent, font partie des résultats les plus importants des études de logique effectuées par G. PEANO.

---

(5) En réalité, G. PEANO, fait usage de la lettre grecque $\varepsilon$ au lieu du signe $\in$.