

LUCIANO DABONI (*)

Aspetti di una interpretazione geometrica per le probabilità di eventi equivalenti. (**)

1. - Introduzione.

In un recente lavoro di B. DE FINETTI ⁽¹⁾ viene introdotta un'interessante interpretazione geometrica per le probabilità di eventi equivalenti ⁽²⁾. Con riferimento allo schema della fig. 1 si, rappresenta col punto $P_{r,n}$ (di coordinate $x = n$, $y = 2r - n$) la situazione consistente nell'aver ottenuto r ri-

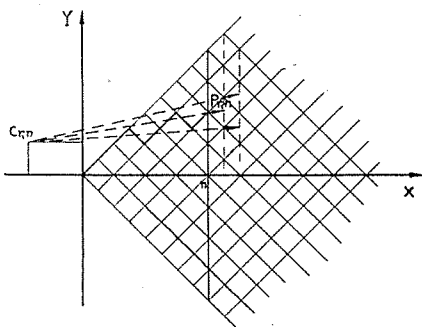


Fig. 1.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Trieste (Italia).

(**) Lavoro eseguito nell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste e ricevuto il 10-IV-1953. Per un breve riassunto dell'argomento cfr. L. DABONI, *Considerazioni geometriche sulla condizione di equivalenza per una classe di eventi*, in corso di stampa nel « Giorn. Istit. Ital. Attuari ».

⁽¹⁾ B. DE FINETTI, *Gli eventi equivalenti e il caso degenero*, Giorn. Istit. Ital. Attuari 15, 1-2, 40-64 (1952); cfr. in particolare le pp. 48-50.

⁽²⁾ Gli eventi $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ si dicono equivalenti tra loro se la probabilità che m , prefissati, di essi si verifichino è sempre la medesima qualunque sia la m -upla prescelta. Cfr. anche loc. cit. in ⁽¹⁾, annotazione ⁽¹⁾ di pag. 40.

sultati favorevoli ed $s = r - n$ sfavorevoli su n prove equivalenti. Il risultato di una successione di prove vien così rappresentato mediante una spezzata uscente dall'origine O e formata da successivi segmenti dai componenti $(+1, +1)$ o $(+1, -1)$ a seconda dell'esito favorevole o no della corrispondente prova. Per indicare in $P_{r,n}$ la probabilità $p_r^{(n)}$ di un'ulteriore prova favorevole (e per l'equivalenza tale $p_r^{(n)}$ dipende solo da n e r e non dal cammino da O a $P_{r,n}$), si tracci il vettore spiccato in $P_{r,n}$ e di componenti $+1, 2p_r^{(n)} - 1$. Sulle due direzioni possibili, ascendente e discendente, le componenti di tale vettore sono, a meno del fattore $\sqrt{2}$, rispettivamente $p_r^{(n)}$ e $q_r^{(n)} = 1 - p_r^{(n)}$.

In tale rappresentazione la condizione di equivalenza, per cui tutte le $\binom{n}{r}$ combinazioni di r risultati favorevoli su n prove (ed $s = n - r$ sfavorevoli) hanno la medesima probabilità, è caratterizzata dal fatto che, considerando un qualunque punto $P_{r,n}$ e i due successivi $P_{r+1, n+1}$ e $P_{r, n+1}$, le tre rette passanti per essi ed aventi le direzioni dei rispettivi vettori concorrono in un punto, diciamolo $C_{r,n}$. Le coordinate di tale punto sono poi:

$$x = x_0 - \frac{1}{p_{r+1}^{(n+1)} - p_r^{(n+1)}}, \quad y = y_0 - \frac{p_{r+1}^{(n+1)} + p_r^{(n+1)} - 1}{p_{r+1}^{(n+1)} - p_r^{(n+1)}},$$

con $x_0 = n + 1$, $y_0 = 2r - n$ ⁽³⁾.

Traendo lo spunto da tali considerazioni mi sono proposto di studiare la corrispondenza tra $P_{r,n}$ e $C_{r,n}$ relativamente a certe ipotesi sulla distribuzione di probabilità, $\Phi(\xi)$, delle frequenze. Ricordo che $p_r^{(n)} = \{\omega_{r+1}^{(n+1)}/\binom{n+1}{r+1}\} : \{\omega_r^{(n+1)}/\binom{n}{r}\}$, essendo $\omega_r^{(n)}$ la probabilità che su n prove esattamente r diano risultato favorevole. Nota d'altra parte, la distribuzione $\Phi(\xi)$ delle frequenze, le probabilità $\omega_r^{(n)}$ rimangono completamente individuate secondo la formula

$$\omega_r^{(n)} = \binom{n}{r} \int_0^1 \xi^r (1 - \xi)^s d\Phi(\xi) \quad (4)$$

e nel nostro caso, quindi, si ricava:

$$p_r^{(n)} = \frac{\int_0^1 \xi^{r+1} (1 - \xi)^s d\Phi(\xi)}{\int_0^1 \xi^r (1 - \xi)^s d\Phi(\xi)}.$$

In ciò che segue esaminerò gli aspetti geometrici della questione relativamente al caso di una distribuzione $\Phi(\xi)$ « discreta », limitando a qualche breve considerazione i casi relativi alle distribuzioni che ammettono una densità.

⁽³⁾ Cfr. loc. cit. in ⁽¹⁾, pag. 49.

⁽⁴⁾ Integrale di STIELTJES.

2. - Caso delle distribuzioni di tipo « discreto ».

2.1. - Cominciamo col supporre che la distribuzione $\Phi(\xi)$ assegni due masse $m_1, m_2, (m_1 + m_2 + 1)$, in due punti $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$.

Allora è:

$$(1) \quad p_r^{(n)} = \frac{m_1 \xi_1^{r+1} (1 - \xi_1)^s + m_2 \xi_2^{r+1} (1 - \xi_2)^s}{m_1 \xi_1^r (1 - \xi_1)^s + m_2 \xi_2^r (1 - \xi_2)^s}.$$

Per ricercare il luogo dei punti $C_{r,n}$ corrispondenti ai punti $P_{r,n}$, poniamo $\xi_1(1 - \xi_1)^{-1} = a^2$, $\xi_2(1 - \xi_2)^{-1} = b^2$ e calcoliamo le coordinate X, Y di $C_{r,n}$ servendoci delle precedenti $X = x_0 - \frac{1}{p_{r+1}^{(n+1)} - p_r^{(n+1)}}$, $Y = y_0 - \frac{p_{r+1}^{(n+1)} - 1}{p_{r+1}^{(n+1)} - p_r^{(n+1)}}$ e calcolando mediante la (1) le $p_r^{(n+1)}, p_{r+1}^{(n+1)}$. Si ottiene allora, al variare di $y_0 = r - s$ (ed indicheremo con y la variabile), il luogo dei punti di coordinate:

$$(2) \quad \begin{cases} X - x_0 = - \frac{\frac{m_1}{m_2} N_{a,b} \left(\frac{a}{b}\right)^y + N' + \frac{m_2}{m_1} N_{b,a} \left(\frac{a}{b}\right)^{-y}}{N}, \\ Y = y - \frac{\frac{m_1}{m_2} M_{a,b} \left(\frac{a}{b}\right)^y + M' + \frac{m_2}{m_1} M_{b,a} \left(\frac{a}{b}\right)^{-y}}{N}, \end{cases}$$

ove si è posto:

$$\begin{aligned} N &= (ab)^n (a^2 - b^2)^2, & N' &= (ab)^n (a^2 + b^2)(1 + a^2)(1 + b^2), \\ M' &= (ab)^n (a^2 + b^2)(a^2 b^2 - 1), \\ N_{a,b} &= a^{2(n+1)}(1 + a^2)^{-n}(1 + b^2)^{n+2}, & N_{b,a} &= b^{2(n+1)}(1 + b^2)^{-n}(1 + a^2)^{n+2}, \\ M_{a,b} &= a^{2(n+1)}(a^2 - 1)(1 + a^2)^{-(n+1)}(1 + b^2)^{n+2}, \\ M_{b,a} &= b^{2(n+1)}(b^2 - 1)(1 + b^2)^{-(n+1)}(1 + a^2)^{n+2}. \end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui sia $\xi_1 = \xi$ e $\xi_2 = 1 - \xi$ si ha:

$$(2') \quad \begin{cases} X - x_0 = - \frac{a^4 + 1 + a^2 \left[\frac{m_1}{m_2} a^{2y} + \frac{m_2}{m_1} a^{-2y} \right]}{(1 - a^2)^2}, \\ Y = y - \frac{a^2}{a^4 - 1} \left[\frac{m_1}{m_2} a^{2y} - \frac{m_2}{m_1} a^{-2y} \right], \end{cases}$$

con $a^2 = \xi(1 - \xi)^{-1}$, o, ove sia $m_1 = m_2 = 1/2$, addirittura:

$$(2'') \quad \begin{cases} X - x_0 = -1 - \frac{a^2}{(1 - a^2)^2} (a^y + a^{-y})^2, \\ Y = y - \frac{a^2}{a^4 - 1} (a^y + a^{-y})(a^y + a^{-y}). \end{cases}$$

Esaminiamo brevemente le caratteristiche geometriche di tali luoghi. L'ascissa X raggiunge il suo valore massimo quando sia, nella (2), $\left(\frac{a}{b}\right)^y = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{b}{1 + b^2} \cdot \frac{1 + a^2}{a}\right)^{n+1}$, ossia, per le posizioni fatte, quando: $m_1 \xi_1^{r+1} (1 - \xi_1)^s = m_2 \xi_2^{r+1} (1 - \xi_2)^s$. Le coordinate del punto $C_{r,n}$ corrispondente a tale condizione sono poi:

$$X = x_0 - \frac{(1 + b^2)(1 + a^2)}{(a^2 - b^2)^2}, \quad Y = \log_{a/b} \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{b}{1 + b^2} \cdot \frac{1 + a^2}{a}\right)^{n+1} - \frac{(a^2 b^2 - 1)(a + b)^2}{(a^2 - b^2)^2},$$

e dipendono linearmente da n . Nel caso di simmetria (2'') il massimo dell'ascissa X è raggiunto per $y = 0$ e vale $n - 4a^2(1 - a^2)^{-2}$ cioè $n - 4 \frac{\xi(1 - \xi)}{[(1 - \xi) - \xi]^2}$; Y , allora, è uguale a zero. In questo caso particolare di simmetria il parametro n figura solo nell'ascissa del punto $C_{r,n}$, e linearmente. Dunque l'insieme dei punti $C_{r,n}$ corrispondenti dei punti $P_{r,n}$ di una medesima verticale si sposta solidalmente spostando orizzontalmente la verticale stessa. L'ascissa X , massima, si è detto, per $y = 0$ decresce al crescere di $|y|$; l'ordinata Y , nulla per $y = 0$ e per $y = \pm 1$, è poi di segno opposto a y . Al divergere (positivamente o, rispettivamente, negativamente) di y , il rapporto Y/X tende ad $a \pm \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$ cioè a $\pm (\xi_2 - \xi_1)$.

2.2. - Mi è sembrato opportuno, a questo punto, onde cogliere aspetti geometrici più significativi, estendere la definizione di $p_r^{(m)}$ anche ai punti di coordinate non intere e studiare gli involuppi delle rette per i punti $P'_{r,n}$, indicando con $P'_{r,n}$ il generico punto sulla verticale $x = n$. Allora i punti $C_{r,n}$ precedentemente considerati sono i punti di incontro delle tangenti a tali curve involuppo, uscenti dai punti $P_{r,n}$ di coordinate intere.

Allo scopo, indichiamo con $f_n(y)$ la pendenza in $P_{r,n}$ e poniamo quindi $f_n(y) = 2p_r^{(m)} - 1$. Le rette uscenti da $P'_{r,n}$ hanno equazioni $Y - y = f_n(y)(X - x)$, e le equazioni parametriche dell'involuppo risultano quindi:

$$(3) \quad \begin{cases} X - x = -\frac{1}{f'_n(y)}, \\ Y = y - \frac{f_n(y)}{f'_n(y)}, \end{cases}$$

con $x = n$ e $y (= 2r - n)$ variante con continuità tra $-n$ e $+n$. Posto, nella (1), $\xi_i(1 - \xi_i)^{-1} = e^{2\lambda_i}$, ($i = 1, 2$), si perviene facilmente per la pendenza alla espressione

$$(4) \quad f_n(y) = \frac{m_1 \frac{e^{\lambda_1 y}}{(\text{Ch } \lambda_1)^n} \text{Th } \lambda_1 + m_2 \frac{e^{\lambda_2 y}}{(\text{Ch } \lambda_2)^n} \text{Th } \lambda_2}{m_1 \frac{e^{\lambda_1 y}}{(\text{Ch } \lambda_1)^n} + m_2 \frac{e^{\lambda_2 y}}{(\text{Ch } \lambda_2)^n}}$$

Di qui, posto ancora $\alpha = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$ cioè $\alpha = \frac{1}{4} \log \frac{\xi_2(1 - \xi_1)}{\xi_1(1 - \xi_2)}$, con semplici decomposizioni dei coefficienti delle funzioni esponenziali in semisomme e semidifferenze degli stessi, si perviene a

$$(4 \text{ bis}) \quad f_n(y) = \frac{A \text{Ch } \alpha y + B \text{Sh } \alpha y}{a \text{Ch } \alpha y + b \text{Sh } \alpha y},$$

i coefficienti A, B, a, b essendo definiti al modo seguente:

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m_2 \text{Th } \lambda_2}{(\text{Ch } \lambda_2)^n} + \frac{m_1 \text{Th } \lambda_1}{(\text{Ch } \lambda_1)^n} \right\}, \quad a = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m_2}{(\text{Ch } \lambda_2)^n} + \frac{m_1}{(\text{Ch } \lambda_1)^n} \right\},$$

$$B = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m_2 \text{Th } \lambda_2}{(\text{Ch } \lambda_2)^n} - \frac{m_1 \text{Th } \lambda_1}{(\text{Ch } \lambda_1)^n} \right\}, \quad b = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m_2}{(\text{Ch } \lambda_2)^n} - \frac{m_1}{(\text{Ch } \lambda_1)^n} \right\}.$$

Circa i segni di tali coefficienti bisognerà discuterli a seconda dei tre possibili casi: I) $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1/2$, II) $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$, III) $1/2 < \xi_1 < \xi_2 < 1$. In ogni caso è $a > |b|$; b è ≥ 0 a seconda che $\frac{m_2}{m_1} \geq \left(\frac{\text{Ch } \lambda_2}{\text{Ch } \lambda_1} \right)^n$. A , negativo nel primo caso e positivo nel terzo, è, nel caso intermedio, ≥ 0 a seconda che $\frac{m_2}{m_1} \geq \left(\frac{\text{Ch } \lambda_2}{\text{Ch } \lambda_1} \right)^n \frac{\text{Th } \lambda_1}{\text{Th } \lambda_2}$. Invece B è positivo nel caso intermedio e, negli altri casi, è ≥ 0 a seconda che valgano le precedenti disuguaglianze per A (e ciò nel caso III) o le opposte (caso I). Allora è $|A| > |B|$ mentre nel caso II) è $|A| < B$.

A seconda di tali possibili distinzioni si possono condensare le combinazioni lineari delle funzioni iperboliche che compaiono nella (4 bis) in due sole funzioni iperboliche, una a numeratore ed una a denominatore della $f_n(y)$, introducendo convenientemente ampiezze e sfasamenti. Precisamente, la (4 bis)

può scriversi nei tre casi considerati (il primo e il terzo presentano ovvie simmetrie):

$$\begin{array}{l}
 \text{I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \xi_1 < \xi_2 < 1, \\ f_n(y) = -\mathfrak{E} \frac{\text{Ch}(\alpha y + \Gamma)}{\text{Ch}(\alpha y + \gamma)}, \end{array} \right. \quad \text{II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \xi_1 < \frac{1}{2} < \xi_2 < 1, \\ f_n(y) = \mathfrak{E}' \frac{\text{Sh}(\alpha y + \Gamma')}{\text{Ch}(\alpha y + \gamma')}, \end{array} \right. \\
 \\
 \text{III)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} < \xi_1 < \xi_2 < 1, \\ f_n(y) = \mathfrak{E} \frac{\text{Ch}(\alpha y + \Gamma)}{\text{Ch}(\alpha y + \gamma)}, \end{array} \right.
 \end{array}$$

essendo:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E} &= [(1 - 2\xi_1)(1 - 2\xi_2)]^{1/2}, & \Gamma &= \frac{1}{2} \log \frac{m_2 (1 - 2\xi_2) [\xi_2(1 - \xi_2)]^{n/2}}{m_1 (1 - 2\xi_1) [\xi_1(1 - \xi_1)]^{n/2}}, \\
 \mathfrak{E}' &= [(1 - 2\xi_1)(2\xi_2 - 1)]^{1/2}, & \Gamma' &= \frac{1}{2} \log \frac{m_2 (2\xi_2 - 1) [\xi_2(1 - \xi_2)]^{n/2}}{m_1 (1 - 2\xi_1) [\xi_1(1 - \xi_1)]^{n/2}}, \\
 \gamma &= \frac{1}{2} \log \frac{m_2 [\xi_2(1 - \xi_2)]^{n/2}}{m_1 [\xi_1(1 - \xi_1)]^{n/2}}.
 \end{aligned}$$

Le equazioni degli involuipi cercati sono, corrispondentemente ai tre casi,

$$(5.I) \quad \left\{ \begin{array}{l} X - x = \frac{1}{\alpha \mathfrak{E}} \frac{\text{Ch}^2(\alpha y + \gamma)}{\text{Sh}(\Gamma - \gamma)}, \\ Y = y - \frac{1}{2\alpha \text{Sh}(\Gamma - \gamma)} [\text{Ch}(2\alpha y + \Gamma + \gamma) + \text{Ch}(\Gamma - \gamma)], \end{array} \right.$$

$$(5.II) \quad \left\{ \begin{array}{l} X - x = -\frac{1}{\alpha \mathfrak{E}'} \frac{\text{Ch}^2(\alpha y + \gamma)}{\text{Ch}(\Gamma' - \gamma)}, \\ Y = y - \frac{1}{2\alpha \text{Ch}(\Gamma' - \gamma)} [\text{Sh}(2\alpha y + \Gamma' + \gamma) + \text{Sh}(\Gamma' - \gamma)], \end{array} \right.$$

$$(5.III) \quad \left\{ \begin{array}{l} X - x = -\frac{1}{\alpha \mathfrak{E}} \frac{\text{Ch}^2(\alpha y + \gamma)}{\text{Sh}(\Gamma - \gamma)}, \\ Y = y - \frac{1}{2\alpha \text{Sh}(\Gamma - \gamma)} [\text{Ch}(2\alpha y + \Gamma + \gamma) + \text{Ch}(\Gamma - \gamma)]. \end{array} \right.$$

Trattasi, in ogni caso, di curve dotate di cuspidi ordinaria e volgenti le convessità nel verso delle x negative. Particolarmente semplice ed interessante

il caso di simmetria ($m_1 = m_2 = 1/2$, $\xi_2 = 1 - \xi_1$), che rientra nel caso II), e relativamente al quale, più semplicemente, le equazioni dell'involuppo sono:

$$(5.II \text{ bis}) \quad \begin{cases} X - x = -\frac{1}{\alpha \operatorname{Th} \alpha} \operatorname{Ch}^2 \alpha y, \\ Y = y - \frac{1}{2\alpha} \operatorname{Sh} \alpha y, \end{cases}$$

con $\alpha = 1/2 \log \xi/(1 - \xi)$.

Tale curva è dotata di cuspidi ordinarie nel punto di coordinate $X = n - 1/(\alpha \operatorname{Th} \alpha)$, $Y = 0$. L'asse delle x è la tangente cuspidale ed è asse di simmetria della curva (cfr. fig. 2). Nelle equazioni dell'involuppo n compare solamente nell'ascissa e addittivamente. Ciò significa che la curva si sposta solidalmente quando si sposti orizzontalmente la verticale ($x = n$) sulla quale abbiamo considerato i punti $P'_{r,n}$. Andamento analogo presentano le curve involuppo di cui alle (5.I), (5.II), (5.III).

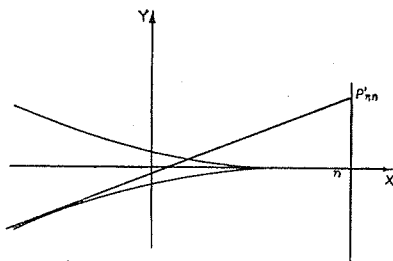


Fig. 2.

Invero, com'è naturale ormai, esse presentano tutte una cuspidi caratterizzata dall'essere, in ogni caso, $\alpha y + \gamma = 0$, condizione che equivale alla $m_1 \xi_1^r (1 - \xi_1)^s = m_2 \xi_2^r (1 - \xi_2)^s$ e che, interpretata sulla (1), ci dice che i pesi della media ponderata, $p_r^{(n)}$ sono allora uguali.

Le coordinate di tali cuspidi e, a meno del fattore di normalità ϱ , i coseni direttori delle tangenti cuspidali t sono, nei tre casi,

$$\begin{array}{l} \text{I)} \\ \text{II)} \end{array} \quad \begin{cases} X = n + \frac{1}{\alpha \bar{E}} \frac{1}{\operatorname{Sh}(\Gamma - \gamma)}, \\ Y = -\frac{1}{\alpha} [\gamma - \operatorname{Cth}(\Gamma - \gamma)], \end{cases} \quad \begin{cases} \cos \hat{t}x = \varrho \frac{2\alpha}{\bar{E}} \frac{1}{\operatorname{Sh}(\Gamma - \gamma)}, \\ \cos \hat{t}y = -\varrho 2\alpha \operatorname{Cth}(\Gamma - \gamma). \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = n - \frac{1}{\alpha \bar{E}'} \frac{1}{\operatorname{Ch}(\Gamma' - \gamma)}, \\ Y = -\frac{1}{\alpha} [\gamma + \operatorname{Th}(\Gamma' - \gamma)], \end{cases} \quad \begin{cases} \cos \hat{t}x = -\varrho \frac{2\alpha}{\bar{E}'} \frac{1}{\operatorname{Ch}(\Gamma' - \gamma)}, \\ \cos \hat{t}y = -\varrho 2\alpha \operatorname{Th}(\Gamma' - \gamma). \end{cases}$$

$$\text{III) } \begin{cases} X = n - \frac{1}{\alpha \Xi} \frac{1}{\text{Sh}(\Gamma - \gamma)}, \\ Y = -\frac{1}{\alpha} [\gamma - \text{Cth}(\Gamma - \gamma)], \end{cases} \quad \begin{cases} \cos \hat{t}x = -\varrho \frac{2\alpha}{\Xi} \frac{1}{\text{Sh}(\Gamma - \gamma)}, \\ \cos \hat{t}y = -\varrho 2\alpha \text{Cth}(\Gamma - \gamma). \end{cases}$$

Circa le posizioni di tali cuspidi si osservi che entrambe le coordinate X, Y dipendono ora da n , e linearmente $\left[\gamma = \frac{1}{2} \log \frac{m_2}{m_1} + \frac{n}{4} \log \frac{\xi_2(1-\xi_2)}{\xi_1(1-\xi_1)}, \Gamma - \gamma \right.$ e $\Gamma - \gamma$ sono indipendenti da n, α e Ξ dipendono solamente da ξ_1 e ξ_2 . Invece i coseni direttori delle tangenti cuspidali si mantengono inalterati al variare di n ; nè in essi figurano, in alcun modo, le masse m_1, m_2 attribuite alle frequenze ξ_1, ξ_2 .

2.3. - Sin qui si sono esaminati i vari aspetti geometrici relativi alla distribuzione $\Phi(\xi)$ che assegna due masse m_1, m_2 in due punti ξ_1, ξ_2 . Si potrà ora considerare la naturale estensione della distribuzione di ν masse $m_1, m_2, m_3, \dots, m_\nu$ concentrate nei punti $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_\nu$. Già però nel caso $\nu = 3$ il calcolo delle varie grandezze interessanti il problema riesce assai laborioso. Riducendosi al caso più semplice di simmetria, per cui $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = 1/2$, $\xi_3 = 1 - \xi$, e procedendo in maniera analoga a quella sin qui seguita per la precedente distribuzione, si determinano abbastanza facilmente le equazioni del luogo dei punti $C_{r,n}$ e dell'involuppo delle tangenti per i punti $P'_{r,n}$. Per il luogo dei punti $C_{r,n}$ si ha:

$$(6) \quad \begin{cases} X - x_0 = -\frac{4a^2(a^\nu + a^{-\nu})^2 + a^2(a^2 - 1) + 2a^n(a^2 + 1)^{-(n+2)}(a^\nu + a^{-\nu}) + a^{2n}(a^2 + 1)^{-2(n+1)}}{(a^2 - 1)^2 [a^n(a^2 + 1)^{-n}(a^\nu + a^{-\nu}) + 4]}, \\ Y = y - \frac{4a^2(a^\nu - a^{-\nu})^2 + a^n(a^2 + 1)^{-n}(a^\nu + a^{-\nu}) + 4(a^2 - 1)}{(a^2 - 1)^2 [a^n(a^2 + 1)^{-n}(a^\nu + a^{-\nu}) + 4]}, \end{cases}$$

ove $a^2 = \xi(1 - \xi)^{-1}$, e, per l'involuppo si hanno le semplici equazioni:

$$(7) \quad \begin{cases} X - x = -\frac{1}{\lambda} \frac{(\text{Ch } \lambda y + \alpha_n)^2}{\text{Th } \lambda \frac{1}{1 + \alpha_n \text{Ch } \lambda y}}, \\ Y = y - \frac{1}{\lambda} \frac{\text{Sh } \lambda y (\text{Ch } \lambda y + \alpha_n)}{1 + \alpha_n \text{Ch } \lambda y}, \end{cases}$$

ove $\lambda = \frac{1}{2} \log \frac{\xi}{1 - \xi}$ e $\alpha_n = \frac{1}{2} (\text{Ch } \lambda)^n$.

Brevemente: la curva è dotata di una cuspidi ordinaria nel punto $X = n - \frac{1}{\lambda \text{Th } \lambda} (\alpha_n + 1)$, $Y = 0$ e può presentare o meno altre due cuspidi (ordinarie) a seconda che $\frac{\alpha_n^2 - 2}{\alpha_n}$ sia maggiore di 1 o no (ossia a seconda che ν

sia maggiore di $\log 4 / \log \frac{1}{2\sqrt{\xi(1-\xi)}}$ o no, e quindi assintoticamente tale condizione è sempre verificata). Nel caso in cui la curva è tricuspidata l'andamento è quello segnato in fig. 3. In B la tangente cuspidale è l'asse X , nei punti A

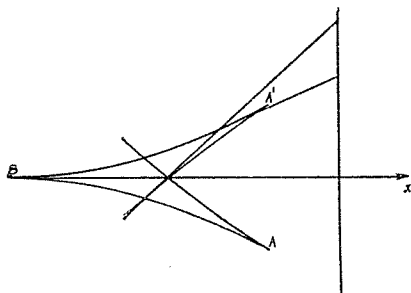


Fig. 3.

e A' i coseni direttori delle tangenti (simmetriche rispetto all'asse X) sono dati (a meno del fattore di normalità ϱ) da

$$\cos \hat{t}x = -\varrho \frac{2\lambda}{\text{Th } \lambda} \frac{\alpha_n^2 - 4}{\alpha_n^2}, \quad \cos \hat{t}y = -\varrho \lambda (\alpha_n^2 - 4)(\alpha_n^2 - 2).$$

2.4. - Senza ulteriormente insistere sui risultati di questa particolare distribuzione potremo valerci di essi per prevedere ed illustrare qualitativamente il comportamento della curva involuppo se la distribuzione è, più in generale, quella che assegna ν masse m_i ai ν punti ξ_i , ($i = 1, 2, \dots, \nu$). Se n è sufficien-

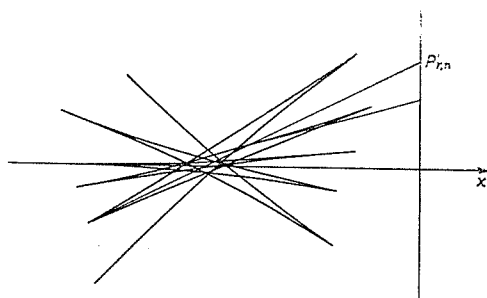


Fig. 4.

temente grande, si tratterà di una curva $2\nu - 3$ cuspidata con $\nu - 2$ cuspidi volgenti le convessità nel verso positivo dell'asse X e $\nu - 1$ volgenti invece le convessità nel verso delle x decrescenti (cfr. fig. 4). Per ragioni che saranno dette tra breve, chiamerò cuspidi « di equilibrio » quest'ultime. A sua volta il

comportamento asintotico della curva involuppo relativo a tale distribuzione illustrerà l'analogo comportamento degli involuppi precedentemente considerati.

Riprendiamo, allo scopo, l'espressione (4) della pendenza $f_n(y)$ che ora sarà:

$$f_n(y) = \frac{\sum_1^v m_i \frac{e^{\lambda_i y}}{(\text{Ch } \lambda_i)^n} \text{Th } \lambda_i}{\sum_1^v m_i \frac{e^{\lambda_i y}}{(\text{Ch } \lambda_i)^n}},$$

e poniamo $\eta = y/n$, sicchè scriveremo:

$$F_n(\eta) = \frac{\sum_1^v m_i \left(\frac{e^{\lambda_i \eta}}{\text{Ch } \lambda_i} \right)^n \text{Th } \lambda_i}{\sum_1^v m_i \left(\frac{e^{\lambda_i \eta}}{\text{Ch } \lambda_i} \right)^n}.$$

La nuova variabile η varia ora tra -1 e $+1$ [è $\eta = 2(r/n) - 1$].

Cominciamo col considerare la funzione $e^{\lambda \eta} / \text{Ch } \lambda$ di λ . È subito visto che, fissato η , essa assume un unico valor massimo in corrispondenza a $\lambda = \text{Sett Th } \eta$. Di più la potenza n -esima $(e^{\lambda \eta} / \text{Ch } \lambda)^n$ può rendersi piccola a piacere all'esterno di un conveniente intorno di tale punto, pur di prendere n sufficientemente grande.

Passiamo quindi ad esaminare rapidamente il comportamento asintotico di $F_n(\eta)$ al variare di η . La $F_n(\eta)$ tende a $\text{Th } \lambda_i$ quando $\eta \rightarrow \text{Th } \lambda_i$ (cioè quando $\eta \rightarrow 2\xi_i - 1$ ossia $r/n \rightarrow \xi_i$); allora, per quanto detto a proposito di $(e^{\lambda \eta} / \text{Ch } \lambda)^n$, il contributo dei termini di indice diverso da i è trascurabile. In un intorno di tale punto la $F_n(\eta)$ si mantiene sensibilmente costante e uguale a $\text{Th } \lambda_i$; se poi $\eta \neq 2\xi_i - 1$, contano solamente i contributi dei termini relativi alle due frequenze ξ_i e ξ_{i+1} , tra le quali cadono i valori di ξ corrispondenti a η e rimangono trascurabili i termini di indici diversi. Tutto avviene come nel caso della distribuzione che assegna due masse in due punti: si incontra un valore η di « equilibrio » per il quale i pesi attribuiti alle due frequenze ξ_i e ξ_{i+1} sono uguali (cfr. le conclusioni del n. 2.2).

Allora è

$$m_i \xi_i^r (1 - \xi_i)^s = m_{i+1} \xi_{i+1}^r (1 - \xi_{i+1})^s$$

od anche, introducendo i rapporti $\xi = r/n$, $1 - \xi = s/n$,

$$m_i^{1/n} \xi_i^\xi (1 - \xi_i)^{1-\xi} = m_{i+1}^{1/n} \xi_{i+1}^\xi (1 - \xi_{i+1})^{1-\xi}$$

e quindi, divergendo n ,

$$\xi = \frac{\log \frac{1 - \xi_{i+1}}{1 - \xi_i}}{\log \frac{\xi_i (1 - \xi_{i+1})}{\xi_{i+1} (1 - \xi_i)}},$$

ovvero, in termini di η ($= 2\xi - 1$) e λ ($= \frac{1}{2} \log \frac{\xi}{1-\xi}$),

$$\eta = \frac{\log \operatorname{Ch} \lambda_{i+1} - \log \operatorname{Ch} \lambda_i}{\lambda_{i+1} - \lambda_i},$$

cioè:

$$\eta = \frac{\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \operatorname{Th} \lambda \, d\lambda}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} = \operatorname{Th} \bar{\lambda},$$

indicando con $\bar{\lambda}$ un conveniente valore tra λ_i e λ_{i+1} .

Ancora, la $F_n(\eta)$ è monotona non decrescente, come risulta dal fatto che la derivata $F'_n(\eta)$ non è mai negativa. È infatti:

$$F'_n(\eta) = \frac{\sum_1^n m_i m_j \left(\frac{e^{\lambda_i \eta}}{\operatorname{Ch} \lambda_i} \right)^n \left(\frac{e^{\lambda_j \eta}}{\operatorname{Ch} \lambda_j} \right)^n (\lambda_i - \lambda_j) (\operatorname{Th} \lambda_i - \operatorname{Th} \lambda_j)}{\sum_1^n m_i m_j \left(\frac{e^{\lambda_i \eta}}{\operatorname{Ch} \lambda_i} \right)^n \left(\frac{e^{\lambda_j \eta}}{\operatorname{Ch} \lambda_j} \right)^n}.$$

Variando η tra -1 e $+1$ avviene allora che, allorchè $\eta = \operatorname{Th} \lambda_i$, diviene massimo il termine $(e^{\lambda_i \eta} / \operatorname{Ch} \lambda_i)^n$ e trascurabili gli altri di indice diverso, per cui il numeratore della $F'_n(\eta)$ può essere reso piccolo a piacere in convenienti intorno di tali punti, pur di prendere n sufficientemente elevato. Se, invece, η è un valore compreso tra $\operatorname{Th} \lambda_i$ e $\operatorname{Th} \lambda_{i+1}$ conta solamente il contributo del termine $(e^{\lambda_i \eta} / \operatorname{Ch} \lambda_i)^n (e^{\lambda_{i+1} \eta} / \operatorname{Ch} \lambda_{i+1})^n$, potendosi rendere piccoli a piacere i fattori di indici diversi. Per tali valori di η la $F'_n(\eta)$ si riduce in sostanza a

$$\frac{m_i m_{i+1} \left(\frac{e^{\lambda_i \eta}}{\operatorname{Ch} \lambda_i} \right)^n \left(\frac{e^{\lambda_{i+1} \eta}}{\operatorname{Ch} \lambda_{i+1}} \right)^n (\lambda_i - \lambda_{i+1}) (\operatorname{Th} \lambda_i - \operatorname{Th} \lambda_{i+1})}{\left[m_i \left(\frac{e^{\lambda_i \eta}}{\operatorname{Ch} \lambda_i} \right)^n + m_{i+1} \left(\frac{e^{\lambda_{i+1} \eta}}{\operatorname{Ch} \lambda_{i+1}} \right)^n \right]^2},$$

che diviene massima quando i due addendi del denominatore sono uguali, cioè proprio nel punto η di « equilibrio » precedentemente considerato. Insomma, l'andamento asintotico di $F_n(\eta)$ è quello di una funzione costante a tratti, non decrescente, con $\nu - 1$ salti nei punti di « equilibrio » $\eta_{i, i+1} = 2\bar{\xi}_{i, i+1} - 1$, essendo $\bar{\xi}_{i, i+1}$ i valori di ξ definiti, tramite λ , dalla

$$\operatorname{Th} \bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \operatorname{Th} \lambda \, d\lambda.$$

Ne seguono facilmente le conclusioni accennate circa il comportamento della curva involuppo e la giustificazione della nomenclatura introdotta per le cuspidi. Così, ad esempio, nel caso $\nu = 3$ già esaminato, le cuspidi in A e A' (che si presentano, si è detto, per n sufficientemente grande) sono cuspidi di « equilibrio », non lo è, invece, la cuspide in B .

3. - Caso delle distribuzioni dotate di « densità ».

La funzione di ripartizione $\Phi(\xi)$ è ora derivabile, ed indichiamo con $\varphi(\xi)$ la sua derivata (densità di distribuzione). Particolarizzando la $\varphi(\xi)$ si possono considerare alcuni casi interessanti.

3.1. - Una distribuzione caratteristica della ripartizione su un intervallo ($0 \leq \xi \leq 1$) è la distribuzione « Beta » definita al modo seguente: $\varphi(\xi) = K\xi^\alpha(1-\xi)^\beta$ con $\alpha, \beta > -1$ e $K = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}$. Con riguardo all'interpretazione geometrica di cui ci stiamo occupando, è subito visto che, in tale ipotesi, la curva involuppo si riduce ad un punto C le cui coordinate sono: $X = -(\alpha + \beta + 2)$, $Y = \beta - \alpha$.

$$\text{Infatti, allora, è: } p_r^{(n)} = \frac{\int_0^1 \xi^{r+\alpha+1}(1-\xi)^{s+\beta} d\xi}{\int_0^1 \xi^{r+\alpha}(1-\xi)^{s+\beta} d\xi}, \text{ cioè } p_r^{(n)} = \frac{r + \alpha + 1}{n + \alpha + \beta + 2},$$

e quindi $f_n(y) (= 2p_r^{(n)} - 1) = \frac{y + \alpha - \beta}{n + \alpha + \beta + 2}$, da cui X ed Y secondo le (3).

Così, in particolare, se $\varphi(\xi) \equiv 1$, ($\alpha = \beta = 0$, $K = 1$), il punto C è il punto di coordinate $X = -2$, $Y = 0$. Ciò del resto appariva subito osservando che tutte le frequenze hanno ora ugual probabilità e ne segue che $p_r^{(n)} = \frac{r+1}{n+2}$ ⁽⁵⁾.

3.2. - Tale particolarità della curva involuppo di ridursi ad un punto cessa di verificarsi modificando la densità $\varphi(\xi)$, e basta per questo assumere, ad esempio, anziché una distribuzione « Beta » una combinazione lineare di due distribuzioni di tale tipo (e di parametri diversi). Come esempio interessante indico quello relativo alla distribuzione definita da $\varphi(\xi) = a + b\xi(1-\xi)$.

Poichè dev'essere $\int_0^1 \varphi(\xi) d\xi = 1$ è, intanto, $b = -6(a-1)$ ed ancora, perchè $\varphi(\xi)$ abbia il significato di densità di una distribuzione, dev'essere $0 \leq a \leq 3$. Al variare del parametro a l'andamento di $\varphi(\xi)$ è quello di una

⁽⁵⁾ Cfr., ancora, loc. cit. in ⁽¹⁾, pag. 49.

parabola con la concavità verso il basso se $0 \leq a < 1$ e verso l'alto se $1 < a \leq 3$.
 Se $a = 1$ si ritrova la distribuzione $\varphi(\xi) \equiv 1$ già considerata (cfr. fig. 5).

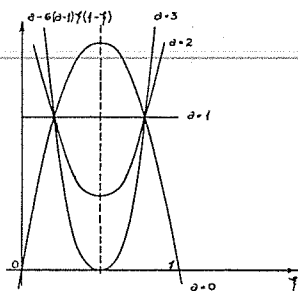


Fig. 5.

Esaminiamo il comportamento delle corrispondenti curve involuppo. Allo scopo, calcolata

$$p_r^{(n)} = \frac{\int_0^1 \xi^{r+1} (1-\xi)^s [a - 6(a-1)\xi(1-\xi)] d\xi}{\int_0^1 \xi^r (1-\xi)^s [a - 6(a-1)\xi(1-\xi)] d\xi},$$

si ottiene

$$f_n(y) = \frac{1}{n+4} \frac{3(a-1)y^3 + [3(n+2)^2 - a(n^2 - 2n - 12)]y}{3(a-1)y^2 + (n+2)[3(n+2) - an]},$$

ove, come al solito, $y (= r-s)$ rappresenta lo scarto tra il numero di prove favorevoli e quelle sfavorevoli su n colpi, nella convenzione assunta di far variare n (ed y) con continuità.

Le equazioni della curva involuppo sono quindi:

$$(8) \quad \begin{cases} X = -4 \frac{A^2 y^4 + A M y^2 + N}{A^2 y^4 + 2 A M' y^2 + N'}, \\ Y = - \frac{B y^3}{A^2 y^4 + 2 A M' y^2 + N'}, \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} A &= 3(a-1), & M &= 6(n+2)^2 - an(n+2), \\ N &= (n+2)[9(n+2)^3 - 3an(n+2)(3n+7) + a^2 n^2(2n+5)], \\ M' &= 3(n+2)^2 - a(n^2 + 4n + 6), \\ N' &= (n+2)[9(n+2)^3 - 6a(n+2)(n^2 - 6) + a^2 n(n^2 - 2n - 12)], \\ B &= 24a(a-1)(n+3). \end{aligned}$$

È subito visto che per $a = 1$ l'inviluppo si riduce al punto C di coordinate $X = -2$, $Y = 0$ com'è naturale, perchè allora $\varphi(\xi) \equiv 1$ e per $a = 0$, al punto C di coordinate $X = -4$, $Y = 0$ [allora $\varphi(\xi) = 6\xi(1 - \xi)$ è una distribuzione « Beta » di parametri $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $K = 6$].

Ma vediamo di studiare gli altri casi, e per questo consideriamo ancora le derivate X' , Y' delle coordinate dei punti dell'inviluppo.

Si ha:

$$(9) \quad \begin{cases} X' = (n+4) \frac{A^2 B}{D^2} y \left[y^2 - \frac{(n+2)[3(n+2) - an]}{a-1} \right] \cdot \left[y^2 + \frac{(n+2)[3(n+2) - an]}{3(a-1)} \right], \\ Y' = \frac{A^2 B}{D^2} y^2 \left[y^2 - \frac{(n+2)[3(n+2) - an]}{a-1} \right] \left[y^2 + \frac{3(n+2)^2 - a(n^2 - 2n - 12)}{3(a-1)} \right], \end{cases}$$

avendo indicato con D la quantità $A^2 y' + 2AM'y^2 + N'$ e con i detti significati per A , B , M' , N' .

Dunque, in ogni caso, $X' = Y' = 0$ se $y = 0$, e quindi la curva inviluppo presenta sempre una cuspide nel punto C di coordinate

$$X = \frac{9(n+2)^3 - 3an(n+2)(3n+7) + a^2 n^2 (2n+5)}{9(n+2)^3 - 6a(n+2)(n^2-6) + a^2 n(n^2-2n-12)}, \quad Y = 0$$

(X è simmetrica rispetto a y , Y in un conveniente intorno di $y = 0$ è monotona e di segno opposto a y o dello stesso segno a seconda che a sia maggiore o minore di 1). La curva inviluppo volge le convessità secondo il verso delle x negative se a maggiore di 1, nel verso opposto se a minore di 1 (cfr. fig. 6).

Interessa però discutere anche il fattore $y^2 - \frac{(n+2)[3(n+2) - an]}{a-1}$ che compare nelle (9). Fissato n , la corrispondente equazione $y^2 = \frac{(n+2)[3(n+2) - an]}{a-1}$ ammette soluzioni reali o no a seconda del valore di a , e precisamente se $a < 1$ non ne ammette e se $a > 1$ dev'essere $a < \frac{3(n+2)}{n}$. (Si è già incontrata la condizione $a \leq 3$ alla quale questa si riconduce per n tendente all'infinito.)

Tenuto conto, poi, che la variabile y è limitata nell'intervallo $(-n, +n)$, dev'essere $\frac{(n+2)[3(n+2) - an]}{a-1} \leq n^2$ e quindi $a \geq \frac{2(n^2 + 3n + 3)}{n^2 + n}$ (condizione sempre verificata se $a > 2$). Allora si annullano X' , Y' per

$$y = \pm \sqrt{\frac{(n+2)[3(n+2) - an]}{a-1}}$$

Nei due punti dell'involuppo, diciamoli C' e C'' , corrispondenti a tali valori della y si incontrano ancora due cuspidi, com'è facile constatare [i fattori $y^2 + \frac{(n+2)[3(n+2)-an]}{3(a-1)}$, $y^2 + \frac{3(n+2)^2 - a(n^2 - 2n - 12)}{3(a-1)}$ non si annullano mai nell'intervallo $-n \leq y \leq +n$].

3.3. - I risultati si visualizzano meglio illustrando il comportamento delle curve involuppo al tendere di n all'infinito. Le equazioni di tali curve limite si ottengono, d'altra parte, subito quando si ponga, nelle (8), $y = n\eta$ e si faccia tendere n all'infinito. Il nuovo parametro η (già introdotto al n. 2.4) ha il significato intrinseco di pendenza delle rette tangenti all'involuppo ed uscenti dai punti $P'_{r,n}$, e, in funzione di tale parametro, le equazioni cercate sono:

$$(10) \quad \begin{cases} X = -4 \frac{9(a-1)^2\eta^4 + 3(a-1)(6-a)\eta^2 + (3-a)(3-2a)}{[3(a-1)\eta^2 + 3-a]^2}, \\ Y = -24 \frac{a(a-1)\eta^3}{[3(a-1)\eta^2 + 3-a]^2}. \end{cases}$$

Si tratta dunque ora di considerare, al variare del parametro a che caratterizza la distribuzione, l'arco di curva algebrica relativo ai valori di η compresi nell'intervallo chiuso $(-1, +1)$. Poichè, d'altra parte, è:

$$\begin{cases} X' = \frac{72a(a-1)^2\eta}{[3(a-1)\eta^2 + 3-a]^3} \left[\eta^2 - \frac{3-a}{a-1} \right], \\ Y' = \eta X', \end{cases}$$

appare subito che il valore $a = 2$ è l'elemento di separazione tra due classi di curve, le une tricuspide, le altre unicuspide. Invero, se $a \geq 2$ la $\eta^2 = \frac{3-a}{a-1}$ ammette due soluzioni reali nell'intervallo chiuso $(-1, +1)$; se $a < 2$ tale circostanza non si verifica. E allora, in ogni caso, la curva limite presenta una cuspidè (per $\eta = 0$) nel punto C di coordinate $X = -4 \frac{3-2a}{3-a}$, $Y = 0$, e, se $a \geq 2$, altre due cuspidi nei punti, diciamoli C' e C'' , di coordinate $X = -\frac{1}{2} \frac{24-7a}{3-a}$, $Y = \pm \frac{3}{2} \frac{a}{\sqrt{(3-a)(a-1)}}$ (cfr. fig. 6).

La distinzione delle due classi di curve è posta in luce ancor meglio dalla indagine seguente che ci consentirà, tra l'altro, di ricavare alcuni elementi interessanti il grafico delle curve involuppo (limiti) nei vari casi.

Indichiamo con P' , P'' i punti terminali ($\eta^2=1$) delle curve limiti e con X_P , Y_P le corrispondenti coordinate (P' , P'' sono simmetrici rispetto l'asse x ; sceglieremo, ove occorra, il punto di ordinata positiva). Sieno X_C , Y_C le coordinate dei punti C' e C'' (per essi vale la medesima osservazione fatta per i punti P' e P'').

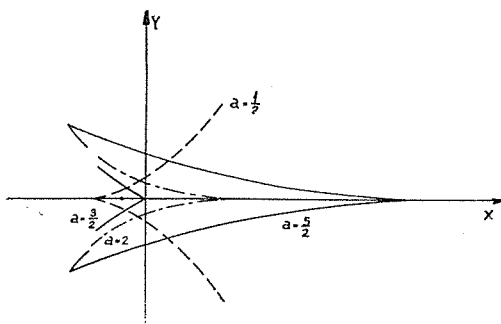


Fig. 6.

Eliminando il parametro a tra le $X_P = 2 \frac{3-4a}{a}$ e $Y_P = \pm 6 \frac{a-1}{a}$, si ottiene l'equazione del luogo dei punti P' , P'' :

$$(11) \quad Y^2 - (X + 2)^2 = 0,$$

e con procedimento analogo, a partire dalle $X_C = \frac{1}{2} \frac{7a-24}{3-a}$, $Y_C = \pm \frac{3}{2} \frac{a}{\sqrt{(3-a)(a-1)}}$, si ottiene per il luogo delle cuspidi C' e C'' l'equazione:

$$(12) \quad Y^2 + 27 \frac{(X+4)^2}{4X+17} = 0.$$

Con riferimento al già considerato sistema di assi ortogonali X , Y , le curve di equazioni (11) e (12) rappresentano rispettivamente una coppia di rette e una cubica. Per $X = -5$ (ascissa terminale X_P nel caso $a = 2$) le curve presentano un contatto tripunto nel punto $P' \equiv (-5, 3)$ e in $P'' \equiv (-5, -3)$. Per $X < -5$ i corrispondenti archi di cubica sono contenuti all'interno dell'angolo acuto formato dalla coppia di rette (cfr. fig. 7). Un'altra volta, dunque, è chiarita la distinzione tra i due tipi di curve unicuspidata e tricuspidate (rispettivamente $a < 2$, $a \geq 2$). Nel caso $a = 2$ i punti terminali P' e P'' coincidono rispettivamente con C' , C'' e più propriamente sono, in tal caso, dei punti di arresto.

Ma la considerazione dei luoghi (11) e (12) consente, di più, di risolvere graficamente il problema di determinare l'ascissa X_c (quindi le ordinate) delle cuspidi C' e C'' quando sia data l'ascissa X_p (e quindi le ordinate) dei punti terminali P' e P'' (o viceversa).

Diciamo, infatti, $X_q = X_p + \omega Y_p$ l'ascissa della generica proiezione obliqua sull'asse x di uno dei due punti terminali. È $X_q = 2 \frac{a(3\omega - 4) + 3(1 - \omega)}{a}$ ed eliminando il parametro a tra essa e l'ascissa $X_c = \frac{1}{2} \frac{7a - 24}{3 - a}$ dei punti C' e C'' si ottiene subito:

$$X_q X_c + 2X_c(3 - 2\omega) + 4X_q + (25 - 17\omega) = 0.$$

In particolare, per $\omega = 1/2$, la corrispondenza tra X_c e X_q diviene:

$$(13) \quad X_q X_c + 4(X_c + X_q) + \frac{33}{2} = 0,$$

che rappresenta, sull'asse delle X , un'involuzione (ellittica). Assegnate allora due coppie di ascisse X'_q, X'_c , e X''_q, X''_c , corrispondentesi in tale involuzione (e che si calcoleranno particolarizzando convenientemente il parametro a) la X_c , corrispondente ad una assegnata X_q (cioè ad una assegnata X_p), è subito individuata tramite la ben nota costruzione del quadrilatero e, viceversa, data X_c si ricava X_q e quindi X_p .

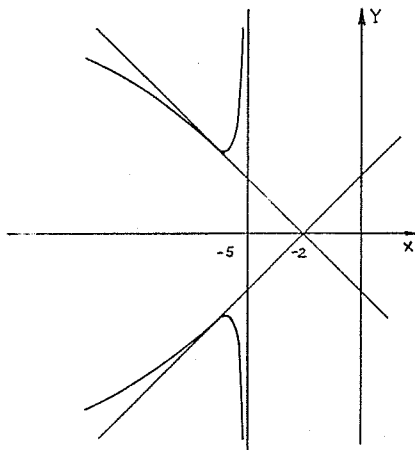


Fig. 7.

3.3. — L'esempio che abbiamo ora illustrato ci ha fatto vedere come le curve involuppo possano presentare delle cuspidi, anche se la distribuzione di fre-

quenze è dotata di densità. È spontaneo chiedersi a quali particolarità delle distribuzioni corrispondano quelle singolarità degli involuppi.

Già si è detto che ogni distribuzione « Beta » riduce il corrispondente involuppo ad un punto. Vien fatto allora di presumere che in corrispondenza ai punti nei quali sulla curva involuppo, generata da una distribuzione di densità $\varphi(\xi)$, si incontra una singolarità cuspidale, la $\varphi(\xi)$ abbia contatto di ordine sufficientemente elevato con una « Beta » (o almeno con una funzione proporzionale ad una « Beta »). Vediamo, in quel che segue, di dirimere quest'ultima questione.

Allo scopo, indichiamo con $B(\xi)$ ogni funzione del tipo $k\xi^\alpha(1-\xi)^\beta$ (con $\alpha, \beta > -1$). Se, in particolare, $k = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}$, la corrispondente $B(\xi)$ è la densità di una ripartizione « Beta ». Calcolando le derivate successive di $B(\xi)$ ed ordinando convenientemente rispetto ad α e β , si ha:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{\xi} - \frac{\beta}{1-\xi} = \frac{B'}{B}, \\ \frac{\alpha}{\xi^2} + \frac{\beta}{(1-\xi)^2} = \left(\frac{B'}{B}\right)^2 - \frac{B''}{B}, \\ \frac{\alpha}{\xi^3} - \frac{\beta}{(1-\xi)^3} = \frac{1}{2} \left[\frac{B'''}{B} + 2 \left(\frac{B'}{B}\right)^3 - 3 \frac{B'B''}{B^2} \right]. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ottengono per α e β le uguaglianze:

$$(15) \quad \begin{cases} \alpha = \xi^2 \left\{ (1-\xi) \left[\left(\frac{B'}{B}\right)^2 - \frac{B''}{B} \right] + \frac{B'}{B} \right\}, \\ \beta = (1-\xi)^2 \left\{ \xi \left[\left(\frac{B'}{B}\right)^2 - \frac{B''}{B} \right] - \frac{B'}{B} \right\}, \end{cases}$$

e quindi l'equazione differenziale delle $B(\xi)$ secondo la

$$(16) \quad \frac{B'''}{B} = \frac{2(1-2\xi)}{\xi(1-\xi)} \left[\left(\frac{B'}{B}\right)^2 - \frac{B''}{B} \right] + \frac{2}{\xi(1-\xi)} \frac{B'}{B} - 2 \left(\frac{B'}{B}\right)^3 + 3 \frac{B'B''}{B^2} \quad (6).$$

(6) Si può darne una forma più semplice introducendo la derivata logaritmica di $B(\xi)$. Detta $p = B'/B$ tale derivata logaritmica, la equazione differenziale si scrive al modo seguente:

$$p'' = \frac{2}{\xi(1-\xi)} [(2\xi-1)p' + p].$$

Riprendiamo allora l'esempio considerato precedentemente in cui $\varphi(\xi) = a - 6(a-1)\xi(1-\xi)$. È:

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\varphi'}{\varphi} = (2\xi - 1)A(\xi; a), \\ \frac{\varphi''}{\varphi} = 2A(\xi; a), \\ \frac{\varphi'''}{\varphi} = 0, \end{cases}$$

avendo indicato con $A(\xi; a)$ la quantità $\frac{6(a-1)}{6(a-1)\xi^2 - 6(a-1)\xi + a}$.

Se vi sono dei valori ξ per i quali la $\varphi(\xi)$ presenta contatto *quadripunto* con una $B(\xi)$, i parametri α e β di tale $B(\xi)$ debbono soddisfare le (14) nei cui secondi membri si sostituiscano i rapporti B'/B , B''/B , B'''/B con le corrispondenti (17). Le (15) ci danno allora:

$$(18) \quad \begin{cases} \alpha = \xi^2 A(\xi; a) [(1-\xi)(2\xi-1)^2 A(\xi; a) + (4\xi-3)], \\ \beta = (1-\xi)^2 A(\xi; a) [\xi(2\xi-1)^2 A(\xi; a) + (1-4\xi)], \end{cases}$$

e quindi la (16) diviene:

$$(19) \quad (2\xi-1)A(\xi; a) \left[(2\xi-1)^2 A(\xi; a) - 3 \right] \left[A(\xi; a) + \frac{1}{\xi(1-\xi)} \right] = 0.$$

Discutiamo i casi che si presentano nella soluzione di tale equazione:

Dalla $2\xi-1=0$ e dalle (18) segue $\alpha = \beta = -\frac{1}{4} A\left(\frac{1}{2}; a\right) = 3 \frac{a-1}{a-3}$, e, poichè α e β debbono essere maggiori di -1 , dev'essere $a < 3/2$.

Dalla $A(\xi; a) = 0$ segue $a = 1$ e quindi $\varphi(\xi) \equiv 1$ coincide con la « Beta » ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) iperosculatrice.

La $(2\xi-1)^2 A(\xi; a) - 3 = 0$, risolta rispetto ξ , porge $\xi = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{3-a}{a-1}} \right)$. Allora è $r_i (= 2\xi-1) = \pm \sqrt{\frac{3-a}{a-1}}$ e quindi si ritrovano sull'involuppo le cuspidi C' e C'' , quando sia naturalmente $a \geq 2$ (purchè sia $0 \leq \xi \leq 1$). In tal

caso $\alpha = \frac{3}{4(3-a)} \left[4-a+a \sqrt{\frac{3-a}{a-1}} \right]$, $\beta = \frac{3}{4(3-a)} \left[4-a+(a-2) \sqrt{\frac{3-a}{a-1}} \right]$ e

la condizione $\alpha, \beta > -1$ equivale alla $\frac{3a}{\sqrt{(3-a)(a-1)}} > \frac{7a-24}{3-a}$, cioè (cfr. n. 3.2)

$Y_c > X_c$. Infine la $A(\xi; a) + \frac{1}{\xi(1-\xi)} = 0$ è identicamente soddisfatta con $a = 0$. Allora $\varphi(\xi)$ è ancora una distribuzione « Beta » ($\alpha = 1, \beta = 1$).

Dunque sinchè $a < 3/2$ vi è un contatto quadripunto tra la $\varphi(\xi)$ ed una funzione del tipo « Beta » (in $\xi = 1/2$), e quando $a \geq 2$ vi sono i valori $\xi = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{3-a}{a-1}} \right)$ in corrispondenza ai quali $\varphi(\xi)$ ammette due contatti di quell'ordine con una funzione di quel tipo.

E veniamo alle conclusioni: Ogni volta che la nostra densità $\varphi(\xi)$ ammette un contatto (quadripunto) con una $B(\xi)$, la curva involuppo limite corrispondente presenta una cuspidè. Non si verifica, però, il fatto inverso, e cioè possono incontrarsi cuspidi sull'involuppo senza che $\varphi(\xi)$ abbia un contatto di quell'ordine con una $B(\xi)$ (almeno nell'intervallo $0 \leq \xi \leq 1$ che ci interessa).

Ne segue una distinzione tra i due tipi di cuspidi che si incontrano sulle linee involuppo. Dirò « di natura locale » o semplicemente « locali » quelle che corrispondono a punti di contatto del terzo ordine della densità $\varphi(\xi)$ con una funzione del tipo « Beta », « di natura globale » o semplicemente « globali » le altre. Precisamente, a parte i casi $a = 0$ e $a = 1$, l'involuppo presenta solamente una cuspidè « locale » se $0 < a < 3/2$, una cuspidè « globale » e due « locali » se $a \geq 2$, solamente una « globale » se $3/2 < a < 2$ (cfr. fig. 6).

Le precedenti considerazioni mi permettono ora di indicare, a proposito della questione geometrica trattata, un legame tra le distribuzioni di tipo discreto e quelle dotate di densità (almeno del tipo particolare studiato). Basterà, per questo, ricordare l'andamento della densità $\varphi(\xi)$ al variare di a (cfr. fig. 5). Indicherò, per speditezza di linguaggio, con I gli involuppi relativi a ripartizioni di tipo discreto, con J quelli relativi alla ripartizione di densità $\varphi(\xi)$.

Così, se $0 < a < 1$ le $\varphi(\xi)$ sono convesse e le relative ripartizioni $\Phi(\xi)$ si comportano come quelle di tipo discreto, che concentrano masse al centro dell'intervallo $(0, 1)$. Tale analogia si giustifica ove si riprenda il caso della ripartizione che assegna tre masse (uguali) nei tre punti $\xi_1 = \xi, \xi_2 = 1/2, \xi_3 = 1 - \xi$ (cfr. n. 2.3). In quel caso, invero, si incontrano sugli I due cuspidi « di equilibrio » solo per n sufficientemente grande, e precisamente per $n > \log 4 / \log \frac{1}{2\sqrt{\xi(1-\xi)}}$. E quindi, fissato n , appena ξ e $1 - \xi$ sieno abbastanza prossimi, sulla corrispondente curva involuppo I non figura altro che la sola cuspidè « non di equilibrio » che trova riscontro ora nella cuspidè « locale » la quale, d'altra parte, si presenta in ogni involuppo J (cioè per ogni n) e non solamente nel caso limite (cfr. n. 3.2).

Se, invece, $1 < a < 3/2$ la cuspidè « locale » degli involuppi J può interpretarsi come l'analogo di una cuspidè « di equilibrio » sugli I relativi ad una

ripartizione che condensi masse uguali in punti ξ e $1 - \xi$ sufficientemente prossimi (cfr. n. 2.1).

Quando sia, poi, $3/2 < a < 2$, la cuspidale « globale » dei corrispondenti J è l'analogo della cuspidale « di equilibrio » che si incontra sugli I , se le ripartizioni di tipo discreto che danno luogo a tali I concentrano masse uguali in punti ξ e $1 - \xi$ sufficientemente distanti (cfr. ancora n. 2.1).

Infine, anche la cuspidale « globale » degli J quando il parametro a è ≥ 2 può esser riguardata come l'analogo di una cuspidale « di equilibrio » sugli I se, anche allora, le $\Phi(\xi)$ relative a tali I , condensano masse uguali in prossimità degli estremi dell'intervallo $(0, 1)$.

