Rivista Mat. Univ. Parma 4, 133-143 (1953)

ANTONIO DE CASTRO (*)

Sopra l'equazione differenziale delle oscillazioni non-lineari. (**)

1. – La Meccanica non-lineare, cioè lo studio delle oscillazioni non-lineari, costituisce ormai un capitolo notevole della Meccanica e dell'Analisi; i lavori fatti in questo campo negli ultimi anni (vedasi la Bibliografia alla fine di questo lavoro) mostrano l'interesse di questo studio anche per le applicazioni.

In questo articolo noi consideriamo l'equazione differenziale generale delle oscillazioni non-lineari; nei nn. 2 a 6, sotto opportune ipotesi, dimostriamo l'esistenza di almeno una soluzione periodica di questa equazione; nel n. 7 dimostriamo l'unicità e la stabilità delle soluzioni periodiche di un particolare sistema differenziale, risultato che applichiamo nel n. 8 all'equazione differenziale considerata nel n. 2.

2. – Consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t)\dot{x} + g(x) = e(t), \tag{2.1}$$

equivalente al sistema del primo ordine

$$\dot{x} = v \,, \qquad \dot{v} = e(t) - f(x, v, t)v - g(x) \,, \tag{2.2}$$

dove $f(x, v, t)$, $g(x)$ ed $e(t)$ sono funzioni continue dei loro argomenti, $f(x, v, t)$ è lipschitziana in x, v, e $g(x)$ in x, in ogni dominio limitato, e supponiamo che esistano due costanti positive, a, E, e una funzione $\varphi(x, v)$, anche continua e lipschitziana in ogni dominio limitato, tali che si abbia

$$E > |e(t)| \,, \tag{i}$$

$$f(x, v, t) > \varphi(x, v) \,, \tag{ii}$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico U. DINI, Università, Firenze (Italia).

(**) Ricevuto il 7-IV-1953.

essendo $\varphi(x, v)$ limitata inferiormente, cioè $\varphi(x, v) \geqslant -K$, $(K > 0)$, e tale che sia

$$0 < \varepsilon \leqslant \varphi(x, v) \leqslant A \qquad \text{per} \quad |x| > a,$$

e supponiamo anche che sia

$$\text{(iii)} \qquad g(x) = -g(-x), \qquad g(x) \neq 0 \quad \text{per} \quad x \neq 0,$$

$g(x)$ crescente, $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$.

Dimostreremo che si può costruire nel piano x-v una curva chiusa C tale che le curve integrali della (2.1) che tagliano C passano dal dominio esterno al suo dominio interno. Dopo, l'applicazione del teorema di BROUWER a una certa trasformazione topologica del dominio limitato da C in sè stesso, permette di dimostrare l'esistenza di una soluzione periodica se $f(x, v, t)$ ed $e(t)$ sono funzioni periodiche a periodo T.

Interessa considerare l'equazione differenziale

$$\frac{dv}{dx} = \frac{e(t) - g(x)}{v} - f(x, v, t), \tag{2.3}$$

alla quale associamo queste altre

$$\frac{dv}{dx} = \frac{E - g(x)}{v} - \varphi(x, v) \qquad \text{se} \quad v \geqslant 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{E + g(x)}{v} - \varphi(x, v) \qquad \text{se} \quad v \leqslant 0, \tag{2.5}$$

che sono, rispettivamente, le equazioni caratteristiche dei sistemi

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = E - \varphi(x, v)v - g(x), \tag{2.6}$$

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = -E - \varphi(x, v)v - g(x), \tag{2.7}$$

che passiamo a studiare.

3. – Cominciamo con il sistema (2.6) e dimostriamo che ha nel piano x-v delle curve integrali in forma di spirale in modo che, se x_P e x_Q sono le ascisse corrispondenti a due intersezioni successive P, Q della curva coll'asse OX, è $|x_P| > |x_Q|$.

Anzitutto segue da (2.6) e dalle condizioni imposte che nel piano x-v le curve integrali sufficientemente lontane dall'origine hanno forma di spirale. Basta infatti vedere che per $v > 0$, la x è crescente $\left[\frac{dv}{dx}\right.$ decresce da $+\infty$ a $-\infty$ se il punto (x, v) con $v \geqslant 0$ varia da $(x_0, 0)$ con $x_0 < 0$ a $(x_5, 0)$ con $x_5 > 0$, avendo x_0 e x_5 il significato che preciseremo tra $\left.\text{poco}\right]$, e per $v < 0$ la x è decrescente $\left[\frac{dv}{dx}\right.$ decresce da $+\infty$ a $-\infty$ se il punto (x, v) con $v \leqslant 0$ varia da $(x_5, 0)$ a un punto $(x_i, 0)$ con $\left.x_i < 0\right]$. E segue anche che, fissati due numeri positivi M, N, si può scegliere un punto $P_0 \equiv (x_0, v_0)$ in modo che la corrispondente curva integrale della (2.4) sia in un giro esterna al rettangolo definito da $x = \pm M$, $v = \pm N$; è facile infatti, data la forma di spirale delle curve integrali, prendere una di queste curve in modo che sia, in un giro, esterna alle curve che tagliano i lati del rettangolo.

Sia c tale che

$$g(c) = E + \frac{1}{2}\frac{E^2}{\beta\varepsilon^2}, \qquad (\beta > 0).$$

Scegliamo il numero M maggiore dei tre numeri a, b, c, essendo b un numero positivo tale che sia

$$\int_{-b}^{b} \varphi(x, v)\, dx \geqslant \alpha > 0$$

[l'esistenza di questo numero b è una conseguenza immediata delle condizioni imposte alla $\varphi(x, v)$].

Definiamo la funzione $\lambda(x, v)$ con la relazione

$$\lambda(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + G(x),$$

dove è

$$G(x) = \int_0^x g(\xi)\, d\xi,$$

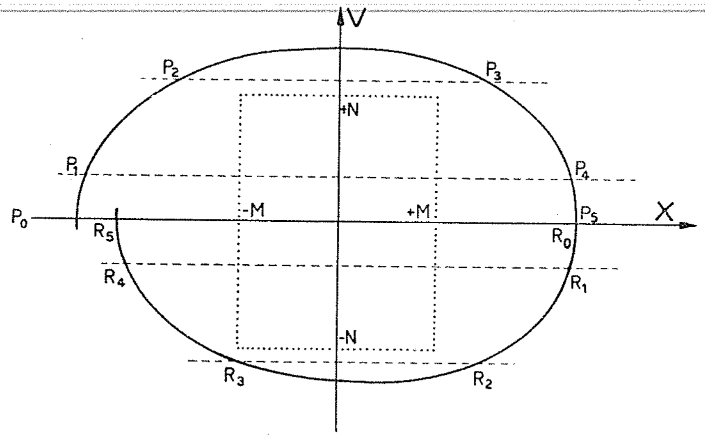
e perciò $G(x) = G(-x)$.

Sarà, per $x = x(t)$ e ricordando la (2.6),

$$\frac{d\lambda}{dt} = v\dot{v} + g(x)v = Ev - \varphi(x, v)v^2,$$

e perciò per $|x| > a$, $v > E/\varepsilon$, la funzione $\lambda(x, v)$ è decrescente con t crescente.

Ciò posto, consideriamo (vedi figura) l'arco di curva integrale $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$, $P_i = P_i(x_i, v_i)$; $x_i > M$ per $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; $v_i = 0$ per $i = 0{,}5$; $v_i = E/\varepsilon$ per $i = 1{,}4$; $v_i > N$ per $i = 2{,}3$.



Ciò premesso dimostriamo che è $x_5 < |x_0|$.

In P_0P_1 è evidente che si ha

$$|x_1| < |x_0| \,. \tag{3.1}$$

In P_1P_2 e P_3P_4 la funzione $\lambda(x, v)$ è decrescente e pertanto si ha:

$$G(x_1) + \frac{1}{2}\frac{E^2}{\varepsilon^2} > G(x_2) + \frac{1}{2}v_2^2 \,, \tag{3.2}$$

$$G(x_3) + \frac{1}{2}v_3^2 > G(x_4) + \frac{1}{2}\frac{E^2}{\varepsilon^2} \,, \tag{3.3}$$

relazioni che utilizzeremo più avanti.

In P_2P_3 si ha, per integrazione di (2.4) fra P_2 e P_3,

$$v_3 - v_2 = \int_{x_2}^{x_3} \left[\frac{E}{v} - \frac{g(x)}{v} - \varphi(x, v)\right] dx \,,$$

ossia

$$0 = \int_{x_2}^{x_3} \frac{E}{v}\, dx - \int_{x_2}^{0} \frac{g(x)}{v}\, dx - \int_{0}^{x_3} \frac{g(x)}{v}\, dx - \int_{x_3}^{|x_2|} \varphi(x, v)\, dx - \int_{|x_2|}^{x_3} \varphi(x, v)\, dx \,,$$

cioè, ricordando che è

$$v > N\,, \qquad \int_{x_2}^{|x_2|} \varphi(x, v)\, \mathrm{d}x > \alpha\,, \qquad G(x) = G(-x) \geqslant 0\,,$$

sarà

$$0 < \frac{E}{N}(|x_2| + x_3) + \frac{G(x_2)}{N} - \alpha - \int_{|x_2|}^{x_3} \varphi(x, v)\, \mathrm{d}x\;;$$

ma, siccome N si può scegliere arbitrariamente grande e in $(|x_2|, x_3)$ è $\varepsilon \leqslant \varphi(x, v) \leqslant A$, segue subito dalla relazione precedente che è $|x_2| > x_3$ e che, fissato un numero positivo β_1 e scelto N ed x_2 in modo che sia

$$N > \frac{2E|x_2| + G(x_2)}{\alpha - \beta_1}\,,$$

è

$$0 < -\beta_1 + (|x_2| - x_3)A\,,$$

e perciò

$$|x_2| - x_3 > \frac{\beta_1}{A} = \beta > 0\,. \tag{3.4}$$

In P_4P_5 si ha, ricordando (2.4) e che in questo arco è $\varphi(x, v) > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} < \frac{E - g(x)}{v}\,,$$

e perciò la curva integrale dell'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{E - g(x)}{v}\,, \tag{3.5}$$

che passa per P_4, taglia l'asse OX in un punto P_5' di ascissa x_5', $(x_5' > x_5)$; indi per integrazione di (3.5) fra P_4 e P_5' si ottiene

$$0 - \frac{1}{2}v_4^2 = E(x_5' - x_4) - [G(x_5') - G(x_4)] = E(x_5' - x_4) - (x_5' - x_4)\, g(\xi_1)\,, \tag{3.6}$$

essendo $x_4 < \xi_1 < x_5'$. Da qui segue

$$x_5' - x_4 = \frac{(1/2)\, v_4^2}{g(\xi_1) - E},$$

e perciò per la curva integrale della (2.4) sarà

$$x_5 - x_4 < \frac{(1/2)\, v_4^2}{g(x_4) - E}. \tag{3.7}$$

Dalla (3.6) segue anche, essendo $G(x) - Ex$ crescente con x, per $x > M$,

$$G(x_5) - G(x_4) - E(x_5 - x_4) < \frac{1}{2}\, v_4^2, \tag{3.8}$$

e dalle (3.2), (3.3) e (3.4) che è anche

$$G(x_1) - G(x_4) > G(x_2) - G(x_3) = (|x_2| - x_3)\, g(\xi_2),$$

essendo $|x_2| > \xi_2 > x_3$, e perciò ricordando (3.4) si ha

$$G(x_1) - G(x_4) > \beta g(\xi_2). \tag{3.9}$$

Da (3.8) e (3.9) segue

$$G(x_1) - G(x_5) > \beta g(\xi_2) - \frac{1}{2}\, v_4^2 - E(x_5 - x_4);$$

il secondo membro sarà positivo se

$$\beta g(\xi_2) > \frac{1}{2}\, v_4^2 + E(x_5 - x_4),$$

vale a dire se

$$\beta g(x_3) > \frac{1}{2}\, v_4^2 + \frac{1}{2}\, E \frac{v_4^2}{g(x_4) - E} = \frac{1}{2} \frac{v_4^2 g(x_4)}{g(x_4) - E};$$

ma, essendo $x_4 > x_3$ e la funzione $\dfrac{g(x)}{g(x) - E}$ decrescente con x crescente, la disuguaglianza anteriore sarà certamente verificata se si verifica

$$\beta g(x_3) > \frac{1}{2} \frac{v_4^2 g(x_3)}{g(x_3) - E},$$

cioè se è

$$g(x_3) > \frac{1}{2}\frac{v_4^2}{\beta} + E\,,$$

che è verificata in virtù della scelta fatta di M. Perciò si ha

$$G(x_1) - G(x_5) > 0\,,$$

cioè $|x_1| > x_5$.

E infine, ricordando (3.1), si ha

$$|x_0| > x_5\,,$$

come volevasi dimostrare. Trovata una curva con questa proprietà si possono dedurne infinite altre, per esempio aumentando l'ordinata v_2 di P_2.

4. – Nel semipiano $v < 0$ si procede in modo simile considerando l'equazione differenziale (2.5) delle caratteristiche del sistema (2.7). Sia $R_0R_1R_2R_3R_4R_5$ la curva integrale che passa per il punto P_5 ($= R_0$). Questa curva integrale è, evidentemente, esterna al prolungamento della curva $P_0P_1 \ldots P_5$, come segue subito comparando (2.4) e (2.5). Sia R_5 l'intersezione con OX (vedi figura). Con un metodo analogo a quello del n. 3 si ha

$$|x_{R_5}| < x_{R_0}\,,$$

e perciò

$$|x_{R_5}| < |x_{P_0}|\,. \tag{4.1}$$

5. – Ciò premesso, consideriamo la curva chiusa C definita nel modo seguente:

Per $v > 0$, C è l'arco $P_0P_1 \ldots P_5$ di curva integrale della (2.6); per $v < 0$, C è l'arco $R_0 \ldots R_5$ di curva integrale della (2.7); la curva C si chiude con il segmento rettilineo R_5P_0.

Dimostriamo adesso che *qualunque curva integrale della* (2.1) *taglia C penetrando nel suo dominio interno.*

Infatti, se il taglio accade nell'arco P_0P_5 (cioè per $v > 0$), segue da (2.3), (2.4) e da (ii) che la pendenza della curva integrale della (1.1) è minore di quella di C; se il taglio accade in R_0R_5, da (2.3) e (2.5) segue lo stesso; e infine per i punti del segmento R_5P_0 si verifica la stessa circostanza. Dunque il teorema è dimostrato.

6. – Ciò posto dimostriamo che, *se $f(x, v, t)$ ed $e(t)$, oltre a soddisfare le ipotesi dichiarate nel* n. 2, *sono funzioni periodiche rispetto a t ed a periodo comune T [$e(t)$ non costante], l'equazione differenziale* (2.1) *ha almeno una soluzione periodica a periodo T.*

Infatti, consideriamo come punto iniziale ($t = 0$) di una curva integrale $[x(t), y(t)]$ di (2.1) il punto $A_0 \equiv (x(0), v(0))$ interno o su C. Tutti i punti della curva integrale restano interni a C per $t > 0$ e in particolare questo accade al punto $A_T \equiv (x(T), v(T))$. Se consideriamo la trasformazione topologica del dominio limitato da C in se stesso, definita da $\mathcal{T}A_0 = A_T$, trasformazione che lascia inalterata (2.1), questa trasformazione ha almeno un punto unito A (in virtù del teorema di Brouwer); e questo equivale a dire che la soluzione di (2.1) uscente da A ha il periodo T. Una tale soluzione è una effettiva soluzione periodica perchè, essendo $e(t)$ non costante, l'equazione differenziale (2.1) non ammette una integrale costante.

7. – Passiamo a stabilire l'unicità della soluzione periodica. Per questo scopo consideriamo prima il seguente sistema di equazioni:

$$\dot{x} = y - \chi(x, t) , \qquad \dot{y} = -x - \psi(y, t) , \tag{7.1}$$

dove $\chi(x, t)$ e $\psi(y, t)$ sono funzioni continue dei loro argomenti, con derivate parziali rispetto a x e y continue in ogni dominio limitato, periodiche rispetto a t, e a periodo minimo T, essendo poi

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} \geqslant 0 , \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} \geqslant 0, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} > 0 ,$$

salvo in punti isolati.

Premettiamo il seguente

Lemma. *Se $x_1(t)$, $y_1(t)$ e $x_2(t)$, $y_2(t)$ sono due soluzioni distinte del sistema* (7.1), *allora la funzione*

$$D(t) \equiv \{[x_2(t) - x_1(t)]^2 + [y_2(t) - y_1(t)]^2\}^{1/2} \tag{7.2}$$

è monotona decrescente.

Infatti, derivando (7.2) si ha

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{D}[(x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)] ,$$

da cui, considerando (7.1),

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{D}\{(x_2 - x_1)[y_2 - y_1 - \chi(x_2, t) + \chi(x_1, t)] +$$

$$+ (y_2 - y_1)[-x_2 + x_1 - \psi(y_2, t) + \psi(y_1, t)]\} =$$

$$= -\frac{1}{D}\{(x_2 - x_1)[\chi(x_2, t) - \chi(x_1, t)] + (y_2 - y_1)[\psi(y_2, t) - \psi(y_1, t)]\} =$$

$$= -\frac{1}{D}\left[(x_2 - x_1)^2\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)_{x=\xi} + (y_2 - y_1)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{y=\eta}\right],$$

e quindi per due soluzioni diverse si ha

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} < 0 .$$

Siccome $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$ è una funzione continua, la relazione precedente dimostra il Lemma.

Dimostriamo adesso il

Teorema. *Se il sistema* (7.1) *ha una soluzione periodica, allora questa soluzione periodica ha il periodo T e tutte le altre soluzioni di* (7.1) *tendono a questa quando $t \to \infty$.*

Per la dimostrazione seguiamo un noto ragionamento di N. LEVINSON [1] che, per brevità, riassumiamo.

Sia $[\bar{x}(t), \bar{y}(t)]$ una soluzione periodica di (7.1), che, come si verifica subito sostituendo in (2.1), deve avere come periodo un multiplo di T, che designeremo con T_1. Sia $[x_0(t), y_0(t)]$ un'altra soluzione di (7.1), e sia $D_0(t)$ la distanza fra $[\bar{x}(t), \bar{y}(t)]$ e $[x_0(t), y_0(t)]$. Sarà, in virtù del Lemma,

$$\lim_{t\to\infty} D_0(t) = A \geqslant 0 ,$$

e dimostriamo che se $A > 0$ si cade in un assurdo. Se $D_n(t)$ indica la distanza fra $[(x_0(t + nT_1), y_0(t + nT_1)]$ e $[\bar{x}(t), \bar{y}(t)]$, sarà

$$D_n(t) = D_0(t + nT_1) ,$$

e perciò

$$\lim_{n\to\infty} D_n(t) = A . \tag{7.3}$$

Segue da qui che, se P_n è il punto $(x_0(nT_1), y_0(nT_1))$ e $\bar{P}$ il punto $(\bar{x}(0), \bar{y}(0))$, la distanza $P_n\bar{P}$ tende ad A; così l'insieme dei punti P_n, $(n \geqslant 0)$, ha almeno un punto di accumulazione; sia Q uno di questi. Sia $[x(t), y(t)]$ la soluzione del sistema (7.1) che passa per Q per $t = 0$. Per ragioni di continuità da (7.3) segue

$$D(t) = \{[x(t) - \bar{x}(t)]^2 + [y(t) - \bar{y}(t)]^2\}^{1/2} = A ,$$

cioè $D(t)$ non è una funzione decrescente, in contraddizione con il Lemma. Perciò tutte le soluzioni di (7.1) devono tendere verso $[\bar{x}(t), \bar{y}(t)]$ se $t \to \infty$.

È facile adesso provare che $[\bar{x}(t), \bar{y}(t)]$ ha il periodo T. Infatti, se $[\bar{x}(t), \bar{y}(t)]$ avesse il periodo $T_1 \neq T$, la soluzione $[\bar{x}(t - T), \bar{y}(t - T)]$ non tenderebbe verso $[\bar{x}(t), \bar{y}(t)]$ quando $t \to \infty$, cosa che è assurda.

8. – Passiamo a considerare l'equazione (2.1). È evidente che il sistema (7.1) è equivalente all'equazione

$$\ddot{x} + \chi_x(x, t)\dot{x} + \psi([\dot{x} + \chi(x, t), t] + x + \chi_t(x, t) = 0, \tag{8.1}$$

perciò la soluzione periodica di (2.1) (l'esistenza di una almeno di queste soluzioni è stata provata nei nn. 2 a 6) è l'unica soluzione periodica se esistono due funzioni $\chi(x, t)$ e $\psi(y, t)$ verificanti le condizioni indicate nel n. 7 e tali che (2.1) e (8.1) siano equivalenti; tutte le altre soluzioni di (2.1) tendono in questo caso verso quella soluzione, quando $t \to \infty$.

Noi siamo in questo caso, ad esempio, se consideriamo l'equazione

$$\ddot{x} + [\varphi'(x) + \dot{x}^2 + 3\dot{x}\varphi(x) + 3\varphi^2(x)]\,\dot{x} + x + \varphi^3(x) = e(t) ,$$

con $\varphi(x)$ continua con la sua derivata prima da $-\infty$ a $+\infty$ [ad esempio $\varphi(x) = x^3$], ed essendo $e(t)$ una funzione periodica.

Così pure, se consideriamo l'equazione

$$\ddot{x} + [\dot{x}^2 + 3\dot{x}e(t) + 3e^2(t)]\dot{x} + x = -e'(t) - e^3(t) ,$$

che corrisponde al caso

$$\chi(x, t) = e(t), \quad \psi(y, t) = y^3 ,$$

essendo $e(t)$ una funzione continua, con la sua derivata prima, e periodica, possiamo sempre applicare il Teorema del n. 7.

Bibliografia.

[1] N. LEVINSON, *On a non-linear differential equation of the second order*, J. Math. Physics **22**, 181-187 (1943).

[2] N. LEVINSON and O. SMITH, *A general equation for relaxation oscillations*. (Duke Math. J. **9**, 382-403 (1942).

Una aggiornata bibliografia si trova nelle Conferenze seguenti (pubblicate negli Atti del IV Congresso della Unione Matematica Italiana, Taormina 1951):

[3] G. SANSONE, *Le equazioni delle oscillazioni non-lineari. Risultati analitici.*

[4] D. GRAFFI, *Equazioni delle oscillazioni non-lineari in relazione alle applicazioni.*