Rivista Mat. Univ. Parma 4, 69-82 (1953)

JAURÈS CECCONI (*)

Sull' approssimazione delle superficie di Fréchet. (**)

1. – Sia Q il quadrato unitario $[0 \leqslant u,\ v \leqslant 1]$ del piano (u, v) e sia

$$(T, Q): \qquad x = x(u, v)\,, \qquad y = y(u, v)\,, \qquad z = z(u, v)\,, \qquad (u, v) \in Q$$

una trasformazione continua di Q nello spazio (x, y, z) o spazio E.

Sia S la superficie di FRÉCHET del tipo della 2-cella individuata da (T, Q).

Sia (T, Q^*) la trasformazione continua subordinata da (T, Q) sul contorno, orientato positivamente, Q^* di Q, e sia $\vartheta(S)$ la linea di FRÉCHET individuata da (T, Q^*), che sarà nel seguito chiamata contorno di S.

Diremo che una superficie S è quasi poliedrica se essa ammette una rappresentazione, sia la (T, Q) sopra considerata, che è quasi lineare (1) in ogni regione poligonale chiusa interna a Q.

Ci proponiamo in questo lavoro di dimostrare il seguente

Teorema. *Ogni superficie di Fréchet del tipo della 2-cella, di classe L,* (cfr. n. 2) *può essere approssimata, insieme con la propria area secondo Lebesgue$_2$ mediante superficie quasi poliedriche Σ aventi lo stesso contorno di S.*

La dimostrazione di questo teorema sarà fondata su di un notevole risultato di A. MAMBRIANI [3] intorno al cosiddetto « problema di GEÖCZE » e su di una osservazione di L. CESARI [2] al risultato di A. MAMBRIANI.

Un analogo risultato sarà provato per superficie non degeneri (vedi n. 9) facendo uso dei noti teoremi di rappresentazione per tali superficie. Una applicazione di questo teorema ci consentirà di ottenere una dimostrazione di un teorema di E. R. REIFENBERG [4] sul confronto fra l'area di LEBESGUE ed un'area introdotta dallo stesso E. R. REIFENBERG.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica L. TONELLI, Università, Pisa (Italia).

(**) Ricevuto il 25-V-1953.

(1) Una trasformazione (T, Q) si dice quasi lineare sulla regione poligonale $R \in Q$ se esiste una decomposizione di R in triangoli su ciascuno dei quali (T, Q) è lineare.

2. – Sia (T, Q) data come nel n. 1.

Diremo che (T, Q) è di classe L_2 se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

a) $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono assolutamente continue secondo TONELLI (A.C.T.) su Q,

b) le derivate $x_u, x_v, \ldots, z_v$, che esistono in virtù di a) quasi ovunque su Q, sono su Q quadrato integrabile (secondo LEBESGUE).

Una superficie S sarà detta di classe L_2 se ammette una rappresentazione di classe L_2.

3. – Dimostriamo dapprima il nostro teorema nel caso particolare in cui $\vartheta(S)$ sia di lunghezza finita.

Consideriamo due gruppi finiti di punti $[u_i]$, $[v_j]$ di $(0, 1)$:

$$[u_i]: \qquad 0 = u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_m < u_{m+1} = 1 ,$$

$$[v_j]: \qquad 0 = v_1 < v_2 < v_3 < \ldots < v_n < v_{n+1} = 1 ,$$

diciamo P_{rs} il punto (u_r, v_s) e diciamo t'_{ij}, t''_{ij} i triangoli, appartenenti a Q, di vertici $(P_{ij}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1})$ e $(P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1})$ rispettivamente.

Consideriamo la regione poligonale semplice $R_1 \subset Q$ costituita dai $2(mn+2)$ triangoli t'_{ij}, t''_{ij} che hanno al più un punto in comune con Q^*.

Diciamo T'_{ij}, T''_{ij} i triangoli dello spazio E i cui vertici sono le immagini secondo (T, Q) dei vertici dei triangoli t'_{ij}, t''_{ij} appartenenti a Q. Diciamo (T_0, R_1) la trasformazione continua che si ottiene rappresentando linearmente sui triangoli t'_{ij}, t''_{ij} appartenenti a R_1 i corrispondenti triangoli T'_{ij}, T''_{ij}:

La trasformazione continua (T_0, R_1) individua una superficie poliedrica Σ_1 i cui vertici appartengono a S.

In virtù di un risultato di A. MAMBRIANI [3] e di una successiva osservazione di L. CESARI [2], è possibile ad ogni intero $N > 0$ far corrispondere un intero $N_1 > N$ e due gruppi di punti $[u_i]$, $[v_j]$ in modo che detta (T_0, R_1) la trasformazione che si associa a questi gruppi di punti come sopra, si abbia:

$$\text{a)} \quad u_{i+1} - u_i < \frac{1}{N_1}, \quad v_{j+1} - v_j < \frac{1}{N_1}, \qquad \text{b)} \quad A(\Sigma_1) < A(S) + \frac{1}{4N},$$

$$\text{c)} \quad \omega(2/N_1)\{L[\vartheta(S)] + 2\} < \frac{1}{4N},$$

ove con $A(\Sigma_1)$, $A(S)$ si sono indicate rispettivamente le aree secondo LEBESGUE di Σ_1 e S, con $L[\vartheta(S)]$ si è indicata la lunghezza di $\vartheta(S)$ e con $\omega(\delta)$ si è indicato il modulo di continuità di (T, Q).

Da c) discende in particolare che

$$d\{T_0(u, v),\ T(u, v)\} \leqslant \omega\left(\frac{2}{N_1}\right) < \frac{1}{4N} < \frac{1}{N}, \qquad (u, v) \in R_1 .$$

Consideriamo ora i triangoli t'_{ij}, t''_{ij} che non appartengono ad R_1: Ciascuno di essi ha un lato in comune con Q^*, salvo due che hanno con Q^* due lati in comune. Conduciamo in questi ultimi la mediana relativa al rimanente lato.

Diciamo $t_{1i} \equiv [A_{1i}B_{1i}C_{1i}]$, $(i = 1, 2, \ldots, \nu_1)$, il generico dei triangoli che così si ottengono, e diciamo $B_{1i}C_{1i}$ il solo lato di t_{1i} che appartiene a Q^*.

Sia N_2 il più piccolo intero $> N_1$ tale che $\omega\,(2/N_2)L[\vartheta(S)] < (1/4N)(1/2)$ e sia p_1 il più piccolo intero > 0 tale che risulti $B_{1i}C_{1i} < 2^{p_1}/N_1$ per ogni valore di i. Siano $B_{1i} \equiv M_{1\,i,0}$, $M_{1,i,1}, \ldots, M_{1,i,2^{p_1}-1}$, $M_{1,i\,2^{p_1}} \equiv C_{1i}$ i punti mediante i quali $B_{1i}C_{1i}$ è diviso in 2^{p_1} parti uguali. Scegliamo in ciascuno dei segmenti $A_{1,i}M_{1,i,2k+1}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2^{p_1-1} - 1)$, un punto $A_{1,i,2k+1}$ in modo che: a) ciascuno dei triangoli $t'_{1,i,k} \equiv [A_{1,i,2k+1}\, M_{1,i,2k+1}\, M_{1i2k}]$, $t''_{1,i,k} \equiv [A_{1,i,2k+1}\, M_{1,i,2k+1}\, M_{1,i,2k+2}]$ sia contenuto in cerchio di raggio $< 1/N_2$; b) l'area complessiva dei triangoli $T'_{1,i,k} \equiv [T(A_{1i})T(M_{1,i,2k})T(A_{1,i,2k+1})]$, $T''_{1,i,k} \equiv [T(A_{1i})\,T(M_{1,i,2k+2})\, T(A_{1,i,2k+1})]$, $(k = 0, 1, \ldots, 2^{p_1-1} - 1)$, differisca da quella complessiva dei triangoli $[T(A_{1i})\,T(M_{1,i,2k})\,T(M_{1,i,2k+1})]$, $[T(A_{1i})\,T(M_{1,i,2k+2})\,T(M_{1,i,2k+1})]$, $(k = 0, 1, \ldots, 2^{p_1-1} - 1)$, (per meno di $(1/2)\,\omega\,(2/N_1)\cdot L(\gamma_{1i})$, essendo γ_{1i} la curva definita da (T, Q) su $B_{1i}C_{1i}$.

Definiamo quindi T_0 su ciascuno dei triangoli $\bar{t}'_{1,i,k} \equiv [A_{1i}M_{1,i,2k}A_{1,i,2k+1}]$, $\bar{t}''_{1,i,k} \equiv [A_{1i}M_{1,i,2k+2}A_{1,i,2k+1}]$ in modo che essa sia ivi lineare e rappresenti rispettivamente i triangoli $T'_{1,k,i}$, $T''_{1,i,k}$.

Osserviamo che sui lati dei triangoli $\bar{t}'_{1,i,k}$, $\bar{t}''_{1,i,k}$ sui quali T_0 era stata precedentemente definita le due definizioni di T_0 coincidono. Diciamo R_2 la regione poligonale costituita dai triangoli di Q sui quali si è finora definita la trasformazione T_0.

La trasformazione (T_0, R_2) così definita è continua. Essa rappresenta una superficie poliedrica Σ_2 per la quale si ha

$$A(\Sigma_2) < A(S) + \frac{1}{2N} + \frac{1}{4N}.$$

Infatti è, per ogni triangolo t_{1i},

$$\begin{aligned}\sum_k [A(T'_{1,i,k}) + A(T''_{1,i,k})] \leqslant \sum_k \{ & A[T(A_{1i})T(M_{1,i,2k})T(M_{1,i,2k+2})] + \\ & + A[T(A_{1i})T(M_{1,i,2k+2})T(M_{1,i,2k+1})]\} + \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{2}{N_1}\right)\cdot L(\gamma_{1i}) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{2}{N_1}\right)\cdot L(\gamma_{1i}) + \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{2}{N_1}\right)\cdot L(\gamma_{1i}),\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}A(\Sigma_2) \leqslant A(\Sigma_1) + \sum_i \omega\left(\frac{2}{N_1}\right)\cdot L(\gamma_{1i}) \leqslant A(S) + \frac{1}{2N} + \omega\left(\frac{2}{N_1}\right)\cdot L[\theta(S)] \leqslant \\ \leqslant A(S) + \frac{1}{2N} + \frac{1}{4N}.\end{aligned}$$

Inoltre, per ogni $(u, v) \in R_2$, risulta $d\{T(u, v), T_0(u, v)\} < 1/N$. Determiniamo N_3 come il più piccolo intero $> N_2$ per il quale si ha

$$\omega\left(\frac{2}{N_3}\right)\cdot L[\vartheta(S)] < \frac{1}{4N}\cdot\frac{1}{2^2}.$$

Consideriamo la classe dei triangoli $t'_{1,i,k}$, $t''_{1,i,k}$, $(k = 0, 1, \ldots, 2^{p_1-1}-1;\ i = 1, 2, \ldots, \nu_1)$, e indichiamo con $t_{2i} \equiv [A_{2i}B_{2i}C_{2i}]$, $(i = 1, 2, \ldots, \nu_2)$, il generico di questi triangoli, intendendo che sia $B_{2i}C_{2i}$ il lato di t_{2i} che appartiene a Q^*.

Determiniamo il minimo $p_2 > p_1$ in modo che sia, per ogni valore di i, $B_{2i}C_{2i} < 2^{p_2}/N_3$.

Dividiamo ciascun segmento $B_{2i}C_{2i}$ in 2^{p_2} parti uguali mediante i punti $M_{2,i,k}$, $(k = 0, 1, \ldots, 2^{p_2-1}-1)$, $[M_{2,i,0} \equiv B_{2i},\ M_{2,i,2^{p_2}} \equiv C_{2i}]$ e prendiamo su ciascun segmento $A_{2i}M_{2,i,2k+1}$ un punto $A_{2,i,2k+1}$ in modo che: a) ciascun triangolo $[M_{2,i,2k}M_{2,i,2k+1}\ A_{2,i,2k+1}]$, $[M_{2,i,2k+2}\,M_{2,i,2k+1}\,A_{2,i,2k+1}]$ appartenga ad un cerchio di raggio $< 1/N_3$; b) l'area complessiva dei triangoli $[T(A_{2,i})\ T(M_{2,i,2k})\ T(A_{2,i,2k+1})]$, $[T(A_{2i})T(M_{2,i,2k+2})T(A_{2,i,2k+1})]$ differisca dall'area complessiva dei triangoli $[T(A_{2i})\ T(M_{2,i,2k})\ T(M_{2,i,2k+1})]$, $[T(A_{2i})\ T(M_{2,i,2k+2})\ T(M_{2,i,2k+1})]$, $(k=0, 1, 2, \ldots, 2^{p_2-1}-1)$, per meno di $(1/2)\,\omega\,(2/N_2)\cdot L(\gamma_{2i})$, essendo γ_{2i} la curva definita da (T, Q) su $B_{2i}C_{2i}$. Definiamo T_0 su ciascuno dei triangoli $[A_{2i}\,M_{2,i,2k}A_{2,i,2k+1}]$, $[A_{2i}M_{2,i,2k+2}A_{2,i,2k+1}]$ in modo che essa rappresenti su ciascuno di questi un triangolo come sopra.

Diciamo R_3 la regione poligonale costituita dai triangoli di Q sui quali si è finora definita la trasformazione T_0.

La trasformazione (T_0, R_3) così definita è continua, rappresenta una superficie poliedrica Σ_3 di area $< A(S) + \dfrac{1}{2N}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$ ed è tale che, per ogni $(u, v) \in R_3$, si ha $d\{T_0(u, v),\ T(u, v)\} < 1/N$.

Proseguiamo quindi indefinitamente in questa costruzione determinando successivamente N_{s+1} come il più piccolo intero $> N_s$ per il quale si ha $\omega\,(2/N_{s+1})\cdot L[\vartheta(S)] < \{1/(4N)\}(1/2^s)$ e determinando p_s come il più piccolo intero $> p_{s-1}$ per il quale si ha $B_{si}C_{si} < 2^{p_s}/N_{s+1}$, essendo $t_{si} \equiv [A_{si}B_{si}C_{si}]$ i triangoli di Q aventi il lato $B_{si}C_{si}$ su Q^* sui quali non è ancora stata definita la trasformazione T_0.

Resta così definita su tutto Q^0 e su di un insieme numerabile ovunque denso di punti di Q^*, sui quali si è posto $T_0(u, v) = T(u, v)$, una trasformazione T_0 che è quasi lineare su ogni regione poligonale chiusa appartenente a Q^0, per la quale si ha

$$d\{T_0(u, v),\quad T(u, v)\} < 1/N, \qquad (u, v) \in Q^0.$$

Poniamo infine $T_0(u, v) = T(u, v)$ su ogni altro punto appartenente a Q^*.

Osserviamo che la trasformazione (T_0, Q) così definita su tutto Q è continua. Essa è ovviamente continua in ogni punto interno a Q. Proviamo che essa è continua anche in ogni punto $(u_0, v_0) \in Q^*$.

Preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, determiniamo $0 < \bar{\delta}$ in modo che per ogni $0 < \delta < \bar{\delta}$ sia $\omega(\delta) < \varepsilon$. Distinguiamo allora due casi: (u_0, v_0) coincide con uno dei punti $B_{si}C_{si}$, oppure no.

Nel primo caso consideriamo la classe dei triangoli t'_{ij}, $t''_{ij} \in R_1$, $\bar{t}'_{s,i,k}$, $\bar{t}''_{s,i,k} \in R_{s+1}$, $(s = 1, 2, ...)$, che hanno un vertice appartenente al cerchio $R((1/2)\bar{\delta})$, di centro (u_0, v_0) e raggio $(1/2)\bar{\delta}$, ed un vertice esterno a $R(\bar{\delta})$. La classe $\Phi(\bar{\delta})$ di questi triangoli è finita, in virtù della nostra costruzione. Prendiamo allora $0 < \delta' < \delta$ tale che se un triangolo appartiene a $\Phi(\bar{\delta})$ e non ha un vertice in (u_0, v_0) esso sia esterno a $R(\delta')$. Siano $\bar{t}_1, \bar{t}_2, ..., \bar{t}_\nu$ i triangoli della classe $\Phi(\bar{\delta})$ che hanno un vertice in (u_0, v_0), siano $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_\nu$ numeri positivi $< \bar{\delta}$ tali che se $(u, v) \in \bar{t}_i \cdot R(\delta_i)$ sia $d\{T_0(u, v), T_0(u_0, v_0)\} < \varepsilon$. Sia infine $\delta^* = \min[\delta', \delta_1, \delta_2, ..., \delta_\nu]$

Affermo che se $(u, v) \in R(\delta^*)$ allora è $d\{T_0(u, v), T_0(u_0, v_0)\} < \varepsilon$.

Infatti o $(u, v) \in \bar{t}_i \cdot R(\delta^*)$ ed allora il nostro asserto è già motivato, oppure (u, v) appartiene ad un triangolo di Q i cui vertici appartengono a $R(\bar{\delta})$ e $T_0(u, v)$ è lineare su questo triangolo, onde si ha anche in questo caso $d\{T_0(u, v), T_0(u_0, v_0)\} < \varepsilon$.

Il secondo caso si tratta alla stessa maniera.

Sia quindi Σ la superficie quasi poliedrica definita da (T_0, Q). Si ha evidentemente

$$A(\Sigma) = \underset{n}{\text{ext}} \sup A(\Sigma_n) < A(S) + 1/N \ , \qquad \vartheta(\Sigma) = \vartheta(S) \ ;$$

in virtù dell'arbitrarietà di N il nostro asserto è perciò provato.

4\. – Veniamo ora al caso in cui (T, Q) sia di classe L_2 senza che sia finita la lunghezza di $\vartheta(S)$.

Sia ξ_n, $(n = 1, 2, ...)$, $(\xi_1 < 1/2)$ una successione decrescente di numeri reali avente per limite zero, tale che ciascuna delle funzioni di una sola variabile $x(\xi_n, v)$, $x(1 - \xi_n, v)$, $x(u, \xi_n)$, $x(u, 1 - \xi_n)$, $y(\xi_n, v)$, ..., $z(u, 1 - \xi_n)$ sia assolutamente continua in questa variabile (u o v rispettivamente).

Una tale successione esiste in virtù della condizione a) della definizione di L_2.

Sia N un intero > 0 ad arbitrio.

Diciamo Q_1 il quadrato $[\xi_1 \leqslant u, v \leqslant 1 - \xi_1]$, Q_1^* il contorno di questo quadrato e γ_1 la curva definita da (T, Q) su Q_1^*.

In virtù dei già citati ragionamenti di A. MAMBRIANI ed L. CESARI e della ipotesi di assoluta continuità delle funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ su Q è possibile, semplificando la costruzione del n. precedente (ved. anche L. CESARI [?]), trovare due gruppi di punti

$$[u_{1,i}]: \quad \xi_1 = u_{1,0} < u_{1,1} < \ldots < u_{1,m_1+1} = 1 - \xi_1 ,$$

$$[v_{1,j}]: \quad \xi_1 = v_{1,0} < v_{1,1} < \ldots < v_{1,n_1+1} = 1 - \xi_1 ,$$

ed un intero $N_1 > N$ tali che, detti $t'_{i,j}$, $t''_{i,j}$ i triangoli in cui è decomposto Q_1 dai gruppi di punti $[u_{1,i}]$, $[v_{1,j}]$ come nel n. 3, e detti T'_{ij}, T''_{ij} i triangoli aventi per vertici le immagini dei vertici dei triangoli t'_{ij}, t''_{ij}, si abbia per la trasformazione $(\overline{T}_1, Q_1)$, che si ottiene rappresentando linearmente i triangoli T'_{ij}, T''_{ij} sui corrispondenti t'_{ij}, t''_{ij},

$$\text{a)} \quad u_{1,i+1} - u_{1,i} < \frac{1}{N_1}, \quad v_{1,j+1} - v_{1,j} < \frac{1}{N_1}, \ (i=0,1,2,..,m_1;\ j=0,1,2,\ldots,n_1),$$

$$\text{b)} \quad A(\overline{\Sigma}_1) < A(S_1) + \frac{1}{2N}, \qquad \text{c)} \quad \vartheta(\overline{\Sigma}_1) \text{ è inscritta in } \vartheta(S_1),$$

$$\text{d)} \quad \omega\left(\frac{5}{N_1}\right)\cdot\{2L[\vartheta(S_1)] + 2\} < \frac{1}{4N},$$

essendo $\omega(\delta)$ il modulo di continuità di (T, Q) ed avendo posto $S_1 \equiv (T, Q_1)$ $\overline{\Sigma}_1 = (\overline{T}_1, Q_1)$.

Da a) e d) risulta intanto che per ogni $(u, v) \in Q_1$ si ha $d\{T(u, v),\ \overline{T}_1(u, v)\} < \omega\,(2/N_1) < 1/(8N)$.

Allo scopo di raccordare questa porzione di superficie poliedrica $\overline{\Sigma}_1$ con altre che verranno introdotte, eseguiamo una trasformazione lineare (Ω_1, Q_1) di Q_1 in un altro quadrato $\overline{Q}_1 \equiv [\bar{\xi}_1 \leqslant u, v \leqslant 1 - \bar{\xi}_1]$, $(\xi_1 < \bar{\xi}_1 < 1/2)$, concentrico con Q_1, interno a Q_1, avente la medesima orientazione di Q_1 e tale che se P e $\overline{P}$ sono due punti di Q_1 e $\overline{Q}_1$ rispettivamente che si corrispondono secondo (Ω_1, Q_1) si abbia $P\overline{P} < 1/N_1$.

Sia $(T_0, \overline{Q}_1) \equiv (\overline{T}_1 \cdot \Omega^{-1}, \overline{Q}_1)$ la trasformazione quasi lineare che si ottiene da $(\overline{T}_1, Q_1)$ mediante (Ω_1, Q_1). Sia Σ_1 la superficie poliedrica rappresentata da $(T_0, \overline{Q}_1) \equiv (\overline{T}_1, Q_1)$.

È perciò $A(\Sigma_1) = A(\overline{\Sigma}_1) < A(S_1) + 1/(2N)$.

Inoltre, per ogni $(u, v) \in \overline{Q}_1$, si ha $d\{T(u, v),\ T_0(u, v)\} < 1/N$. Infatti è

$$d\{T(u, v),\ T_0(u, v)\} \leqslant d\{T(u, v),\ \overline{T}_1(u, v)\} + d\{\overline{T}_1(u, v),\ T_0(u, v)\} \leqslant$$

$$\leqslant \omega\,(2/N_1) + d\{\overline{T}_1(u, v),\ \overline{T}_1 \cdot \Omega_1^{-1}(u, v)\} \leqslant$$

$$\leqslant \omega\,(2/N_1) + d\{\overline{T}_1(u, v),\ \overline{T}_1(u', v')\},$$

essendo $(u', v') = \Omega_1^{-1}(u, v)$. È perciò, per la definizione di (Ω_1, Q_1), $d\{(u, v), (u', v')\} < 1/N_1$. Si ha inoltre

$$d\{T(u, v),\ T_0(u, v)\} \leqslant$$

$$\leqslant \omega(2/N) + d\{T_1(u, v),\ T(u, v)\} + d\{T(u, v),\ T(u', v')\} + d\{T(u', v'),\ T_1(u', v')\} \leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(\frac{2}{N_1}\right) + \omega\left(\frac{2}{N_1}\right) + \omega\left(\frac{1}{N_1}\right) + \omega\left(\frac{2}{N_1}\right) \leqslant 4\omega\left(\frac{5}{N_1}\right) < \frac{1}{2N} < \frac{1}{N}.$$

5. – Diciamo quindi $R_{2,1}$, $R_{2,2}$, $R_{2,3}$, $R_{2,4}$, $R_{2,5}$, $R_{2,6}$, $R_{2,7}$, $R_{2,8}$ i rettangoli appartenenti a Q così definiti:

$$R_{21} \equiv \begin{bmatrix} \xi_1 \leqslant u \leqslant 1 - \xi_1 \\ \xi_2 \leqslant v \leqslant \xi_1 \end{bmatrix}, \quad R_{22} \equiv \begin{bmatrix} 1 - \xi_1 \leqslant u \leqslant 1 - \xi_2 \\ \xi_1 \leqslant v \leqslant 1 - \xi_1 \end{bmatrix}, \quad R_{2,3} \equiv \begin{bmatrix} \xi_1 \leqslant u \leqslant 1 - \xi_1 \\ 1 - \xi_1 \leqslant v \leqslant 1 - \xi_2 \end{bmatrix},$$

$$R_{2,4} \equiv \begin{bmatrix} \xi_2 \leqslant u \leqslant \xi_1 \\ \xi_1 \leqslant v \leqslant 1 - \xi_2 \end{bmatrix}, \quad R_{2,5} \equiv \begin{bmatrix} \xi_2 \leqslant u \leqslant \xi_1 \\ \xi_2 \leqslant v \leqslant \xi_1 \end{bmatrix}, \quad R_{2,6} \equiv \begin{bmatrix} 1 - \xi_1 \leqslant u \leqslant 1 - \xi_2 \\ \xi_2 \leqslant v \leqslant \xi_1 \end{bmatrix},$$

$$R_{2,7} \equiv \begin{bmatrix} 1 - \xi_1 \leqslant u \leqslant 1 - \xi_2 \\ 1 - \xi_1 \leqslant v \leqslant 1 - \xi_2 \end{bmatrix}, \quad R_{2,8} \equiv \begin{bmatrix} \xi_2 \leqslant u \leqslant \xi_1 \\ 1 - \xi_1 \leqslant v \leqslant 1 - \xi_2 \end{bmatrix}.$$

È allora possibile, in virtù delle stesse considerazioni di cui sopra, determinare un intero $N_2 > N_1$ e per ogni rettangolo R_{2i} due gruppi di punti $[u_{2,i,i_1}]$, $[v_{2,i,i_2}]$ (ai quali appartengano rispettivamente le coordinate estreme di ciascun rettangolo R_{2i}) in modo che, detta $(\overline{T}_{2i}, R_{2i})$ la trasformazione che si associa a R_{2i} come sopra, si abbia:

a) le distanze fra due punti consecutivi di ciascuno dei gruppi $[u_{2,i,i_1}]$, $[v_{2,i,i_2}]$ sono minori di $< 1/N_2$,

b) $A(\overline{\Sigma}_{2i}) < A(S_{2i}) + \dfrac{1}{2^2} \cdot \dfrac{1}{4N} \cdot \dfrac{1}{8}$,

c) $\vartheta(\overline{\Sigma}_{2i})$ è inscritta in $\vartheta(S_{2i})$,

d) $\omega\left(\dfrac{5}{N_2}\right)\left\{2 \sum\limits_{i=1}^{8} L\left[\vartheta(S_{2i})\right] + 2\right\} < \dfrac{1}{2^2} \cdot \dfrac{1}{4N} \cdot \dfrac{1}{8}$,

essendo $S_{2i} \equiv (T, R_{2i})$, $\overline{\Sigma}_{2i} \equiv (\overline{T}_{2i}, R_{2i})$.

Raccordiamo ora le superficie poliedriche Σ_1, $\overline{\Sigma}_{2i}$, $(i = 1, 2, \dots, 8)$, fra di loro in modo da ottenere una unica superficie poliedrica.

Consideriamo il centro C_{2i} di ogni rettangolo R_{2i} e consideriamo una trasformazione lineare (Ω_{2i}, R_{2i}) di R_{2i} in un altro rettangolo $\overline{R}_{2i}$, contenuto in R_{2i}, avente la stessa orientazione e lo stesso centro di R_{2i}, tale che, se $\overline{P}$ è il punto di $\overline{R}_{2i}$ che corrisponde secondo (Ω_{2i}, R_{2i}) ad un punto P di R_{2i}, si abbia $\overline{P}P < 1/N_2$ e tale infine che se le basi o le altezze di due R_{2i} sono uguali, altrettanto accada per le basi o le altezze dei corrispondenti $\overline{R}_{2i}$.

Mediante la trasformazione (Ω_{2i}, R_{2i}) la trasformazione $(\overline{T}_{2i}, R_{2i})$ si muta nella trasformazione, anch'essa quasi lineare, $(\overline{T}_{2i}\cdot\Omega_{2i}^{-1}, \overline{R}_{2i}) \equiv (T_0, \overline{R}_{2i})$ costituente anch'essa una rappresentazione di $\overline{\Sigma}_{2i}$.

Raccordiamo intanto due fra le superficie poliedriche $\overline{\Sigma}_{2i}$ che sono contigue e precisamente $\overline{\Sigma}_{25}$ con $\overline{\Sigma}_{21}$.

Diciamo per comodità $ABCD$, $EFGH$ i rettangoli $\overline{R}_{2,5}$ e $\overline{R}_{2,1}$ rispettivamente. Essi appartengono ad una stessa striscia parallela all'asse u, ai lati della quale appartengono i punti A, B, E, F e D, C, H, G rispettivamente e nel verso dell'asse u.

Consideriamo il rettangolo $BEHC$ e osserviamo che sui lati BC e EH le trasformazioni $(T_0, \overline{R}_{25})$ e $(T_0, \overline{R}_{21})$ rappresentano due poligonali, inscritte nell'arco di curva γ rappresentato da (T, Q) sul segmento $I \equiv [u = \xi_1, \xi_2 \leqslant v \leqslant \xi_1]$ del quadrato Q, aventi gli stessi estremi.

È perciò possibile definire una superficie poliedrica ed una sua rappresentazione $(T_0, BEHC)$ quasi lineare su $BEHC$ che sia costante su BE e HC, che su CB e EH coincida rispettivamente con $(T_0, \overline{R}_{25})$ e $(T_0, \overline{R}_{21})$, i cui vertici siano tutti e soli quelli delle poligonali (T_0, BC), (T_0, EH), le cui faccie abbiano diametro $< \omega(1/N_2)$, la cui area sia minore di $L(\gamma)\cdot\omega(1/N_2)$ e tale infine che i lati di ciascun triangolo di $BECH$ su cui $(T_0, BEHC)$ è lineare siano tutti minori di $3/N_2$.

Ciò può farsi nel seguente modo: consideriamo sul segmento I i gruppi di punti $[\overline{v}_i] \equiv [\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_m]$, $[\overline{v}'_j] \equiv [\overline{v}'_1, \ldots, \overline{v}'_n]$ cui corrispondono secondo $(\overline{T}_{25}, R_{25})$ e $(\overline{T}_{21}, R_{21})$ rispettivamente i vertici delle spezzate $(\overline{T}_{25}, I) \equiv (T_0, BC)$, $(\overline{T}_{21}, I) \equiv (T_0, EH)$; quindi consideriamo il gruppo dei punti, anche non distinti, che risulta dalla riunione dei gruppi $[\overline{v}_i]$, $[\overline{v}'_j]$. Sia $[w] \equiv [w_1, w_2, \ldots, w_{m+n-1}, w_{m+n}]$ l'ordinamento secondo l'asse v dei punti di questo gruppo, in cui conveniamo di scrivere $w_k = \overline{v}_i$, $w_{k+1} = \overline{v}'_j$ se risulta $\overline{v}_i \equiv \overline{v}'_j$. Siano v_i, v'_j i corrispondenti dei punti $\overline{v}_i$, $\overline{v}'_j$, secondo Ω_{25}, Ω_{21}, su BC ed EH rispettivamente.

Costruiamo allora la spezzata appartenente a $BEHC$ i cui vertici sono successivamente i punti dei gruppi $[v_i]$, $[v'_j]$ che corrispondono ai punti di $[w]$ nell'ordinamento sopra considerato.

Avremo così ottenuta una decomposizione di $BEHC$ in triangoli ed in trapezi. Decomponiamo ciascun trapezio in triangoli facendo intervenire tutti e soli i punti v_i e v'_j; avremo così una decomposizione di $BEHC$ in triangoli.

Definiamo quindi $(T_0, BEHC)$ in modo che sia lineare su ciascuno τ di questi triangoli e rappresenti ivi il triangolo che ha per vertici i punti che corrispondono secondo $(T_0, \overline{R}_{25})$, $(T_0, \overline{R}_{21})$ ai vertici v_i e v'_j di τ rispettivamente.

La trasformazione quasi lineare così definita ha tutti i requisiti richiesti. Infatti ciascuna faccia della corrispondente superficie poliedrica ha lati $< \omega\,(1/N_2)$ in quanto i suoi vertici $T_0(v_k)T_0(v_{k+1})T_0(v_l')$ $[T_0(v_l)T_0(v_k')T_0(v_{k+1}')]$ corrispondono a punti $w_r w_t w_s$ di I le cui mutue distanze sono inferiori a $1/N_2$ per la definizione di $(\overline{T}_{2i}\,\overline{R}_{2i})$; ciascuna faccia della nostra superficie ha un lato inscritto in γ ed i rimanenti due lati $< \omega\,(1/N_2)$ per il motivo di cui sopra; infine le mutue distanze dei punti $v_k v_{k+1} v_l'$ $[v_l v_k' v_{k+1}']$ sono minori di $3/N_2$ poichè le mutue distanze dei punti $w_r w_s w_t$ sono minori di $1/N_2$, come è stato già notato, ed inoltre i punti w_r e v_k, w_s e v_{k+1}, w_t e v_l' (e gli analoghi) distano meno di $1/N_2$ in quanto si corrispondono in (Ω_{2i}, R_{2i}).

Abbiamo potuto così raccordare $\overline{\Sigma}_{25}$ con $\overline{\Sigma}_{21}$, alla stessa maniera potremo raccordare $\overline{\Sigma}_{21}$ con $\overline{\Sigma}_{26}$ e così via fino a raccordare $\overline{\Sigma}_{24}$ con $\overline{\Sigma}_{25}$.

Risulta così definita su tutta la corona $\mathcal{C}_2$, limitata dai contorni dei due quadrati $\overline{Q}_2 \equiv [\overline{\xi}_2 \leqslant u, v \leqslant 1 - \overline{\xi}_2]$, $\overline{\overline{Q}}_2 \equiv [\overline{\overline{\xi}}_2 \leqslant u, v \leqslant 1 - \overline{\overline{\xi}}_2]$, $(\xi_2 < \overline{\xi}_2 < \overline{\overline{\xi}}_2 < \xi_1)$, essendo $\overline{\xi}_2$ e $\overline{\overline{\xi}}_2$ la più piccola e la più grande ascissa di $\overline{R}_{25}$, una trasformazione quasi lineare $(T_0, \mathcal{C}_2)$.

Diciamo $\overline{\Sigma}_2$ la superficie poliedrica da essa rappresentata. Si ha, in virtù della costruzione,

$$A(\overline{\Sigma}_2) < \sum_{i=1}^{8} A(S_{2i}) + \sum_{i=1}^{8} \omega\left(\frac{1}{N_2}\right) \cdot L\,[\vartheta(S_{2i})] + \frac{1}{2^2}\,\frac{1}{4N} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{8} A(S_{2i}) + \frac{1}{4N} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{8}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{4N} \cdot \frac{1}{2^2} \leqslant \sum_{i=1}^{8} A(S_{2i}) + \frac{1}{4N} \cdot \frac{1}{2}.$$

Inoltre, per ogni $(u, v) \in \mathcal{C}_2$, si ha $d\{T(u, v),\ T_0(u, v)\} < 1/N$.

Se $(u, v) \in \overline{R}_{2i}$, $(i = 1, 2, \ldots, 8)$, ciò si prova come nel n. 4 salvo il cambiamento di N_1 in N_2 e di (Ω_1, Q_1) in (Ω_{2i}, R_{2i}) poichè anche in questo caso è, con opportuna scelta di i, $d\{T(u, v),\ \overline{T}_{2i}(u, v)\} < \omega(2/N_2)$.

Se (u, v) appartiene ad uno dei rettangoli del tipo $BEHC$, ciò si prova nel seguente modo. Supponiamo per semplicità che (u, v) appartenga a R_{25} ed al rettangolo $BEHC$. Sia τ il triangolo di $BEHC$ cui (u, v) appartiene e sia (u', v') uno dei vertici di τ che appartengono a BC.

Sarà

$$d\{T(u, v),\ T_0(u, v)\} \leqslant d\{T(u, v),\ T(u', v')\} + d\{T(u', v'),\ T_0(u, v)\} \leqslant$$

$$\leqslant d\{T(u, v),\ T(u', v')\} + d\{T(u', v'),\ T_0(u', v')\} + d\{T_0(u', v'),\ T_0(u, v)\} \leqslant$$

$$\leqslant \omega\,(3/N_2) + d\{T(u', v'),\ T_0(u', v')\} + d\{T_0(u', v'),\ T_0(u, v)\}\,,$$

poichè le mutue distanze fra i vertici di τ sono minori di $3/N_2$. Ne viene

$$d\{T(u, v), T_0(u, v)\} \leqslant \omega(3/N_2)+d\{T(u', v'), \overline{T}_{25}\cdot \Omega_{25}^{(-1)}(u', v')\}+d\{T_0(u',v'), T_0(u, v)\}.$$

Poniamo $(\bar{u}', \bar{v}') = \Omega_{25}^{(-1)}(u', v')$ e notiamo che, per la definizione di (Ω_{25}, R_{25}), si ha $d\{(\bar{u}', \bar{v}'), (u', v')\} < 1/N_2$; notiamo altresì che per la definizione di $(\overline{T}_{25}, R_{25})$ si ha $\overline{T}_{25}(u', v') = T(\bar{u}', \bar{v}')$; notiamo infine che i punti $T_0(u', v')$ e $T_0(u, v)$ appartengono ad una stessa faccia della superficie $(T_0, BEHC)$ che ha perciò diametro $< \omega\,(1/N_2)$.

Risulta allora

$$d\{T(u, v), T_0(u, v)\} \leqslant \omega\left(\frac{3}{N_2}\right) + \omega\left(\frac{1}{N_2}\right) + \omega\left(\frac{1}{N_1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 3\omega\left(\frac{5}{N_2}\right) \leqslant 3\omega\left(\frac{5}{N_2}\right) \leqslant \frac{1}{4N}\,\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2} < \frac{1}{N}.$$

La nostra affermazione è così provata.

6. – Veniamo ora a raccordare le superficie poliedriche $\Sigma_1 = (T_0, \overline{Q}_1)$ con la superficie poliedrica $\overline{\Sigma}_2 = (T_0, \mathcal{C}_2)$.

Allo scopo conduciamo le diagonali del quadrato Q che sono anche le diagonali dei quadrati Q_1, $\overline{Q}_1$, Q_2, $\overline{\overline{Q}}_2$, $\overline{Q}_2$ e così via.

Sia $A'B'C'D'$ uno dei quattro trapezi che queste diagonali formano con i contorni dei quadrati $\overline{Q}_1$, $\overline{\overline{Q}}_2$, sia $A'B'$ il lato di $A'B'C'D'$ che appartiene a $\overline{Q}_1$, $C'D'$ quello che appartiene a $\overline{\overline{Q}}$.

La trasformazione $(T_0, \overline{Q}_1)$ definisce sul segmento $A'B'$ una spezzata che è inscritta nell'arco $\gamma'=(T, I')$, essendo, per fissare le idee, $I' \equiv [\xi_1 \leqslant u \leqslant 1-\xi_1, v = \xi_1]$ ed ha gli stessi estremi di γ', così pure la trasformazione $(T_0, \mathcal{C}_2)$ definisce sul segmento $D'C'$ una spezzata inscritta in γ' ed avente gli stessi estremi di γ'.

È allora possibile, mediante gli stessi ragionamenti del n. precedente, definire su $A'B'C'D'$ una trasformazione quasi lineare $(T_0, A'B'C'D')$ che sia costante su $A'D'$ e $C'B'$, che coincida su $A'B'$ $[C'D']$ con $(T_0, A'B')$ $[(T_0, C'D')]$, che rappresenti una superficie poliedrica i cui vertici sono tutti e soli quelli delle spezzate di cui sopra, le cui faccie abbiano diametro $\omega\,(1/N_1)$, la cui area sia minore di $\omega\,(1/N_1)\cdot L(\gamma')$ e tale infine che i lati di ciascun triangolo di $A'B'C'D'$ su cui $(T_0, A'B'C'D')$ è lineare siano tutti minori di $5/N_1$.

Ne viene di conseguenza, in virtù degli stessi ragionamenti del n. precedente, che, in ogni punto $(u, v) \in A'B'C'D'$, si ha $d\{T(u, v), T_0(u, v)\} < 3\omega\,(5/N_1) < 1/N$.

È così possibile raccordare $(T_0, \overline{Q}_1)$ e $(T_0, \mathcal{C}_2)$ mediante una trasformazione quasi lineare $(T_0, \mathcal{C}_{1,2})$ (essendo $\mathcal{C}_{12}$ la corona compresa fra $\overline{Q}_1$ e $\overline{\overline{Q}}_2$) in modo da ottenere su tutto $\overline{Q}_2$ una trasformazione continua, quasi lineare, $(T_0, \overline{Q}_2)$, per la quale si abbia:

$$d\{T(u,v),\ T_0(u,v)\} < \frac{1}{N}, \qquad (u,v) \in \overline{Q}_2 ,$$

$$A(\Sigma_2) < A(S_1) + \sum_i A(S_{2i}) + \frac{1}{2N} + \frac{1}{4N}\frac{1}{2} + \omega\left(\frac{1}{N_1}\right) \cdot L[\vartheta(S_1)] <$$

$$< A(S_1) + \sum_i A(S_{2i}) + \frac{1}{2N} + \frac{1}{4N}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) <$$

$$< A(S_1) + \sum_i A(S_{2i}) + \frac{1}{2N} + \frac{1}{4N},$$

essendo Σ_2 la superficie poliedrica rappresentata da $(T_0, \overline{Q}_2)$.

7. – Consideriamo quindi il quadrato $Q_3 \equiv [\xi_3 \leqslant u, v \leqslant 1 - \xi_3]$, la corona $Q_3 - Q_2$ e gli otto rettangoli R_{3i} in cui questa corona è decomposta analogamente a quanto si è fatto nel n. 5.

Determinano quindi un intero $N_3 > N_2$ e per ogni rettangolo R_{3i} due gruppi di punti $[u_{3,i,i_1}]$, $[v_{3,i,i_2}]$ (ai quali appartengano le coordinate estreme di ciascuno dei rettangoli R_{3i}) in modo che detta $(\overline{T}_{3i}, R_{3i})$ la trasformazione quasi lineare che rimane associata a ciascuno di questi gruppi di punti si abbia:

a) le distanze fra due punti consecutivi di ciascuno dei gruppi $[u_{3,i,i_1}]$, $[v_{3,i,i_1}]$ sono minori di $1/N_3$,

b) $A(\overline{\Sigma}_{3i}) < A(S_{3i}) + (1/2^3)\{1/(4N)\}(1/8)$,

c) $\vartheta(\overline{\Sigma}_{3i})$ è inscritta in $\vartheta(S_{3i})$,

d) $\omega\,(5/N_3) \cdot \{2 \sum_{i=1}^{8} L[\vartheta(S_{3i})] + 2\} \leqslant \{1/(4N)\}(1/8)(1/2^3)$,

essendo $S_{3i} \equiv (T, R_{3i})$, $\overline{\Sigma}_{3i} \equiv (\overline{T}_{3i}, R_{3i})$.

Consideriamo come al n. 5 le otto trasformazioni lineari (Ω_{3i}, R_{3i}) di ciascun R_{3i} in un rettangolo $\overline{R}_{3i}$, interno a R_{3i}, avente la stessa orientazione e lo stesso centro di R_{3i}, tali che se P e $\overline{P}$ si corrispondono in (Ω_{3i}, R_{3i}) si abbia $P\overline{P} < 1/N_3$.

Definiamo come nel n. 5 le trasformazioni quasi lineari $(T_0, \overline{R}_{3i})$ e raccordiamole in modo da avere una trasformazione quasi lineare continua su tutta la corona $\mathcal{C}_3 = \overline{Q}_3 - \overline{\overline{Q}}_3$.

Raccordiamo quindi, come nel n. 6, $(T_0, \mathcal{C}_3)$ con $(T_0, \overline{Q}_2)$ in modo da avere una trasformazione quasi lineare, continua su tutto $\overline{Q}_3$, $(T_0, \overline{Q}_3)$, tale che, detta Σ_3 la superficie poliedrica da essa rappresentata, si abbia:

$$d\{T(u, v), T_0(u, v)\} < 1/N, \qquad (u, v) \in \overline{Q}_3,$$

$$A(\Sigma_3) < A(S) + \sum_i A(S_{2i}) + \sum_i A(S_{3i}) + \frac{1}{4N}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right).$$

Proseguiamo quindi indefinitamente cambiando successivamente il coefficiente $1/2^s$ che compare in b) e in d) in $1/2^{s+1}$ e cambiando N_s in N_{s+1}. Avremo così definito nell'interno Q^0 di Q una trasformazione (T_0, Q^0). Poniamo infine $T_0(u, v) = T(u, v)$ per ogni $(u, v) \in Q^*$.

Avremo così definito su tutto Q una trasformazione continua che è quasi lineare in ogni regione poligonale interna a Q.

Osserviamo che (T_0, Q) è continua in ogni punto $(u_0, v_0) \in Q^*$.

Un riesame dei ragionamenti fatti nei nn. 5 e 6 ci consente intanto di affermare che se $(u, v) \in Q_{n+1} - Q_n$ allora è

$$d\{T(u, v), T_0(u, v)\} < 4\omega\,(5/N_n) < 4\omega(5\xi_{n-1}),$$

poichè si ha $1/N_n < \xi_{n-1} - \xi_n < \xi_{n-1}$.

Preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, determiniamo allora $\bar{\delta} > 0$ in modo che per ogni $0 < \delta < \bar{\delta}$ sia $\omega(5\delta) < \varepsilon/5$.

Determiniamo quindi il più piccolo intero $\bar{s}$ in modo che per ogni $s \geqslant \bar{s}$ sia $\xi_{s-1} < \bar{\delta}$, poniamo quindi $\delta' = \xi_s < \xi_{s-1} < \bar{\delta}$.

Si ha allora, se $(u, v) \in Q_0 \cdot R(\delta')$ [$R(\delta')$ è il cerchio di centro (u_0, v_0) e raggio δ'],

$$d\{T_0(u, v), T_0(u_0, v_0)\} \leqslant d\{T_0(u, v), T(u, v)\} + d\{T(u, v), T_0(u_0, v_0)\} \leqslant$$

$$\leqslant 4\omega\,(5/N_p) + \omega(\delta'), \qquad p \geqslant \bar{s},$$

$$\leqslant 4\omega(5\xi_{p-1}) + \omega(\delta') \leqslant 4\omega(5\bar{\delta}) + \omega\,(5\bar{\delta}) \leqslant 5\omega(5\bar{\delta}) < \varepsilon.$$

La stessa disuguaglianza è evidentemente verificata se $(u, v) \in Q^* \cdot R(\delta')$. La continuità di (T_0, Q) nel punto (u_0, v_0) è così provata.

Diciamo Σ la superficie quasi poliedrica definita da (T_0, Q). Si ha intanto, per la definizione di (T_0, Q) su Q^*, che $\vartheta(\Sigma) = \vartheta(S)$.

In virtù di quanto si è visto nei nn. 4-7 è inoltre, per ogni $(u, v) \in Q$,

$$d\{T_0(u, v), T(u, v)\} < 1/N.$$

Osserviamo infine che si ha

$$A(\Sigma) = \text{ext}_n \sup A(\Sigma_n) = A(S_1) + \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{8} A(S_{pi}) + \{1/(2N)\} \sum_{p=0}^{\infty} 1/2^p ,$$

e che, per una proprietà dell'area secondo LEBESGUE, si ha, per ogni valore dell'intero m,

$$A(S_1) + \sum_{p=2}^{m} \sum_{i=1}^{8} A(S_{pi}) \leqslant A(S_m) \leqslant A(S) ,$$

essendo S_m la superficie definita da (T, Q) sul quadrato $Q_m \equiv [\xi_m \leqslant u, v \leqslant 1 - \xi_m]$. Si ha dunque

$$A(\Sigma) \leqslant A(S) + 1/(2N) < A(S) + 1/N$$

e, in virtù dell'arbitrarietà di N, il nostro teorema è così completamente dimostrato.

8. – Sia $S \equiv (T, Q)$ data come nel n. 1, sia $[S]$ l'insieme dei punti di E che sono immagine secondo (T, Q) di qualche $(u, v) \in Q$.

Sia $M \in [S]$, sia $T^{(-1)}(M)$ l'insieme dei punti di Q la cui immagine secondo (T, Q) è in M. L'insieme $T^{(-1)}(M)$ è chiuso ed i suoi componenti sono continui g appartenenti a Q.

Si dice che (T, Q) è aperta non degenere se

a) non esiste un continuo g contenente Q^*, b) per ogni g l'insieme $Q - g$ è connesso;

si dice che (T, Q) è chiusa non degenere se

a) esiste un continuo g contenente Q^*, b) per ogni continuo g l'insieme $Q - g$ è connesso.

È noto che se (T, Q) è aperta (chiusa) non degenere ogni altra trasformazione (T', Q) equivalente secondo FRÉCHET a (T, Q) lo è anche; si può perciò dire che S è aperta (chiusa) non degenere.

9. – Per superficie aperte non degeneri vale il seguente teorema di rappresentazione:

T e o r e m a [1]. Ogni superficie aperta non degenere ammette una rappresentazione di classe L_2.

Il nostro risultato sull'approssimazione vale perciò per ogni superficie aperta non degenere.

Per superficie chiuse non degeneri la stessa proprietà di approssimazione è contenuta nel seguente

Teorema (L. CESARI [2]). Per ogni superficie chiusa non degenere $S(T, Q)$ e per ogni intero $N > 0$ esiste una superficie poliedrica Σ in essa inscritta ed una sua rappresentazione quasi lineare nel quadrato Q, (T_0, Q), tale che

$$A(\Sigma) > A(S) + 1/N, \quad d\{T_0(u, v), T(u, v)\} \leqslant 1/N, \qquad (u, v) \in Q\,,$$

(T, Q) e (T_0, Q) sono costanti su Q^* e si ha $T_0(Q^*) = T(Q^*)$.

Bibliografia.

[1] L. CESARI, *Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **12**, 61-84 (1943).

[2] L. CESARI, *Sul problema di Geöcze*, Rivista Mat. Univ. Parma **1**, 207-227 (1950).

[3] A. MAMBRIANI, *Sul problema di Geöcze*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **13**, 1-17 (1948).

[4] E. R. REIFENBERG, *Parametric surfaces*, I: *Area*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **47**, 687-698 (1951).