Rivista Mat. Univ. Parma 4, 43-67 (1953)

JAURÈS CECCONI (*)

Sulla additività ciclica degli integrali sopra una superficie. (**)

1. - Sia Q il quadrato unitario del piano (u, v), $Q \equiv [0 \leqslant u, v \leqslant 1]$, sia

$$(1) \qquad (T, Q): \qquad x = x(u, v)\,, \quad y = y(u, v)\,, \quad z = z(u, v)\,, \quad (u, v) \in Q\,,$$

una trasformazione continua di Q nello spazio (x, y, z), sia S la superficie orientata di FRÉCHET del tipo della 2-cella definita da (T, Q).

Sia $[S] = T(Q)$ l'insieme limitato e chiuso costituente il sostegno della superficie S.

Sia $f(x, y, z, u, v, w)$ una qualsiasi funzione dei sei argomenti x, y, z, u, v, w definita e continua per ogni $(x, y, z) \in [S]$ e $u^2 + v^2 + w^2 > 0$, e positivamente omogenea di grado uno rispetto a u, v, w. Sia $\mathcal{J}(S) = \mathcal{J}(T, Q) = \int_S f\, d\sigma$, 'integrale di tipo di WEIERSTRASS definito da L. CESARI [7] per tutte le superficie di area finita secondo LEBESGUE. Tale integrale è indipendente dalla rappresentazione (T, Q) di S e si riduce all'ordinario integrale di LEBESGUE ogni qualvolta l'area è data dall'integrale classico (1).

Per ogni $P \equiv (x, y, z) \in [S]$ indichiamo con $T^{-1}(P)$ l'insieme dei punti (u, v) di Q per i quali è $T(u, v) = P$. Questo insieme è chiuso e perciò i suoi componenti massimali sono continui di Q.

Diremo, secondo G. T. WHYBURN [16], che la trasformazione (T, Q) è monotona se per ogni $P \equiv (x, y, z) \in [S]$ l'insieme chiuso $T^{-1}(P)$ è costituito da un solo continuo, diremo che è mai stazionaria (light, in inglese) se per ogni $P \equiv (x, y, z) \in [S]$ i componenti massimali dell'insieme chiuso $T^{-1}(P)$ sono ridotti a punti.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica L. TONELLI, Università, Pisa (Italia).

(**) Ricevuto il 31-III-1953.

(1) La definizione di integrale $\mathcal{J}(S)$ verrà richiamata nel n. 9. In nostri precedenti lavori ([2], [3], [4], [5]) abbiamo usato l'integrale $\mathcal{J}(S)$ per la formulazione dei teoremi di GAUSS-GREEN e di STOKES per superficie supposte soltanto di area secondo LEBESGUE finita. Per altre recenti applicazioni dell'integrale $\mathcal{J}(S)$ si veda V. E. BONONCINI [1], L. CESARI ([9], [10], [11]), J. DANSKIN [13].

Sono noti i seguenti fatti:

È possibile (teorema di fattorizzazione di S. EILEMBERG e G. T. WHYBURN, [15], [16]) esprimere la trasformazione (T, Q) mediante il prodotto di due trasformazioni continue, l'una monotona, l'altra mai stazionaria, nel seguente modo:

a) $(T, Q) \equiv (L \cdot M, Q)$,

b) (M, Q) è una trasformazione monotona di Q in un insieme intermedio $\mathcal{M} = M(Q)$ di uno spazio ausiliario,

c) $(L, \mathcal{M})$ è una trasformazione mai stazionaria di $\mathcal{M}$ nello spazio (x, y, z),

questa fattorizzazione essendo unica a meno di un omeomorfismo sull'insieme intermedio $\mathcal{M}$.

Detta E la classe degli elementi propriamente ciclici (cyclic true elements, in inglese) dell'insieme $\mathcal{M}$ pensato come uno spazio di PEANO, questa classe è al più numerabile, potendo eventualmente essere vuota.

Per ogni elemento propriamente ciclico $\mathcal{E}_n$ di E esiste una unica retrazione monotona (2) (nel senso di G. T. WHYBURN [26]) di $\mathcal{M}$ su $\mathcal{E}_n$ che diciamo $(\mu_n, \mathcal{M})$; esiste quindi una trasformazione continua $(\mathcal{C}_n, Q) \equiv (L \cdot \mu_n \cdot M, Q)$ di Q nello spazio (x, y, z). La classe $(\mathcal{C}_n, Q)$ di queste trasformazioni costituisce la decomposizione ciclica di (T, Q), che è indipendente dalla rappresentazione (T, Q) di S e dalla fattorizzazione di (T, Q).

Se la superficie S è di area secondo LEBESGUE $L(S)$ finita, ciascuna delle superficie di FRÉCHET $S_n \equiv (\mathcal{C}_n, Q)$ è di area finita e si ha (teorema di additività ciclica per l'area secondo LEBESGUE, T. RADÓ [15])

$$L(S) = \sum_{n=1}^{\infty} L(S_n) .$$

Sempre nella ipotesi che S abbia area secondo LEBESGUE finita, si possono considerare, secondo L. CESARI [7], gli integrali $\mathcal{J}(S) = \mathcal{J}(T, Q)$, $\mathcal{J}(S_n) = \mathcal{J}(\mathcal{C}_n, Q)$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Scopo del presente lavoro è di dimostrare il seguente

---

(2) La retrazione monotona $(\mu_n, \mathcal{M})$ di $\mathcal{M}$ su $\mathcal{E}_n$ è la trasformazione continua di $\mathcal{M}$ su $\mathcal{E}_n$ così definita.

Sia $x \in \mathcal{M}$, sia Γ_x l'eventuale componente di $\mathcal{M} - \mathcal{E}_n$ cui x appartiene e sia $F_{\mathcal{M}}(\Gamma_x)$ la frontiera di Γ_x relativamente ad $\mathcal{M}$, che come è noto è ridotta ad un punto di $\mathcal{E}_n$. È allora

$$(\mu_n, \mathcal{M}) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathcal{E}_n , \\ F_{\mathcal{M}}(\Gamma_x) & \text{se } x \notin \mathcal{E}_n . \end{cases}$$

Teorema. *Se $S \equiv (T, Q)$ è di area secondo Lebesgue finita, se le $S_n \equiv$ $\equiv (\mathcal{C}_n, Q)$ sono definite come sopra, allora sussiste la seguente uguaglianza*

$$\mathcal{J}(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}(S_n) .$$

Nel caso particolare in cui $S \equiv (T, Q)$ sia di tipo A (base surface, in inglese) questo teorema è stato provato nel nostro lavoro [3].

2. – Sia (T, Q) la trasformazione continua data mediante le (1) del n. 1.

Sia K un continuo appartenente a Q, dotato della seguente proprietà rispetto a (T, Q): considerata la classe $[\gamma]_K$ degli insiemi aperti relativamente a Q che costituiscono i componenti massimali dell'insieme $Q - K$, per ogni $\gamma \in [\gamma]_K$ la trasformazione (T, Q) è costante sul continuo $F_Q(\gamma)$, frontiera di γ relativamente a Q (³), appartenente a K, separante in Q (⁴).

Diremo allora con L. Cesari [12] che il continuo K gode della proprietà $\mathcal{P}$ rispetto alla trasformazione (T, Q).

Consideriamo, a partire da (T, Q) e da K, soddisfacente la condizione $\mathcal{P}$ rispetto a (T, Q), la trasformazione $(\overline{T}, Q)$ definita nel seguente modo:

$(\overline{T}, Q)$ è coincidente con (T, Q) su K,

$(\overline{T}, Q)$ è costante su ogni $\gamma \in [\gamma]_K$ ed ivi coincidente con $T[F_Q(\gamma)]$.

La trasformazione $(\overline{T}, Q)$ così definita è continua [12], diremo che essa è la retrazione nel senso di L. Cesari di (T, Q) rispetto al continuo $K \subset Q$, soddisfacente la condizione $\mathcal{P}$ nei confronti di (T, Q).

3. – Sia $(L \cdot M, Q)$ la fattorizzazione di (T, Q) considerata nel n. 1.

Sia E la classe degli elementi propriamente ciclici dello spazio di Peano $\mathcal{M} = M(Q)$ intermedio nella fattorizzazione $(L \cdot M, Q)$.

Sia $\mathcal{E}$ un elemento propriamente ciclico di $\mathcal{M}$.

Allora, come è noto ([15], [16]) (⁵), $\mathcal{E}$ è chiuso relativamente ad $\mathcal{M}$, connesso, non ridotto ad un punto, tale che se l'insieme $\mathcal{M} - \mathcal{E}$ non è vuoto e Γ è un componente di $\mathcal{M} - \mathcal{E}$ allora $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ è ridotto ad un punto appartenente ad $\mathcal{E}$ e precisamente ad un punto taglio di $\mathcal{M}$.

(³) Se A è un insieme di uno spazio B, $\overline{A}_B$ indica la chiusura di A relativamente a B, A^0_B l'insieme dei punti interni ad A relativamente a B, $F_B(A) = \overline{A}_B \cdot (\overline{B - A})_B$ la frontiera di A relativamente a B.

(⁴) Se A è un insieme connesso e $B \subset A$ diremo che B separa in A, oppure che B è un insieme taglio di A, se l'insieme $A - B$ non è connesso.

(⁵) Qui e nel seguito (in particolare n. 12) si fa liberamente uso della teoria della decomposizione ciclica di uno spazio di Peano (ved. ad esempio [15], Cap. II, 2).

Poichè (M, Q) è monotona ne discende intanto [15] che l'insieme $J = M^{-1}(\mathcal{E})$ è chiuso rispetto a Q e connesso; è perciò un continuo di Q.

Consideriamo quindi gli insiemi δ, aperti relativamente a Q, eventuali componenti di $Q - J$, ed osserviamo che [15], poichè (M, Q) è monotona, ciascuno di essi è il modello secondo (M, Q) di uno dei componenti di $\mathcal{M} - \mathcal{E}$.

Osserviamo inoltre che la frontiera relativamente a Q di ciascuno di questi δ è il modello, secondo (M, Q), della frontiera, relativamente ad $\mathcal{M}$, del corrispondente Γ.

Infatti, poichè $F_Q(\delta) = \overline{\delta}_Q \cdot (\overline{Q - \delta})_Q$ ovviamente

$$M[F_Q(\delta)] \subset M(\overline{\delta}_Q) \cdot M[(\overline{Q - \delta})_Q] = M(\overline{\delta})_{\mathcal{M}} \cdot M(\overline{Q - \delta})_{\mathcal{M}} = F_{\mathcal{M}}(\Gamma) \, .$$

Per provare la relazione opposta consideriamo un punto U dell'insieme $M(\overline{\delta}_Q) \cdot M[(\overline{Q - \delta})_Q]$.

L'insieme $M^{-1}(U)$, che è un continuo per essere (M, Q) monotona, ha punti sia in $\overline{\delta}_Q$ sia in $(\overline{Q - \delta})_Q$ e perciò incontra $F_Q(\delta)$. Quindi $U \subset M[F_Q(\delta)]$, e ciò prova la nostra affermazione.

Infine $F_Q(\delta)$ separa in Q poichè (M, Q) è monotona e $M[F_Q(\delta)]$ è un punto taglio di $\mathcal{M}$.

Tutto ciò prova allora che l'insieme $J = M^{-1}(\mathcal{E})$ è un continuo di Q, che per ogni eventuale componente δ di $Q - J$ la frontiera $F_Q(\delta)$ è un continuo appartenente a J sul quale (T, Q) è costante e che infine $F_Q(\delta)$ separa in Q.

Ne viene quindi che il continuo J gode della proprietà $\mathcal{P}$ rispetto a (T, Q).

4. – Sia $\{\mathcal{E}_n\}$ la successione costituita dagli elementi propriamente ciclici di $\mathcal{M}$. Sia J_n il continuo di Q ottenuto a partire da $\mathcal{E}_n$ come nel n. precedente si è ottenuto J da $\mathcal{E}$.

Sia (T_n, Q) la trasformazione continua costruita a partire da J_n e da (T, Q) mediante la retrazione considerata nel n. 2.

Sia $(\mathcal{T}_n, Q)$ la trasformazione continua, già considerata nel n. 1, ottenuta mediante la retrazione monotona di $\mathcal{M}$ su $\mathcal{E}_n$.

Dopo quanto si è osservato nel n. precedente ed in virtù delle definizioni, si riconosce immediatamente che per ogni intero n è

$$(T_n, Q) = (\mathcal{T}_n, Q) \, .$$

5. – Sia (T, Q) la trasformazione continua del tipo della 2-cella data mediante le (1) del n. 1.

Sia α un insieme aperto relativamente a Q. Siano

$$(T_1, Q): \qquad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in Q,$$

$$(T_2, Q): \qquad z = z(u, v), \quad x = x(u, v), \quad (u, v) \in Q,$$

$$(T_3, Q): \qquad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u, v) \in Q,$$

le trasformazioni piane associate a (T, Q).

Sia π un poligono semplice appartenente ad α, e $T_r(\pi^*)$, $(r = 1, 2, 3)$, la curva chiusa orientata immagine del contorno orientato π^* di π secondo (T, Q).

Siano K_r, $(r = 1, 2, 3)$, dei quadrati dei piani coordinati contenenti gli insiemi $T_r(Q)$, sia P un generico punto appartenente a K_r.

Sia $O(P, T_r, \pi)$ l'indice topologico del punto $P \in K_r$ rispetto a $T_r(\pi^*)$ se $P \notin T_r(\pi^*)$, sia zero altrimenti.

Sia $[\pi_i; (i = 1, 2, ..., n)]$ un gruppo di poligoni semplici di α privi a due a due di punti in comune. Sia [6]

$$g_r(T, \pi) = \iint_{K_r} |O(P, T_r, \pi)| \, dP, \qquad \tau_r(T, \pi) = \iint_{K_r} O(P, T_r, \pi) \, dP, \qquad (r = 1, 2, 3),$$

$$t(T, \pi) = [\tau_1^2(T, \pi) + \tau_2^2(T, \pi) + \tau_3^2(T, \pi)]^{1/2},$$

$$\Psi_r(P, T, \alpha) = \text{ext sup} \sum_{i=1}^{n} |O(P, T_r, \pi_i)|, \quad G_r(T, \alpha) = \text{ext sup} \sum_{i=1}^{n} g_r(T, \pi_i), \ (r=1, 2),$$

$$G(T, \alpha) = \text{ext sup} \sum_{i=1}^{n} [g_1^2(T, \pi_i) + g_2^2(T, \pi_i) + g_3^2(T, \pi_i)]^{1/2},$$

l'estremo superiore essendo preso rispetto a tutti i gruppi di poligoni $[\pi_i]$ di α.

È noto che [6]

$$\iint_{K_r} \Psi_r(P, T, \alpha) \, dP = G_r(T, \alpha), \qquad (r = 1, 2, 3),$$

è noto anche che se α coincide con Q si ha

$$G_r(T, Q) = G_r(T, Q^0), \quad (r = 1, 2, 3); \qquad G(T, Q) = G(T, Q^0) = L(T, Q) = L(S).$$

Sia infine $[\delta_i; (i = 1, 2, ..., n)]$ un gruppo di insiemi aperti relativamente ad α, privi a due a due di punti in comune, e poniamo

$$\overline{G}(T, \alpha) = \text{ext sup} \sum_{i=1}^{n} [G_1^2(T, \delta_i) + G_2^2(T, \delta_i) + G_3^2(T, \delta_i)]^{1/2},$$

l'estremo superiore essendo preso rispetto a tutti i possibili gruppi di insiemi $[\delta_i]$ di α.

6. – Dimostro il seguente

Lemma. *Sia (T, Q) la trasformazione continua assegnata mediante le* (1) *del* n. 1. *Sia α un insieme aperto relativamente a Q. Supponiamo che sia $G(T, Q) < +\infty$. Allora si ha*

$$G(T, \alpha) = \bar{G}(T, \alpha) .$$

In virtù delle definizioni si ha immediatamente $G(T, \alpha) \leqslant \bar{G}(T, \alpha)$.

Basta perciò provare soltanto la disuguaglianza opposta.

Sia $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sia $[\delta_i;\ (i = 1, 2, ..., n)]$ un gruppo di insiemi di α aperti relativamente ad α, privi a due a due di punti in comune, per il quale si abbia

$$\bar{G}(T, \alpha) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} [G_1^2(T, \delta_i) + G_2^2(T, \delta_i) + G_3^2(T, \delta_i)]^{1/2} .$$

In virtù dei teoremi di approssimazione di L. Cesari ([**6**], p. 1357) si può determinare per ogni i un gruppo di poligoni $[\pi_{i,s};\ (s = 1, 2, ..., n_i)]$ appartenenti a δ_i, privi a due a due di punti in comune, per il quale risulti

$$\sum_{i=1}^{n_i} g_r(T, \pi_{i,s}) > G_r(T, \delta_i) - \frac{\varepsilon}{n}, \qquad (r = 1, 2, 3) .$$

Si ha quindi [6]

$$\begin{aligned}\bar{G}(T, \alpha) - \varepsilon &< \sum_{i=1}^{n} \left[\left\{ \sum_{s=1}^{n_i} g_1(T, \pi_{is}) + \varepsilon/n \right\}^2 + \left\{ \sum_{s=1}^{n_i} g_2(T, \pi_{is}) + \varepsilon/n \right\}^2 + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \left\{ \sum_{s=1}^{n_i} g_3(T, \pi_{is}) + \varepsilon/n \right\}^2 \right]^{1/2} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{s=1}^{n_i} [g_1^2(T, \pi_{is}) + g_2^2(T, \pi_{is}) + g_3^2(T, \pi_{is})]^{1/2} + \left(\frac{3\varepsilon^2}{n^2} \right)^{1/2} \right] \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n_i} g(T, \pi_{is}) + n \cdot \frac{2\varepsilon}{n} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n_i} g(T, \pi_{is}) + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

---

(6) Qui si è fatto uso della nota disuguaglianza

$$[(\sum_r \alpha_{1r})^2 + (\sum_r \alpha_{2r})^2 + (\sum_r \alpha_{3r})^2]^{1/2} \leqslant \sum_r [\alpha_{1r}^2 + \alpha_{2r}^2 + \alpha_{3r}^2]^{1/2} ,$$

α_{ir} essendo numeri reali qualunque.

dalla quale, in virtù della definizione di $G(T, 1)$ e della arbitrarietà di ε, si deduce

$$\bar{G}(T, \alpha) \leqslant G(T, \alpha) .$$

7. – In questo numero dimostro il seguente

Lemma. *Sia (T, Q) la trasformazione continua assegnata mediante le* (1) *del* n. 1 . *Sia γ un continuo di Q che separa in Q, tale che $T(\gamma)$ sia ridotto ad un punto che diciamo U. Sia α un componente di $Q-\gamma$, sia β l'insieme, aperto relativamente a Q, $\beta = Q-\alpha-\gamma$. Sia π un poligono appartenente a Q.*

Supponiamo infine che per un valore di r, $(r = 1, 2, 3)$, *sia $G_r(T, Q) < +\infty$. Allora*

$$G_r(T, \pi) = G_r(T, \pi^0) = G_r(T, \alpha\pi^0) + G_r(T, \beta\pi^0) .$$

In virtù delle definizioni la disuguaglianza

$$G_r(T, \alpha\pi^0) + G_r(T, \beta\pi^0) \leqslant G_r(T, \pi^0)$$

è ovvia. Basta perciò dimostrare la disuguaglianza opposta.

Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sia $\sigma > 0$ tale che se $h_r \subset K_r$, $|h_r| < \sigma$, si abbia

$$\iint_{h_r} \Psi_r(P, T, Q)\, \mathrm{d}P < \varepsilon .$$

L'insieme γ è chiuso, perciò se $(\gamma)_\varrho$ è l'insieme dei punti di Q che distano da γ meno di ϱ, si ha

$$\lim_{\varrho\to 0} (\gamma)_\varrho = \gamma , \qquad \lim_{\varrho\to 0} T[(\gamma)_\varrho] = T(\gamma) , \qquad \lim_{\varrho\to 0} \operatorname{diam} T[(\gamma)_\varrho] = 0 .$$

Sia $\varrho > 0$ tale che risulti

$$\operatorname{diam} T[(\gamma)_\varrho] < \frac{1}{2}\sqrt{\sigma} .$$

Sia $[\pi_i;\ (i = 1, 2, ..., n)]$ un gruppo di poligoni interni a π, privi a due a due di punti interni in comune, per cui si abbia

$$G_r(T, \pi^0) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} g_r(T, \pi_i) .$$

Sia π_i un poligono di questo gruppo. Consideriamo l'insieme $\pi_i^* - \pi_i^*\gamma$. Siano $[\lambda_{is};\ (s = 1, 2, ...)]$ i componenti di questo insieme.

Consideriamo quei componenti λ_{is} per i quali si ha diam $T(\lambda_{is}) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\sigma}$.

Il numero dei componenti in questione è finito. Infatti se diciamo $\omega(\delta) = $ $= \text{ext sup} \| T(P'), T(Pj) \|$, essendo P' e P'' due punti di Q la cui distanza è $\leqslant \delta$, si ha, in virtù della continuità di (T, Q), $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, e di conseguenza $\omega(\delta) < \frac{1}{2}\sqrt{\sigma}$ se δ è minore di un conveniente $\eta > 0$. Perciò, se per un λ_{is} è diam $T(\lambda_{is}) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\sigma}$ deve essere $|\lambda_{is}| \geqslant \eta$, e quindi il numero di questi λ_{is} è finito. Siano essi $[\lambda_{is};\ (s = 1, 2, \ldots, \mu_i)]$.

Siano $[\alpha_{is};\ (s = 1, 2, \ldots, \mu_i')]$ quei componenti di $Q - \gamma$, distinti da α, cui appartengono i $[\lambda_{is};\ (s = 1, 2, \ldots, \mu_i)]$.

Consideriamo l'insieme α, e distinguiamo tre casi a seconda che l'insieme $\alpha \cdot Q^*$ è vuoto, oppure contiene Q^*, oppure contiene almeno un punto di Q^* senza esaurire Q^*.

Nei primi due casi è possibile costruire, mediante i noti procedimenti di approssimazione di un insieme aperto connesso con campi poligonali interni [**14**], una poligonale semplice chiusa $\Delta\alpha$ appartenente a $\alpha \cdot (\gamma)_\varrho$ (7) e contenente nel suo interno l'insieme $\alpha - \alpha \cdot (\gamma)_\varrho$ (oppure nel suo esterno, a seconda che $\alpha \cdot Q^*$ è vuoto oppure coincide con Q^*).

Nel terzo caso osserviamo che l'insieme $\alpha \cdot (\gamma)_\varrho$, aperto relativamente a Q, è connesso e che l'insieme $\alpha \cdot Q^*$ è ridotto ad un intervallo aperto $A\ B$ di Q^*. Consideriamo allora due punti A' e B' di $A\ B$ distanti rispettivamente da A e B per meno di ϱ ed appartenenti quindi a $\alpha \cdot (\gamma)_\varrho$. Uniamo quindi A e B con una spezzata semplice, che chiameremo anche in questo caso $\Delta\alpha$, appartenente a $\alpha \cdot (\gamma)_\varrho$; ciò è possibile poichè i punti A e B sono relativamente interni all'insieme connesso $\alpha \cdot (\gamma)_\varrho$.

In tutti i casi abbiamo così costruito una spezzata da associare all'insieme α.

Alla stessa maniera costruiamo una spezzata $\Delta\alpha_{is}$ che goda delle stesse proprietà rispetto a α_{is}, $(s = 1, 2, \ldots, \mu_i')$.

Queste spezzate decompongono ognuno dei poligoni π_i ora considerati in poligoni. Siano $[\pi_{ij}^{(1)};\ (j = 1, 2, \ldots, n_1^{(i)})]$ quelli che sono interni ad α, $[\pi_{ij}^{(2)};\ (j = 1, 2, \ldots, n_2^{(i)})]$ quelli che sono interni a qualche α_{is}, $[\pi_{ij}^{(3)};\ (j = 1, 2, \ldots, n_3^{(i)})]$ i rimanenti.

In ogni punto $P \in K_r$ che non appartenga ad un cerchio $C_r(U)$ di centro U e raggio $\frac{1}{2}\sqrt{\sigma}$ si ha

$$O(P, T_r, \pi_i) = \sum_{j=1}^{n_1^{(i)}} O(P, T_r, \pi_{ij}^{(1)}) + \sum_{j=1}^{n_2^{(i)}} O(P, T_r, \pi_{ij}^{(2)}) + \sum_{j=1}^{n_3^{(i)}} O(P, T_r, \pi_{ij}^{(3)}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n_1^{(i)}} O(P, T_r, \pi_{ij}^{(1)}) + \sum_{j=1}^{n_2^{(i)}} O(P, T_r, \pi_{ij}^{(2)}),$$

(7) Si osservi che per ogni α, α_{is} l'insieme $F_Q(\alpha)$, $F_Q(\alpha_{is})$ appartiene a γ.

per essere le curve $T_r(\pi_{ij}^{(3)*})$ appartenenti al cerchio $C_r(U)$, e quindi anche, per i $P \notin C_r(U)$,

$$\sum_{i=1}^{n} |O(P, T_r, \pi_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_1^{(i)}} |O(P, T_r, \pi_{ij}^{(1)})| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_2^{(i)}} |O(P, T_r, \pi_{ij}^{(2)})| .$$

Da questa, poichè per $P \in C_r(U)$ si ha $\sum_{i=1}^{n} |O(P, T_r, \pi_i)| \leqslant \Psi_r(P, T, Q)$, si deduce, mediante integrazione,

$$\sum_{i=1}^{n} g_r(T, \pi_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_1^{(i)}} g_r(T, \pi_{ij}^{(1)}) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_2^{(i)}} g_r(T, \pi_{ij}^{(2)}) + \iint_{C_r(U)} \Psi_r(P, T, Q)\, dP$$
$$\leqslant G_r(T, \alpha \cdot \pi^0) + G_r(T, \beta \cdot \pi^0) + \varepsilon .$$

Si ha dunque

$$G_r(T, \pi) - \varepsilon \leqslant G_r(T, \alpha \cdot \pi^0) + G_r(T, \beta \cdot \pi^0) + \varepsilon ,$$

dalla quale, per l'arbitrarietà di ε, si ottiene

$$G_r(T, \pi) \leqslant G_r(T, \alpha \cdot \pi^0) + G_r(T, \beta \cdot \pi^0) .$$

Il lemma è così dimostrato.

8. – Dimostro il seguente

L e m m a. *Siano (T, Q), α, β, γ dati come nel lemma del precedente numero. Allora si ha*

$$G(T, \alpha) + G(T, \beta) = G(T, Q) .$$

Dalle definizioni risulta immediatamente

$$G(T, \alpha) + G(T, \beta) \leqslant G(T, Q) ,$$

basterà perciò, anche in questo caso, provare la disuguaglianza opposta.

Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sia $[\pi_i;\ (i = 1, 2, ..., n)]$ un gruppo di poligoni appartenenti a Q, privi a due a due di punti in comune, per il quale si abbia

$$G(T, Q) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} [g_1^2(T, \pi_i) + g_2^2(T, \pi_i) + g_3^2(T, \pi_i)]^{1/2} .$$

Dalle definizioni discende immediatamente

$$G(T, Q) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} [G_1^2(T, \pi_i) + G_2^2(T, \pi_i) + G_3^2(T, \pi_i)]^{1/2} ,$$

e dal lemma del n. precedente

$$G(T, Q) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} \left[\left\{G_1(T, \alpha\cdot\pi_i^0) + G_1(T, \beta\cdot\pi_i^0)\right\}^2 + \right.$$

$$\left. + \left\{G_2(T, \alpha\cdot\pi_i^0) + G_2(T, \beta\cdot\pi_i^0)\right\}^2 + \left\{G_3(T, \alpha\cdot\pi_i^0) + G_3(T, \beta\cdot\pi_i^0)\right\}^2\right]^{1/2}$$

$$< \sum_{i=1}^{n} [G_1^2(T, \alpha\cdot\pi_i^0) + G_2^2(T, \alpha\cdot\pi_i^0) + G_3^2(T, \alpha\cdot\pi_i^0)]^{1/2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} [G_1^2(T, \beta\cdot\pi_i^0) + G_2^2(T, \beta\cdot\pi_i^0) + G_3^2(T, \beta\cdot\pi_i^0)]^{1/2}$$

e quindi in virtù delle definizioni, per il lemma del n. 6 e per l'arbitrarietà di ε,

$$G(T, Q) \leqslant \bar{G}(T, \alpha) + \bar{G}(T, \beta) = G(T, \alpha) + G(T, \beta)\,.$$

Il lemma è così provato.

9. – Richiamiamo in questo numero la definizione di integrale sopra una superficie.

Sia $S \equiv (T, Q)$ la superficie definita mediante le (1) del n. 1. Supponiamo che sia $L(S) = G(T, Q) < +\infty$.

Sia $f(x, y, z, u, v, w)$ una funzione che rispetto a (T, Q) goda delle proprietà espresse nel n. 1.

Sia α un insieme aperto relativamente a Q.

Consideriamo un gruppo di poligoni $[\pi_i;\ (i = 1, \dots, n)]$ appartenenti ad α e privi a due a due di punti in comune.

Poniamo

$$m = \max_{r=1,2,3} \left| \sum_{i=1}^{n} T_r(\pi_i^*) \right|, \qquad \delta = \max_{i=1,2,3,\dots,n} \operatorname{diam} T(\pi_i)\,,$$

$$\mu = \max\left[G(T, \alpha) - \sum_{i=1}^{n} t(T, \pi_i), \quad G_r(T, \alpha) - \sum_{i=1}^{n} |\tau_r(T, \pi_i)|\,; \quad (r = 1, 2, 3)\right].$$

I numeri m, δ, μ, che verranno detti indici del gruppo di poligoni $[\pi_i]$ rispetto a (T, Q), sono $\geqslant 0$ [**6**]. In virtù dei teoremi di approssimazione di L. Cesari [**6**] e della ipotesi $G(T, Q) < +\infty$ si può, per ogni fissato $\gamma > 0$, determinare almeno un gruppo di poligoni $[\pi_i]$ di indici $< \gamma$ rispetto a (T, α).

Consideriamo in ognuno dei poligoni π_i un punto (u_i, v_i), consideriamo quindi la somma

$$\sum_{i=1}^{n} f[(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i), \tau_1(T, \pi_i), \tau_2(T, \pi_i), \tau_3(T, \pi_i)]\,.$$

In virtù delle ipotesi e di noti risultati di L. CESARI [7] esiste il

$$\lim_{m,\,\mu,\,\delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f[x(u_i, v_i),\, y(u_i, v_i),\, z(u_i, v_i),\, \tau_1(T, \mu_i),\, \tau_2(T, \pi_i),\, \tau_3(T, \pi_i)]\,,$$

che da L. CESARI [7] è stato chiamato integrale di WEIERSTRASS di $f(x, y, z, u, v, w)$ su (T, α) e indicato con la notazione $\mathcal{J}(T, \alpha) = \int\limits_{(T,\alpha)} f\, d\sigma$.

Risulta in particolare definito $\mathcal{J}(T, Q)$. Come abbiamo ricordato nel n. 1, $\mathcal{J}(T, Q)$ è indipendente dalla rappresentazione (T, Q) di S, si può perciò indicare con la notazione $\mathcal{J}(S) = \int\limits_{S} f\, d\sigma$.

10. – Sussistono i seguenti lemmi.

Lemma 1. Sia (T, Q) data come nel n. 1 e di area secondo LEBESGUE finita. Siano α, β, γ dati come nel Lemma del n. 7. Allora si ha

$$\mathcal{J}(T, \alpha) + \mathcal{J}(T, \beta) = \mathcal{J}(T, Q)\,.$$

Questo lemma discende ovviamente dai lemmi dei nn. 7, 8 e dalla definizione di $\mathcal{J}(T, \alpha)$.

Lemma 2. Sia (T, Q) data come nel n. 1. Sia α un insieme aperto relativamente a Q e sia $G(T, \alpha) = 0$. Allora è anche

$$\mathcal{J}(T, \alpha) = 0\,.$$

Anche questo lemma discende ovviamente dalla definizione di (T, α).

11. – Veniamo ora alla dimostrazione del teorema enunciato nel n. 1.

Sia $S \equiv (T, Q)$ la superficie orientata di FRÉCHET del tipo della 2-cella data mediante le (1) del n. 1, sia $f(x, y, z, u, v, w)$ una funzione che goda nei confronti di S delle proprietà enunciate nel n. 1.

Sia Ω l'insieme chiuso e limitato dei punti (x, y, z, u, v, w) per i quali è $(x, y, z) \in [S]$, $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Poichè (x, y, z, u, v, w) è continua in Ω, esiste una costante $H > 0$ tale che in Ω si abbia $|f(x, y, z, u, v, w)| < H$.

Sia $\varepsilon > 0$ fissato ad arbitrio.

Sia $0 < \eta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{16H}, 1\right\}$ tale che per ogni coppia di punti (x, y, z, u, v, w), (x', y', z', u', v', w') di Ω, distanti fra di loro per meno di η, si abbia

$$|f(x, y, z, u, v, w) - f(x', y', z', u', v', w')| < \frac{\varepsilon}{G(T, Q) + 1}\,.$$

Sia $0 < \gamma < \eta^3$ tale che se $[\pi_i, \ (i = 1, 2, ..., n)]$ è un gruppo di poligoni di Q di indici $< \gamma$ nei confronti di (T, Q), si abbia

$$\left| \mathcal{J}(T, Q) - \sum_{i=1}^{n} f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i), \tau_1(T, \pi_i), \tau_2(T, \pi_i), \tau_3(T, \pi_i)] \right| < \varepsilon.$$

Sia N il più piccolo intero > 0 per il quale risulti

$$\sum_{N+1}^{\infty} L(T_s, Q) = \sum_{N+1}^{\infty} G(T_s, Q) < \frac{1}{H+1} \min [\varepsilon, \gamma/4],$$

essendo (T_s, Q), $(s = 1, 2, ...)$, le trasformazioni continue considerate nel n. 4. Ciò è possibile in virtù della osservazione contenuta nel n. 4 ed in forza del teorema di additività ciclica per l'area secondo LEBESGUE richiamato nel n. 1.

Siano J_s, $(s = 1, 2, ..., N)$, i continui associati alle trasformazioni (T_s, Q) come nel n. 4.

12. – Supponiamo che due di questi continui, siano J_s e J_t, abbiano punti in comune.

Affermiamo intanto che il continuo $J_s + J_t$ verifica la condizione $\mathcal{P}$ rispetto a (T, Q).

Siano infatti $\mathcal{E}_s$ ed $\mathcal{E}_t$ gli elementi propriamente ciclici di $\mathfrak{M}$ cui J_s e J_t corrispondono secondo (M, Q). L'insieme $\mathcal{E}_s + \mathcal{E}_t = M(J_s + J_t)$ è un continuo di $\mathfrak{M}$. Esso è inoltre un insieme A [**15**] dello spazio $\mathfrak{M}$ in quanto è la somma di due elementi propriamente ciclici distinti di $\mathfrak{M}$ per i quali l'insieme $\mathcal{E}_s \cdot \mathcal{E}_t = M(J_s \cdot J_t)$ è non vuoto e quindi [**15**] ridotto ad un punto. Di conseguenza l'insieme $\mathfrak{M} - (\mathcal{E}_s + \mathcal{E}_t)$, se non è vuoto, ha la proprietà [**15**] che per ciascuno Γ dei suoi componenti massimali l'insieme $F_{\mathfrak{M}}(\Gamma)$ è ridotto ad un punto appartenente a $\mathcal{E}_s + \mathcal{E}_t$, e precisamente [**15**] ad un punto taglio di $\mathfrak{M}$.

Perciò per il ragionamento del n. 3 se ne deduce che $J_s + J_t$ è un continuo di Q che soddisfa la condizione $\mathcal{P}$ rispetto a (T, Q).

Sia (T_{st}, Q) la retrazione di (T, Q), considerata come nel n. 2, relativamente a $J_s + J_t$.

Inoltre poichè l'insieme $\mathcal{E}_s \mathcal{E}_t$ è ridotto [**15**] ad un punto taglio di $\mathfrak{M}$ e poichè (M, Q) è monotona, ne viene che l'insieme $J_s \cdot J_t = M^{-1}(\mathcal{E}_s \cdot \mathcal{E}_t)$ è costituito da un continuo di Q che separa in Q.

Sia α uno degli insiemi, aperti relativamente a Q, componenti massimali di $Q - J_s \cdot J_t$ che incontrano J_s e quindi $J_s - J_s \cdot J_t$.

Di tali insiemi ne esiste almeno uno poichè $J_s - J_s \cdot J_t$ è non vuoto in in quanto $\mathcal{E}_s$, elemento propriamente ciclico di $\mathfrak{M}$, non è ridotto ad un punto.

Affermo che ne esiste soltanto uno. Infatti l'insieme $\mathcal{E}_s - \mathcal{E}_s \cdot \mathcal{E}_t =$

$= M(J_s - J_s \cdot J_t)$ è connesso in $\mathfrak{M}$ e perciò fa parte di uno solo dei componenti di $\mathfrak{M} - \mathcal{E}_s \cdot \mathcal{E}_t$ e quindi il suo modello secondo (M, Q), $J_s - J_s \cdot J_t$, fa parte di uno solo dei componenti di $Q - J_s \cdot J_t$, per essere (M, Q) monotona.

Osservo infine che i componenti massimali di $\alpha - (J_s - J_s \cdot J_t)$ sono i componenti massimali di $Q - J_s$ contenuti in α ed anche i componenti massimali di $Q - (J_s + J_t)$ contenuti in α.

Ne viene pertanto, in virtù delle definizioni di (T_s, Q), (T_t, Q), (T_{st}, Q),

$$(T_s, Q) = \begin{cases} (T_{st}, Q) & \text{se} \quad (u, v) \in \alpha\,, \\ T(J_s \cdot J_t) & \text{se} \quad (u, v) \in Q - \alpha - J_s \cdot J_t \equiv \beta, \end{cases}$$

$$(T_t, Q) = \begin{cases} (T_{s,t}, Q) & \text{se} \quad (u, v) \in \beta\,, \\ T(J_s \cdot J_t) & \text{se} \quad (u, v) \in \alpha\,, \end{cases}$$

e poichè $T_s(J_s \cdot J_t) = T_t(J_s \cdot J_t) = T_{s,t}(J_s \cdot J_t) = T(J_s \cdot J_t)$ è ridotto ad un punto si ha, in virtù dei Lemmi dei n. 8, 10,

$$\begin{aligned}
L(T_s, Q) &= L(T_s, \alpha) + L(T_s, \beta) = L(T_s, \alpha)\,, \\
L(T_t, Q) &= L(T_s, \alpha) + L(T_s, \beta) = L(T_s, \beta)\,, \\
L(T_{s,t}, Q) &= L(T_{s,t}, \alpha) + L(T_{s,t}, \beta) = L(T_s, \beta) + L(T_s, \beta)\,, \\
\mathcal{J}(T_s, Q) &= \mathcal{J}(T_s, \alpha) + \mathcal{J}(T_s, \beta) = \mathcal{J}(T_s, \alpha)\,, \\
\mathcal{J}(T_t, Q) &= \mathcal{J}(T_t, \alpha) + \mathcal{J}(T_t, \beta) = \mathcal{J}(T_t, \beta)\,, \\
\mathcal{J}(T_{s,t}, Q) &= \mathcal{J}(T_{s,t}, \alpha) + \mathcal{J}(T_{s,t}, \beta) = \mathcal{J}(T_s, \alpha) + \mathcal{J}(T_t, \beta)\,,
\end{aligned}$$

e quindi

$$L(T_{s,t}, Q) = L(T_s, Q) + L(T_t, Q)\,, \qquad \mathcal{J}(T_{s,t}, Q) = \mathcal{J}(T_s, Q) + \mathcal{J}(T_t, Q)\,.$$

13. – Ripetendo questa considerazione al più N volte possiamo considerare in luogo dei continui $J_1, J_s, \ldots, J_N$ soddisfacenti la condizione $\mathcal{D}$ rispetto a (T, Q), certi altri continui $J'_1, J'_2, \ldots, J'_N$ soddisfacenti anche questi la condizione $\mathcal{D}$ rispetto a (T, Q), privi a due a due di punti in comune e tali inoltre che dette (T'_s, Q), $(s = 1, 2, \ldots, N')$, le retrazioni ad essi associate come nel n. 2, risulti

$$\sum_{s=1}^{N} L(T_s, Q) = \sum_{s=1}^{N'} L(T'_s, Q)\,, \qquad \sum_{s=1}^{N} \mathcal{J}(T_s, Q) = \sum_{s=1}^{N'} \mathcal{J}(T'_s, Q)\,.$$

Possiamo perciò costruire un gruppo di regioni poligonali $R_1, R_2, \dots, R_{N'}$, prive a due a due di punti interni in comune e tali che detto, per ogni s, R_s^0 l'insieme dei punti che sono interni ad R, relativamente a Q, si abbia $J'_s \subset R_s^0$.

14. – Sia $\sigma > 0$ tale che se $h_r \subset K_r$, $|h_r| < \sigma$, $(r = 1, 2, 3)$, si abbia

$$\left|\iint_{h_r} \Psi_r(P, T, Q)\, \mathrm{d}P\right| < \min\left\{\frac{\gamma}{12}, \frac{\eta^3}{N+1}\right\},$$

$$\left|\iint_{h_2} \Psi_r(P, T'_s, Q)\, \mathrm{d}P\right| < \min\left\{\frac{\gamma}{12}, \frac{\eta^3}{N+1}\right\}.$$

Per ogni s, $(s = 1, 2, \dots, N')$, sia $\gamma_s < \min\left\{\frac{\gamma}{N'}, \frac{\gamma}{4N'}\right\}$ un numero > 0 tale che per ogni gruppo di poligoni $[\pi_{is}, (i = 1, 2, \dots, \nu_s)]$ di Q di indici $< \gamma_s$ rispesso a (T'_s, Q) si abbia, con evidente significato delle notazioni,

$$\Big| \mathcal{J}(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\nu_s} f[(x'_s(u_{si}, v_{si}), y'_s(u_{si}, v_{si}), z'_s(u_{si}, v_{si}),$$
$$\tau_1(T'_s, \pi_{si}), \tau_2(T'_s, \pi_{si}), \tau_3(T'_s, \pi_{si})] \Big| < \frac{\varepsilon}{N'}.$$

Sia $[\pi_{si}, (i = 1, 2, \dots, \nu_s)]$ un gruppo di poligoni di Q di indici $< \gamma_s$ nei confronti di (T'_s, Q), $(s = 1, 2, \dots, N')$.

A partire da questo gruppo di poligoni costruiamo un nuovo gruppo mediante il seguente procedimento.

Fissiamo un valore di s. Per ogni poligono del gruppo $[\pi_{si}, (i = 1, 2, \dots, \nu_s)]$ cui appartengono punti esterni a R_s consideriamo i poligoni $[\pi_{sij}, (j=1, 2, \dots, \nu_{si})]$ in cui esso è suddiviso dalle poligonali costituenti il contorno di R_s.

Sopprimiamo quindi quei poligoni π_{sij}, $(j = \nu'_{si} + 1, \nu'_{si} + 2, \dots, \nu_{si})$ che sono esterni a R_s.

Osserviamo che per ciascuno di questi poligoni è, in ogni punto $P \in K_r$,

$$O(P, T'_{sr}, \pi_{sij}) = 0, \qquad (j = \nu'_{si} + 1, \nu'_{si} + 2, \dots, \nu_{si};\ r = 1, 2, 3).$$

Osserviamo anche che i poligoni $[\pi_{sij}; (s = 1, 2, \dots, N';\ i = 1, 2, \dots, \nu_s;\ j = 1, 2, \dots, \nu'_{si})]$ che rimangono sono a due a due privi di punti in comune e che si ha

$$\left|\sum_{j=1}^{\nu'_{si}} T'_{sr}(\pi^*_{sij})\right| = \left|\sum_{j=1}^{\nu_{si}} T'_{sr}(\pi^*_{sij})\right| = \left| T'_{sr}(\pi^*_{si}) \right|.$$

Indichiamo per brevità il gruppo di questi rimanenti poligoni con la notazione $[p_{si};\ (s = 1, 2, ..., N';\ i = 1, 2, ..., \mu_s)]$.

Consideriamo, per ogni $r = 1, 2, 3;\ s = 1, 2, ..., N';\ i = 1, 2, ..., \mu_s$, l'insieme $T'_{sr}(p^*_{si})$ e per ogni numero reale $\varrho > 0$ l'insieme $[T'_{sr}(p^*_{si})]_\varrho$ costituito dai punti del quadrato K_r che distano da $T'_{sr}(p^*_{si})$ per meno di ϱ.

Si ha, poichè l'insieme $T'_{sr}(p^*_{si})$ è chiuso e per la definizione di $O(P, T'_{sr}, p_{si})$,

$$\lim_{\varrho\to 0} [T'_{sr}(p^*_{si})]_\varrho = T'_{sr}(p^*_{si}), \qquad \lim_{\varrho\to 0} |[T'_{sr}(p^*_{si})]_\varrho| = |T'_{sr}(p^*_{si})|,$$

$$\lim_{\varrho\to 0} \iint_{K_r - [T'_{sr}(p^*_{si})]_\varrho} O(P, T'_{sr}, p_{si})\, dP = \iint_{K_r - T'_{si}(p^*_{si})} O(P, T'_{sr}, p_{si})\, dP = \tau_r(T'_s, p_{si}).$$

Si può perciò scegliere $\varrho > 0$ in modo che si abbia

$$\left|\sum_{i=1}^{\mu_s} [T'_{sr}(p^*_{si})]_\varrho\right| < \left|\sum_{i=1}^{\mu_s} T'_{sr}(p^*_{si})\right| + \gamma_s = \left|\sum_{i=1}^{\nu_s} T'_{sr}(\pi^*_{si})\right| + \gamma_s < 2\gamma_s,$$

$$(s = 1, 2, ..., N';\ r = 1, 2, 3);$$

$$\operatorname{diam} [T'_s(p_{si})]_\varrho < \operatorname{diam} T'_s(p_{si}) + \gamma_s < 2\gamma_s, \qquad (s = 1, 2, ..., N';\quad i = 1, 2, ..., \mu_s),$$

$$\left|\iint_{K_r - [T'_{sr}(p^*_{si})]_\varrho} O(P, T'_{sr}, p_{si})\, dP - \tau_r(T'_s, p_{si})\right| < \frac{\gamma_s}{24\mu_s},$$

$$(s = 1, 2, ..., N';\ r = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, ..., \mu_s).$$

15. – Consideriamo per ogni s, $(s = 1, 2, ..., N')$, la classe $[\gamma]_s$ dei componenti massimali dell'insieme, aperto relativamente a Q, $Q - J'_s$ e ricordiamo che su ciascuno dei componenti $\gamma \subset [\gamma]_s$ la trasformazione (T'_s, Q) è costante.

Consideriamo uno dei poligoni p_{si}, $(i = 1, 2, ..., \mu_s)$, e l'insieme chiuso $p_{si} \cdot J'_s$.

Siano λ_{sij}, $(j = 1, 2, ...)$, i componenti massimali dell'insieme (aperto relativamente a p_{si}) $p_{si} - p_{si} \cdot J'_s$ sui quali risulta $\operatorname{diam} T(\lambda_{sij}) > \varrho$, ϱ essendo il numero reale > 0 introdotto nel n. precedente.

Ogni λ_{sij} appartiene ad un elemento della classe $[\gamma]_s$.

Osserviamo quindi che il numero complessivo degli elementi di $[\gamma]_s$ cui appartengono insiemi λ_{sij}, con $\operatorname{diam} T(\lambda_{sij}) > \varrho$, è finito in virtù di un risultato di L. CESARI ([**12**], p. 27) secondo il quale: «se K è un continuo appartenente a Q che gode della proprietà $\mathcal{P}$ rispetto a (T, Q), è finito il numero dei componenti γ di $Q - K$ sui quali è $\operatorname{diam} T(\gamma) > \varrho$ con ϱ positivo ed arbitrario».

Siano γ_{sij}, $(j = 1, 2, ..., \mu'_{si})$, gli elementi di $[\gamma]_s$ in questione e sia γ_{sij} uno di questi elementi.

L'insieme $F_Q(\gamma_{sij})$ è costituito da un continuo appartenente a J'_s che diciamo δ_{sij} e l'insieme $T(\delta_{sij}) = T'_s(\delta_{sij})$ è ridotto ad un punto.

Si può perciò determinare un numero $\tau > 0$ tale che

$$\operatorname{diam} T[(\delta_{sij})\tau] < \varrho ,$$

essendo $(\delta_{sij})_\tau$ l'insieme dei punti di Q che distano da δ_{sij} per meno di τ.

L'insieme $\gamma_{sij} \cdot (\delta_{sij})_\tau$ è aperto relativamente a Q e connesso.

Come nel n. 7 possiamo costruire per ogni γ_{sij} una poligonale semplice s_{sij} appartenente a $\gamma_{sij} \cdot (\delta_{sij})_\tau$ e contenente nel suo interno [esterno] l'insieme $\gamma_{sij} - (\delta_{sij})_\tau$.

Mediante queste poligonali Δ_{sij}, $(j = 1, 2, ..., \mu'_{si})$, otteniamo una suddivisione di ciascun poligono p_{si} in un numero finito di poligoni semplici p_{sij}, $(j = 1, 2, ..., \mu''_{si})$.

Sopprimiamo infine dal gruppo di poligoni p_{sij}, $(j = 1, 2, ..., \mu''_{si})$, quei poligoni p_{sij}, $(j = \overline{\mu}_{si} + 1, \overline{\mu}_{si} + 2, ..., \mu''_{si})$, che non incontrano J'_s.

Osserviamo che si ha

$$O(P, T'_{sr}, p_{sij}) = 0 , \quad P \subset K_r , \quad (j = \overline{\mu}_{si} + 1, \overline{\mu}_{si} + 2, ..., \mu''_{si};\ r = 1, 2, 3).$$

Abbiamo così formato, a partire dal gruppo di poligoni $[\pi_{si}$, $(s=1, 2, ..., N'$; $i = 1, 2, ..., \nu_s)]$, il gruppo di poligoni $[p_{sij}$, $(s = 1, 2, ..., N'$; $i = 1, 2, ..., \mu_s$; $j = 1, 2, ..., \overline{\mu}_{si})]$.

Questi poligoni sono a due a due privi di punti in comune.

16. - Facciamo vedere che per ogni s, $(s = 1, 2, ..., N')$, il gruppo di poligoni p_{sij}, $(i = 1, 2, ..., \mu_s$; $j = 1, 2, ..., \overline{\mu}_{si})$ è di indici $< \gamma_s$ rispetto alla trasformazione (T'_s, Q).

Osserviamo intanto che in virtù della costruzione si ha, per ogni r, $(r=1, 2, 3)$,

$$\left| \sum_{i=1}^{\mu_s} \sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} T'_{sr}(p^*_{sij}) \right| = \left| \sum_{i=1}^{\mu_s} T'_{sr}(p^*_{si}) \right| ,$$

in virtù di quanto si è osservato nel n. 14 ne viene perciò

$$\max_{r=1,2,3} \left| \sum_{i=1}^{\mu_s} \sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} T'_{sr}(p^*_{sij}) \right| = \max_{r=1,2,3} \left| \sum_{i=1}^{\nu_s} T'_{sr}(\pi^*_{si}) \right| < \gamma_s .$$

Osserviamo quindi che ciascun poligono p_{sij} appartiene ad un poligono p_{si}

e che a sua volta ciascun poligono p_{si} è contenuto in un poligono π_{si}. Si ha perciò

$$\max_{\substack{j=1\ldots\overline{\mu}_{si}\\ i=1\ldots\mu_s}} \operatorname{diam} T'_s(p_{sij}) \leqslant \max_{i=1\ldots\mu_s} \operatorname{diam} T'_s(p_{si}) \leqslant \max_{i=1\ldots\nu_s} \operatorname{diam} T'_s(\pi_{si}) < \gamma_s\,.$$

Osserviamo infine

$$\begin{aligned} G_r(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\mu_s}\sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} \left| \tau_r(T'_s, p_{sij}) \right| &= G_r(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\mu_s}\sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} \left| \iint_{K_r} O(P, T'_{sr}, p_{sij})\,\mathrm{d}P \right| \\ &= G_r(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\mu_s}\sum_{j=1}^{\mu''_{si}} \left| \iint_{K_r} O(P, T'_{sr}, p_{sij})\,\mathrm{d}P \right| \\ &\leqslant G_r(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\mu_s} \left| \iint_{K_r} \sum_{j=1}^{\mu''_{si}} O(P, T'_{sr}, p_{sij})\,\mathrm{d}P \right|, \end{aligned}$$

da cui poichè su quasi tutto K_r è, in virtù della costruzione,

$$\sum_{j=1}^{\mu''_{si}} O(P, T'_{sr}, p_{sij}) = O(P, T'_{sr}, p_{si})\,,$$

si deduce

$$\begin{aligned} G_r(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\mu_s}\sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} \left| \tau_r(T'_s, p_{sij}) \right| &\leqslant G_r(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\mu_s} \left| \iint_{K_r} O(P, T'_{sr}, p_{si})\,\mathrm{d}P \right| \\ &\leqslant G_r(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\nu_s}\sum_{j=1}^{\nu'_{si}} \left| \iint_{K_r} O(P, T'_{sr}, \pi_{sij})\,\mathrm{d}P \right|, \end{aligned}$$

ove $[\pi_{sij}]$ sono i poligoni definiti nel n. 14. Con le stesse considerazioni di sopra si ottiene quindi

$$\begin{aligned} G_r(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\mu_s}\sum_{j=1}^{\mu_{si}} \left| \tau_r(T'_s, p_{sij}) \right| &\leqslant G_r(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\nu_s}\sum_{j=1}^{\nu_{si}} \left| \iint_{K_r} O(P, T'_{sr}, \pi_{sij})\,\mathrm{d}P \right| \\ &\leqslant G_r(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\nu_s} \left| \iint_{K_r} \sum_{j=1}^{\nu_{si}} O(P, T'_{sr}, \pi_{sij})\,\mathrm{d}P \right| \\ &\leqslant G_r(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\nu_s} \left| \iint_{K_r} O(P, T'_{sr}, \pi_{si})\,\mathrm{d}P \right| < \gamma_s. \end{aligned}$$

In modo completamente analogo, facendo uso della disuguaglianza ricordata nel n. 6, si prova che

$$G(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\mu_s} \sum_{j=1}^{\bar{\mu}_{si}} t(T_s, p_{sij}) < \gamma_s .$$

Si ha perciò, per ogni $1 \leqslant s \leqslant N'$, scegliendo (u_{sij}, v_{sij}) su p_{sij} (8),

$$\left| \mathcal{J}(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\mu_s} \sum_{j=1}^{\bar{\mu}_{si}} f[x(u_{sij}, v_{sij}), y(u_{sij}, v_{sij}), z(u_{sij}, v_{sij}), \tau_1(T'_s, p_{sij}), \tau_2(T'_s, p_{sij}), \tau_3(T'_s, p_{sij})] \right| < \frac{\varepsilon}{N'}$$

e quindi anche, in virtù di quanto si è visto nel n. 13,

$$(1) \qquad \left| \sum_{s=1}^{N'} \mathcal{J}(T_s, Q) - \sum_{s=1}^{N'} \sum_{i=1}^{\mu_s} \sum_{j=1}^{\mu_{si}} f[x(u_{sij}, v_{sij}), y(u_{sij}, v_{sij}), z(u_{sij}, v_{sij}), \tau_1(T'_s, p_{sij}), \tau_2(T'_s, p_{sij}), \tau_3(T'_s, p_{sij})] \right| < \varepsilon .$$

17. – Proviamo ora che il gruppo di poligoni $[p_{sij}, (s = 1, 2, ..., N'; i = 1, 2, ..., \mu_s; j = 1, 2, ..., \bar{\mu}_{si})]$ è di indici $< \gamma$ rispetto alla trasformazione (T, Q), essendo γ il numero introdotto nel n. 11.

Sia p_{sij} uno di questi poligoni, sia p^*_{sij} la sua frontiera.

Sia ω uno dei componenti massimali dell'insieme aperto $p^*_{sij} - p^*_{sij} \cdot J'_s$. L'insieme $T'_s(\omega)$ è ridotto ad un punto che appartiene anche a $T(\omega)$ mentre l'insieme $T(\omega)$ appartiene ad una sfera di centro in questo punto e raggio ϱ. Infatti o ω appartiene a qualcuno degli insiemi $\gamma_{sij} \cdot (\delta_{si})_\tau$, $(j = 1, 2, ..., \mu'_{si})$, ed allora è, per il modo come si è preso $(\delta_{sij})_\tau$, diam $T(\omega) < \varrho$, oppure ω_j non appartiene ad alcuno degli insiemi γ_{sij} ed allora, per la definizione di γ_{sij}, è ancora diam $T(\omega) < \varrho$.

Ne viene intanto che ciascuno degli insiemi $T_r(\omega)$, $(r = 1, 2, 3)$, appartiene all'insieme

$$\sum_{i=1}^{\mu_s} \sum_{j=1}^{\bar{\mu}_{si}} [T'_{sr}(p^*_{sij})]_\varrho = \sum_{i=1}^{\mu_s} [T'_{sr}(p^*_{si})]_\varrho .$$

Infine i rimanenti punti di p^*_{sij} hanno la stessa immagine sia secondo (T, Q), sia secondo (T'_s, Q).

Si ha quindi

$$\sum_{s=1}^{N'} \sum_{i=1}^{\mu_s} \sum_{j=1}^{\bar{\mu}_{si}} T_r(p^*_{sij}) \subset \sum_{s=1}^{N'} \sum_{i=1}^{\mu_s} [T'_{sr}(p'_{si})]_\varrho , \qquad (r = 1, 2, 3),$$

(8) Si noti che su ogni p_{sij} esiste un punto (u_{sij}, v_{sij}) in cui (T'_s, Q) coincide con (T, Q).

e perciò

$$\max_{r=1,2,3} \sum_{s=1}^{N'} \sum_{i=1}^{\mu_s} \sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} T_r(p^*_{sij}) < 2N'\gamma_s < \gamma .$$

Osserviamo, con lo stesso ragionamento, che su ogni componente massimale Ω dell'insieme $p_{si} - p_{si} \cdot J'_s$, aperto relativamente a p_{si}, si ha diam $T(\Omega) < \varrho$. Ne viene quindi

$$T(p_{sij}) \subset [T'_s(p_{sij})]_\varrho ,$$

e poichè ogni p_{sij} fa parte di qualche p_{si}

$$T(p_{sij}) \subset [T'_s(p_{si})]_\varrho .$$

Se ne deduce periò

$$\max_{i,j,s} \operatorname{diam} T(p_{sij}) < \max_{i,s} \operatorname{diam} [T'_s(p_{si})]_\varrho < 2\gamma_s < \gamma .$$

Il ragionamento di sopra prova anche che le due curve $T'_{sr}(p^*_{sij})$, $T_r(p^*_{sij})$, ($s = 1, 2, ..., N'$; $i = 1, 2, ..., \mu_s$; $j = 1, 2, ..., \overline{\mu}_{si}$; $r = 1, 2, 3$), hanno distanza secondo FRÉCHET minore di ϱ.

Ne viene perciò che in ogni punto di $K_r - [T'_{sr}(p^*_{si})]_\varrho$, ($s = 1, 2, ..., N'$; $j = 1, 2, ..., \mu_s$; $r = 1, 2, 3$) si ha

$$O(P, T'_{sr}, p_{sij}) = O(P, T_r, p_{sij}) , \qquad (j = 1, 2, ..., \overline{\mu}_{si}).$$

È quindi

$$G_r(T, Q) - \sum_{s=1}^{N'} \sum_{i=1}^{\mu_s} \sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} |\tau_r(T, p_{sij})| = G_r(T, Q) - \sum_{s=1}^{N'} \sum_{i=1}^{\mu_s} \sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} \left| \iint_{K_r} O(P, T_r, p_{sij}) \, \mathrm{d}P \right|$$

$$\leqslant G_r(T, Q) - \sum_{s=1}^{N} G_r(T_s, Q) + \sum_{s=1}^{N'} G_r(T'_s, Q) - \sum_{s=1}^{N'} \sum_{i=1}^{\mu_s} \left| \iint_{K_r} \sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} O(P, T_r, p_{sij}) \, \mathrm{d}P \right|$$

$$\leqslant \gamma/4 + \sum_{s=1}^{N'} G_r(T_s, Q) -$$

$$- \sum_{s=1}^{N'} \sum_{i=1}^{\mu_s} \left| \iint_{K_r - [T'_{sr}(p^*_{si})]_\varrho} \sum_{s=1}^{\overline{\mu}_{si}} O(P, T'_{sr}, p_{sij}) + \iint_{[T'_{sr}(p^*_{si})]_\varrho} \sum_{s=1}^{\overline{\mu}_{si}} O(P, T_r, p_{sij}) \, \mathrm{d}P \right|$$

$$\leqslant \gamma/4 + \sum_{s=1}^{N'} G_r(T'_s, Q) -$$

$$- \sum_{s=1}^{N'} \sum_{i=1}^{\mu_s} \left| \iint_{K_r - [T'_{sr}(p^*_{si})]_\varrho} O(P, T'_{sr}, p_{si}) \, \mathrm{d}P \right| + \sum_{s=1}^{N'} \sum_{i=1}^{\mu_s} \iint_{T[T'_{sr}(p^*_{si})]_\varrho} \left| \sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} O(P, T_r, p_{sij}) \right| \mathrm{d}P$$

$$\leqslant \gamma/4 + \sum_{s=1}^{N'} G_r(T'_s, Q) - \sum_{s=1}^{N'} \sum_{i=1}^{\mu_s} \left[|\tau_r(T'_s, p_{si})| - \frac{\gamma_s}{24 \cdot \mu_s} \right] +$$

$$+ \iint_{\sum_{s=1}^{N'} \sum_{i=1}^{\mu_s} [T'_{sr}(p^*_{si})]_\varrho} \sum_{s=1}^{N'} \sum_{i=1}^{\mu_s} \sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} |O(P, T_r, p_{sij})| \, \mathrm{d}P .$$

Ma si ha

$$\left|\sum_{s=1}^{N'}\sum_{i=1}^{\mu_s}[T'_{sr}(p^*_{si})]_Q\right| \leqslant \sum_{s=1}^{N'}\left|\sum_{i=1}^{\mu_s}[T'_{sr}(p^*_{si})]_Q\right| \leqslant \sum_{s=1}^{N'} 2\gamma_s = 2N'\gamma_s < \frac{\sigma}{2},$$

ed è perciò

$$\iint\limits_{\sum\limits_{s=1}^{N'}\sum\limits_{i=1}^{\mu_s}[T'_{sr}(p^*_{si})]_Q} \sum_{s=1}^{N'}\sum_{i=1}^{\mu_s}\sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} |\, O(P, T_r, p_{sij})|\, \mathrm{d}P \leqslant \iint\limits_{\sum\limits_{s=1}^{N'}\sum\limits_{i=1}^{\mu_s}[T'_{sr}(p^*_{si})]_Q} \Psi_r(P, T, Q)\, \mathrm{d}Q \leqslant \frac{\gamma}{12}.$$

Si ha quindi

$$G_r(T, Q) - \sum_{s=1}^{N'}\sum_{i=1}^{\mu_s}\sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} |\tau_r(T, p_{sij})| \leqslant \frac{\gamma}{4} + \sum_{s=1}^{N'}\left[G_r(T'_s, Q) - \sum_{i=1}^{\mu_s}|\tau_r(T'_s, p_{si})|\right] +$$

$$+ N'\mu_s \frac{\gamma_s}{24\mu_s} + \frac{\gamma}{12} \leqslant \frac{\gamma}{4} + \sum_{s=1}^{N'}\gamma_s + N'\frac{\gamma_s}{24} + \frac{\gamma}{12} \leqslant \frac{\gamma}{4} + \frac{\gamma}{8} + \frac{1}{3}\frac{\gamma}{8} + \frac{1}{3}\frac{\gamma}{4} < \gamma.$$

Alla stessa maniera, facendo uso della disuguaglianza ricordata nel n. 6, si prova che

$$G(T, Q) - \sum_{s=1}^{N'}\sum_{i=1}^{\mu_s}\sum_{j=1}^{\mu_{si}} t(T, p_{sij}) < \gamma. \tag{1}$$

Il gruppo di poligoni $[p_{sij}, (s = 1, 2, \ldots, N';\ i = 1, 2, \ldots, \mu_s;\ j = 1, 2, \ldots, \overline{\mu}_{si})]$ è perciò di indici $< \gamma$ rispetto a (T, Q).

Risulta quindi

$$\left| \mathcal{J}(T, Q) - \sum_{s=1}^{N'}\sum_{i=1}^{\mu_s}\sum_{j=1}^{\overline{\mu}_{si}} f[x(u_{sij}, v_{sij}), y(u_{sij}, v_{sij}), z(u_{sij}, v_{sij}), \right. \tag{2}$$

$$\left. \tau_1(T, p_{sij}), \tau_2(T, p_{sij}), \tau_3(T, p_{sij})] \right| < \varepsilon.$$

18. – Facciamo le seguenti abbreviazioni:

$$\tau_{sijr} = \tau_r(T, p_{sij}), \qquad t_{sij} = t(T, p_{sij}), \qquad \tau'_{sijr} = \tau_r(T_s, p_{sij}), \qquad t'_{sij} = t(T_s, p_{sij}),$$

$$[r = 1, 2, 3;\ s = 1, 2, \ldots, N';\ i = 1, 2, \ldots, \mu_s;\ j = 1, 2, \ldots, \overline{\mu}_{si}],$$

$$f(x, y, z, u, v, w) = f[x_r, u_r].$$

Consideriamo quindi la differenza

$$D = \sum_{s,i,j}\{f[x_{sijr}, \tau'_{sijr}] - f[x_{sijr}, \tau_{sijr}]\}.$$

Ci proponiamo di dare nei nn. 18-21 una maggiorazione per D. Allo scopo consideriamo per ogni r, s, i, j la differenza

$$\delta_{sijr} = \iint_{K_r} O(P, T_r, p_{sij})\,dP - \iint_{K_r} O(P, T'_{sr}, p_{sij})\,dP = \tau_{sijr} - \tau'_{sijr}.$$

In virtù di quanto abbiamo osservato nel n. 17 si ha

$$O(P, T_r, p_{sij}) = O(P, T'_{sr}, p_{sij}), \qquad P \subset K_r - [T'_{sr}(p^*_{sij})]_\varrho \equiv K_r - T'_{sir\varrho}.$$

È dunque

$$|\delta_{sijr}| = \left|\iint_{T'_{sir\varrho}} \{O(P, T_r, p_{sij}) - O(P, T'_{sr}, p_{sij})\}\,dP\right| \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{T'_{sir\varrho}} |O(P, T_s, p_{sij})|\,dP + \iint_{T'_{sir}} |O(P, T'_{sr}, p_{sij})|\,dP.$$

Ne viene quindi

$$\sum_j |\delta_{sijr}| \leqslant \iint_{T'_{sir\varrho}} \sum_j |O(P, T_r, p_{sij})|\,dP + \iint_{T'_{sir\varrho}} \sum_j |O(P, T'_{sr}, p_{sij})|\,dP,$$

ed anche

$$\sum_{s,i,j} |\delta_{sijr}| \leqslant \iint_{\sum_{s,i} T'_{sir\varrho}} \sum_{s,i,j} |O(P, T_{sr}, p_{sij})|\,dP + \iint_{\sum_{s,i,j} T'_{sir\varrho}} \sum_{s,i,j} |O(P, T'_{sr}, p_{sij})|\,dP \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{\sum_{s,j} \overline{T'_{sir\varrho}}} \Psi_r(P, T, Q)\,dP + \iint_{\sum_{s,i} \overline{T'_{sir\varrho}}} \sum_s \Psi_r(P, T'_s, Q)\,dP,$$

dalla quale, per il modo come si sono scelti ϱ e σ, si ha

$$\sum_{s,i,j} |\delta_{sijr}| \leqslant (N'+1)\frac{\eta^3}{N+1} \leqslant \eta^3.$$

19. – Siano α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 due terne di numeri reali tali che $\sum_{r=1}^{3} \alpha_r^2 = \sum_{r=1}^{3} \beta_2^r = 1$.

Consideriamo la identità (L. Cesari [7])

$$1 - \sum_{r=1}^{3} \alpha_r \beta_r = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} (\alpha_r - \beta_r)^2 .$$

Ponendo in questa

$$\alpha_r = \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}}, \qquad \beta_r = \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, N'; \quad i = 1, 2, \ldots, \mu_s; \quad j = 1, 2, \ldots, \mu_{si}),$$

si ha

$$1 - \sum_{r=1}^{3} \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}} \cdot \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}} - \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}} \right]^2 .$$

Da questa si deduce

$$\begin{aligned}
\sum_{s,i,j} t'_{sij} \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}} - \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}} \right]^2 &= 2 \sum_{s,i,j} \left[t'_{sij} - \sum_{r=1}^{3} \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}} \cdot \tau'_{sijr} \right] \leq \\
&\leq 2 \sum_{s} \sum_{i,j} t'_{sij} - 2 \sum_{s,i,j} \sum_{r=1}^{3} \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}} (\tau_{sijr} - \delta_{sijr}) \leq \\
&\leq 2 \sum_{s} G(T'_s, Q) - 2 \sum_{s,i,j} \left[\sum_{r=1}^{3} \frac{\tau^2_{sijr}}{t_{sij}} - \sum_{r=1}^{3} \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}} \cdot \delta_{sijr} \right] \leq \\
&\leq 2G(T, Q) - 2 \sum_{s,i,j} t_{sij} + 2 \sum_{s,i,j} \sum_{r=1}^{3} |\delta_{sijr}| \leq \\
&\leq 2 \left[G(T, Q) - \sum_{s,i,j} t_{sij} \right] + 6\eta^3 ,
\end{aligned}$$

dalla quale, per la (1) del n. 17 e per il modo come si è scelto γ, si ottiene

$$\sum_{s,i,j} t'_{sij} \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}} - \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}} \right]^2 \leq 8\eta^3 .$$

20. – Consideriamo i poligoni del gruppo $[p_{sij}$, $(s = 1, 2, \ldots, N'$; $i = 1, 2, \ldots, \mu_s$; $j = 1, 2, \ldots, \bar{\mu}_{si})]$ per i quali risulta

$$\left| \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}} - \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}} \right| < \eta ,$$

ed indichiamo il loro gruppo con la notazione $[p'_{sij}]$.

Consideriamo quindi quelli per cui risulta

$$\left| \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}} - \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}} \right| \geq \eta ,$$

ed indichiamo il loro gruppo con la notazione $[p'_{si\eta}]$.

Consideriamo la somma $\sum'' t'_{sij}$ estesa ai poligoni del gruppo $[p''_{s,i,j}]$. Si ha

$$\eta^2 \sum_{sij}'' t'_{sij} \leq \sum_{s,i,j}' t'_{sij} \left[\frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}} - \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}}\right]^2 \leq \sum_{s,i,j} t'_{s,i,j} \left[\frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}} - \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}}\right]^2 \leq 8\eta^3 ,$$

ne viene perciò

$$\sum_{s,i,j}'' t'_{s,i,j} \leq 8\eta .$$

21. – Ritorniamo a considerare la differenza D introdotta nel n. 18.

Si ha, in virtù della definizione di $f[x_r, u_r]$,

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{s,i,j} \{ f(x_{sijr}, \tau'_{sijr}] - f[x_{sijr}, \tau_{sijr}]\} = \sum_{s,i,j} \left\{ f\left[x_{sijr}, \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}}\right] t'_{sij} - f\left[x_{sijr}, \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}}\right] t_{sij} \right\} = \\
&= \sum_{s,i,j} \left\{ f\left[x_{sijr}, \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}}\right] - f\left[x_{sijr}, \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}}\right] \right\} t'_{sij} + \sum_{s,i,j} f\left[x_{sijr}, \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}}\right] \{t'_{sij} - t_{sij}\} = \\
&= \sum_{s,i,j}' \left\{ f\left[x_{sij}, \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}}\right] - f\left[x_{sijr} - \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}}\right] \right\} t'_{sij} + \sum_{s,i,j}'' \left\{ f\left[x_{sijr}, \frac{\tau_{sijr}}{t'_{sij}}\right] - f\left[x_{sijr}, \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}}\right] \right\} t'_{sjj} + \\
&\qquad + \sum_{s,i,j} f\left[x_{sijr}, \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}}\right] \{t'_{sij} - t_{sij}\} = s_1 + s_2 + s_3 .
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$|s_1| = \left| \sum_{s,i,j}' \left\{ f\left[x_{sijr}, \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}}\right] - f\left[x_{sijr}, \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}}\right] \right\} t'_{sij} \right| \leq \frac{\varepsilon}{G(T, Q) + 1} \sum_{s,i,j}' t'_{sij} \leq \frac{\varepsilon \cdot G(T, Q)}{G(T, Q) + 1} < \varepsilon,$$

$$|s_2| = \left| \sum_{s,i,j}'' \left\{ f\left[x_{sijr}, \frac{\tau'_{sijr}}{t'_{sij}}\right] - f\left[x_{sijr}, \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}}\right] \right\} t'_{sij} \right| \leq 2H \sum_{s,i,j}'' t'_{sij} \leq 2H 8\eta = 16H\eta < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned}
|s_3| &= \left| \sum_{s,i,j} f\left[x_{sijr}, \frac{\tau_{sijr}}{t_{sij}}\right] \{t'_{sij} - t_{sij}\} \right| \leq H \sum_{s,i,j} |t'_{sij} - t_{sij}| = \\
&= H \sum_{s,i,j} \left| \left[\sum_{r=1}^{3} \tau'^2_{sijr}\right]^{1/2} - \left[\sum_{r=1}^{3} \tau^2_{sijr}\right]^{1/2} \right| \leq \\
&\leq H \sum_{s,i,j} \sum_{r=1}^{3} |\tau'_{sijr} - \tau_{sij}| = H \sum_{s,i,j} \sum_{r=1}^{3} |\delta_{sijr}| \leq H3\eta^3 \leq H3\eta < \varepsilon ,
\end{aligned}$$

ne viene quindi

$$|D| < 3\varepsilon . \tag{1}$$

22. – Dal confronto fra la (1) del n. 16, la (2) del n. 17 e la (1) del n. 21 otteniamo

$$\left| \mathcal{J}(T, Q) - \sum_{s=1}^{N} \mathcal{J}(T_s, Q) \right| < 2\varepsilon + |D| < 5\varepsilon .$$

D'altra parte, in virtù delle ipotesi fatte su $f(x, y, z, u, v, w)$, si ha

$$|f[x_r, u_r]| \leqslant [u^2 + v^2 + w^2]^{1/2} \left| f\left[x_r, \frac{u_r}{[u^2 + v^2 + w^2]^{1/2}}\right]\right| \leqslant [u^2 + v^2 + w^2]^{1/2} H ,$$

ed in virtù della definizione di integrale $\mathcal{J}(T, Q)$ si ha

$$|\mathcal{J}(T_s, Q)| \leqslant HL(T_s, Q) = HG(T_s, Q) .$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{J}(T, Q) - \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{J}(T_s, Q) \right| &= \left| \mathcal{J}(T, Q) - \sum_{s=1}^{N} \mathcal{J}(T_s, Q) - \sum_{s=N+1}^{\infty} \mathcal{J}(T_s, Q) \right| \leqslant \\ &\leqslant \left| \mathcal{J}(T, Q) - \sum_{s=1}^{N} \mathcal{J}(T_s, Q) \right| + \left| \sum_{s=N+1}^{\infty} \mathcal{J}(T_s, Q) \right| \leqslant \\ &\leqslant 5\varepsilon + H \sum_{s=N+1}^{\infty} G(T_s, Q) \leqslant 5\varepsilon + \frac{H\varepsilon}{H+1} < 6\varepsilon , \end{aligned}$$

e dall'arbitrarietà di ε si deduce

$$\mathcal{J}(T, Q) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{J}(T_s, Q) .$$

Il teorema enunciato nel n. 1 è così completamente dimostrato.

23. – Osserviamo infine che il teorema enunciato nel n. 1 vale anche per superficie orientate di FRÉCHET del tipo della 2-sfera $\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{C})$, di area finita.

Basta infatti osservare che l'integrale $\mathcal{J}(\Sigma)$ sopra una tale superficie si riconduce all'integrale $\mathcal{J}(S') = \mathcal{J}(T', C)$, essendo $S' \equiv (T', C)$ la superficie del tipo della 2-cella associata a $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ secondo la costruzione di L. CESARI ([**8**], p. 23).

Bibliografia.

[1] V. E. BONONCINI, *Sugli integrali regolari del Calcolo delle variazioni per superficie in forma parametrica*, Rivista Mat. Univ. Parma 3, 131-151 (1952).

[2] J CECCONI, *Sul teorema di Gauss-Green*, Rend. Sem. Mat. Padova **20**, 194-218 (1951).

[3] J. CECCONI, *Sul teorema di Stokes*, Rivista Mat. Univ. Parma **3**, 233-264 (1953).

[4] J. CECCONI, *Un complemento al teorema di Stokes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **22**, 23-37 (1953).

[5] J. CECCONI, *Sul teorema di Gauss-Green per una particolare classe di superficie*, Rend. Sem. Mat. Padova **22**, 81-112 (1953).

[6] L. CESARI, *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica*, Mem. Accad. Ital. **18**, 1323-1481 (1943).

[7] L. CESARI, *La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **13**, 77–117 (1944).

[8] L. CESARI, *Sulle superficie di Fréchet*, Rivista Mat. Univ. Parma **1**, 19-44 (1950).

[9] L. CESARI, *Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **29**, 199-224 (1950).

[10] L. CESARI, *Condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **14**, 47-70 (1945).

[11] L. CESARI, *An existence theorem of Calculus of Variations for integrals on parametric surfaces*, Amer. J. Math. **74**, 265-295 (1952).

[12] L. CESARI, *Su un particolare processo di retrazione per superficie*, Rivista Mat. Univ. Parma **3**, 25-42 (1952).

[13] J. DANSKIN, *On the existence of minimizing surfaces in parametric double integral problems of the Calculus of Variations*, Rivista Mat. Univ. Parma **3**, 43-63 (1952).

[14] B. V. KERÉKJARTO, *Vorlesungen über Topologie*, I, Berlin 1923.

[15] T. RADÓ, *Length and area*, Amer. Math. Soc. Col. Pub., vol. 30, 1948.

[16] G. T. WHYBURN, *Analytic topology*, Amer. Math. Soc. Col. Pub., vol. 27, 1942.