Rivista Mat. Univ. Parma 4, 31-42 (1953)

TRISTANO MANACORDA (*)

Sul legame sforzi-deformazione nelle trasformazioni finite di un mezzo continuo isotropo. (**)

1. – Introduzione.

Uno dei problemi fondamentali di ogni teoria delle deformazioni di un mezzo continuo è quello di stabilire una relazione che leghi tra loro sforzi e deformazione nel migliore accordo possibile coi risultati sperimentali. A ciò si può giungere solo adottando delle ipotesi che sembrino il più possibile plausibili. Per piccole deformazioni e per mezzi elastici la legge di HOOKE risponde perfettamente a questi requisiti, ma quando la deformazione diviene finita, o, pur rimanendo infinitesima, il mezzo cessa di comportarsi elasticamente, la legge di HOOKE cade in difetto e si impone la scelta di un altro tipo di legame sforzi-deformazione. Una particolare importanza hanno poi, tra tutti i mezzi continui, quelli isotropi, e nel corso della presente Nota ci si limita soltanto a considerare mezzi continui isotropi.

Vari tipi di legami sforzi-deformazione sono stati proposti, in diverse epoche, per i mezzi isotropi. Nel 1942, a seguito di un approfondito studio sulla geometria delle deformazioni finite, il prof. B. CALDONAZZO perveniva a formulare, in un suo corso non pubblicato di Fisica Matematica, una di tali leggi particolarmente semplice e giustificata da una ipotesi perfettamente plausibile nei mezzi isotropi. Quasi contemporaneamente il prof. A. SIGNORINI, nel corso della esposizione sistematica delle sue fondamentali ricerche sulle trasformazioni termoelastiche finite [1], dimostrava che per i mezzi isotropi sottoposti a tale tipo di deformazione, deve sussistere un particolare legame sforzi-deformazione dipendente da tre funzioni scalari legate all'energia libera del mezzo.

In questa Nota, modificando il punto di vista del prof. CALDONAZZO ed introducendo, sull'esempio del prof. SIGNORINI, l'omografia lagrangiana degli

(*) Indirizzo: Via Dupré 32, Firenze (Italia).
(**) Ricevuto il 31-III-1953.
(1) A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **22**, 33-143 (1943); (4) **30**, 1-72 (1949).

sforzi, si dimostra che, se si adotta una ipotesi che appare estremamente plausibile per i mezzi isotropi ed è giustificata, oltre che dal comportamento geometrico della deformazione, anche da una proprietà dell'omografia degli sforzi, sussiste tra sforzi e deformazione un legame che coincide per i mezzi a trasformazione reversibile con quello dimostrato valido dal prof. SIGNORINI, ma viene ora a valere per i mezzi isotropi sottoposti anche a trasformazioni non reversibili.

L'ipotesi cui si accenna è la seguente: *in ogni istante coincidano le sezioni circolari della quadrica indicatrice dell'omografia* $\xi = 1 + 2\varepsilon$ (con ε omografia di deformazione) *con quelle della quadrica indicatrice del deviatore lagrangiano degli sforzi.*

L'adozione della suddetta ipotesi, e quindi del conseguente legame sforzi-deformazione, è anche confortata dal fatto che, non solo la citata relazione viene a coincidere, come già si è detto, per i mezzi a trasformazioni termoelastiche finite con quella dimostrata valida dal prof. SIGNORINI, ma anche dal fatto che si possono dedurre immediatamente da essa, ed in modo estremamente semplice, la legge di LOCATELLI-UDESCHINI per le deformazioni elasto-plastiche, e quelle di PRANDTL e REUSS e di VON MISES per le deformazioni plastiche perfette.

In questa Nota, i numeri 2 e 3 sono dedicati al richiamo delle nozioni e notazioni fondamentali, e all'esposizione di quelle, tra le proprietà delle deformazioni finite studiate dal prof. CALDONAZZO, che interessano la presente ricerca. Nei numeri seguenti si esamina una proprietà dell'omografia degli sforzi che giustifica, insieme alle proprietà geometriche già enunciate, l'adozione della ipotesi che conduce alla legge sforzi deformazione la cui esposizione forma l'oggetto di questa ricerca. A titolo di esempio si mostra, poi, come si possano immediatamente dedurre dalla legge proposta i legami sforzi-deformazione per le deformazioni plastiche proposti da LOCATELLI-UDESCHINI, PRANDTL-REUSS e VON MISES.

2. – Richiamo di concetti e notazioni fondamentali.

Sia S un mezzo continuo sottoposto ad una deformazione regolare (2) nel tempo. Sia C la sua configurazione nell'istante t e C_* una sua configurazione in un istante $t_* < t$, che viene assunta come configurazione di riferimento. P_* e P siano poi due punti, di C_* e di C rispettivamente, che si corrispon-

(2) S'intende nel senso che si dà a questa parola nella teoria delle deformazioni finite. Cfr. A. SIGNORINI, loc. cit., pp. 36 e 68.

dono nella trasformazione che lega C a C_*. Associata a tale trasformazione rimane l'omografia

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}P_*}, \tag{1}$$

mediante la quale si può esprimere la deformazione subita da un intorno infinitesimo di P nella trasformazione $C_* \to C$. Come è ben noto, la α può scomporsi univocamente nel prodotto di una dilatazione α_δ e di una isomeria (un rotore) α_ϱ, di modo che è:

$$\alpha = \alpha_\varrho \alpha_\delta . \tag{2}$$

Nel seguito occorrerà anche spesso considerare l'omografia

$$\xi = K\alpha\alpha = \alpha_\delta^2 , \tag{3}$$

che risulta quindi una dilatazione, anche propria per le proprietà materiali del mezzo, e che ha le stesse direzioni unite di α_δ. Se si pone anche

$$\xi = 1 + 2\varepsilon , \tag{4}$$

ε è l'*omografia di deformazione*, mediante la quale si possono esprimere tutte le caratteristiche di deformazione, e il cui annullarsi caratterizza gli spostamenti rigidi nell'insieme di tutte le trasformazioni continue possibili per S. Indicheremo infine nel seguito con β l'omografia degli sforzi riferita alla configurazione attuale C.

3. – Scorrimenti specifici mutui.

Nei suoi studi sulle deformazioni finite di un mezzo continuo, il prof. CALDONAZZO ha introdotto, e sistematicamente studiato, la nozione di *scorrimento mutuo specifico* di due versori. In questo numero vengono riassunti i risultati delle sue ricerche che interessano la presente Nota.

Sia $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ una terna ortogonale sinistrorsa di versori di centro P_*, e si consideri, nel piano $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, accanto al versore $\boldsymbol{u}$, il vettore $\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\varphi_* \cdot \boldsymbol{v}$, in cui $\mathrm{d}\varphi_*$ è un angolo infinitesimo positivo che misura, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, il coseno dell'angolo formato da $\boldsymbol{u}$ e da $\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\varphi_* \cdot \boldsymbol{v}$. Dopo la trasformazione che porta P_* in P, il versore $\boldsymbol{u}$ si trasforma in $\alpha\boldsymbol{u}$, il vettore $\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\varphi_* \cdot \boldsymbol{v}$ in $\alpha(\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\varphi_* \cdot \boldsymbol{v})$ e i due vettori trasformati formano l'angolo positivo $\mathrm{d}\varphi$ con

$$(5)\qquad \cos(\mathrm{d}\varphi) = \frac{\boldsymbol{u}\times\xi\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\varphi_* \cdot \boldsymbol{v}\times\xi\boldsymbol{u}}{[\boldsymbol{u}\times\xi\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\varphi_*\cdot\boldsymbol{v})\times\xi(\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\varphi_*\cdot\boldsymbol{v})]^{1/2}}\,.$$

Sviluppando il primo membro in serie di $\mathrm{d}\varphi$ e il secondo in serie di $\mathrm{d}\varphi_*$, a meno di infinitesimi di ordine superiore si trova

$$(6)\qquad \frac{\mathrm{d}\varphi^2}{\mathrm{d}\varphi_*^2} = \frac{\boldsymbol{v}\times\xi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\times\xi\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\times\xi\boldsymbol{v})^2}{(\boldsymbol{u}\times\xi\boldsymbol{u})^2}\,.$$

Il numeratore del secondo membro coincide con $\mathbf{w}\times R\xi\mathbf{w}$ (3) e si ottiene dunque

$$(7)\qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi_*} = I_3\alpha_\delta\,\frac{\sqrt{\boldsymbol{w}\times\xi^{-1}\boldsymbol{w}}}{\boldsymbol{u}\times\xi\boldsymbol{u}}\,,$$

in cui si è tenuto conto, per la scelta dei segni, che $\mathrm{d}\varphi$ e $\mathrm{d}\varphi_*$, come $I_3\alpha_\delta$, $\boldsymbol{u}\times\xi\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}\times\xi^{-1}\boldsymbol{w}$ sono positivi.

L'angolo formato dai due vettori infinitamente vicini $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\varphi_*\cdot\boldsymbol{v}$ era, in C_*, $\mathrm{d}\varphi_*$, ed è divenuto, in C, $\mathrm{d}\varphi$. Appare giustificata quindi, la denominazione di scorrimento mutuo specifico di $\boldsymbol{u}$ secondo $\boldsymbol{v}$, dato al rapporto $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_* - \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi_*}$, che per la (7) si esprime con

$$(8)\qquad \frac{\mathrm{d}\varphi_* - \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi_*} = 1 - \sigma_{uv}\,,\qquad \text{con}\quad \sigma_{uv} = I_3\alpha_\delta\,\frac{\sqrt{\boldsymbol{w}\times\xi^{-1}\boldsymbol{w}}}{\boldsymbol{u}\times\xi\boldsymbol{u}}\,.$$

Lo studio del variare di σ_{uv} al variare della coppia di versori ortogonali $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ intorno a P_* conduce a risultati espressivi e interessanti per la meccanica delle deformazioni finite. Qui interessa solo mostrare che quando la coppia $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ è su uno dei piani delle sezioni cicliche dell'ellissoide di deformazione (caratteristico di ξ) di centro P_*, è $\sigma_{uv}=1$ e viceversa.

Supponiamo dapprima l'ellissoide $\mathcal{E}_\xi$ caratteristico di ξ non di rivoluzione, e, se $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ sono i suoi assi principali e A_1, A_2, A_3 le corrispondenti componenti principali di ξ, ordiniamo gli assi in modo che sia $A_1 > A_2 > A_3$. Con ciò, se $\boldsymbol{w}$ è normale ad una delle sezioni circolari di $\mathcal{E}_\xi$, dalla (8) risulta immediatamente $\boldsymbol{u}\times\xi\boldsymbol{u}$, e perciò σ_{uv}, costante al variare di $\boldsymbol{u}$ normalmente

(3) Si ricordi che $R\xi$ è l'omografia definita da $R\xi(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) = \xi\boldsymbol{u}\wedge\xi\boldsymbol{v}$. Si ha $R\xi = I_3\xi K\xi^{-1}$.

a $\boldsymbol{w}$, e viceversa. Tenendo conto che i coseni direttori di $\boldsymbol{w}$ sono $\alpha_1^2 = \dfrac{A_1 - A_2}{A_1 - A_3}$, $\alpha_2^2 = 0$, $\alpha_3^2 = \dfrac{A_2 - A_3}{A_1 - A_3}$, si trova immediatamente che è $\sigma_{uv} = 1$. Dal significato fisico di σ_{uv} risulta dunque che le fibre giacenti inizialmente nei piani delle sezioni circolari di $\mathcal{E}_\xi$, per effetto della trasformazione nè si divaricano nè si addensano. È opportuno anche osservare che su tali sezioni circolari sono costanti, al variare di $\boldsymbol{u}$, anche gli allungamenti unitari dati da $(1 + \delta_u)^2 = \boldsymbol{u} \times \xi \boldsymbol{u}$. È ovvio come queste conclusioni siano ancora valide quando $\mathcal{E}_\xi$ è rotondo.

4. – Comportamento degli sforzi di taglio sulle sezioni circolari reali della quadrica (o delle quadriche) indicatrici di β.

Con riferimento alla configurazione attuale C di S, sia β l'omografia degli sforzi. Siano poi $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ le sue direzioni principali relative ad un punto P di C ordinate col seguente criterio. Se indichiamo con Φ_i, $(i = 1, 2, 3)$, le tre componenti principali di β, escludendo per ora che due di esse coincidano, ordiniamo gli assi in modo che sia $\Phi_1 > \Phi_2 > \Phi_3$ $[\Phi_1 < \Phi_2 < \Phi_3]$ se tutte le Φ_i sono positive [negative], ed invece, quando due delle Φ_i siano di un segno, e la terza di segno contrario, prendiamo come Φ_1 quella delle Φ_i maggiore in valore assoluto, e per Φ_2 la maggiore delle due rimanenti se $\Phi_1 > 0$, la minore se $\Phi_1 < 0$.

Si consideri ora una delle sezioni circolari reali della quadrica (o delle quadriche) indicatrice $\mathcal{E}_\beta$ di β in P, e sia $\boldsymbol{i}_3$ il versore normale a tale sezione scelto in modo da formare con $\boldsymbol{v}_3$ un angolo acuto. Sceglieremo come terna di riferimento trirettangola sinistrorsa la terna $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$, con $\boldsymbol{i}_2$ coincidente con $\boldsymbol{v}_2$. Se $\boldsymbol{u}$ è un qualsiasi versore normale ad $\boldsymbol{i}_3$,

$$\boldsymbol{u} = \gamma_1 \boldsymbol{i}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{i}_2 ,$$

lo sforzo di taglio ad esso relativo è dato da

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{u} \wedge [\beta \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}] = \beta \boldsymbol{u} - \Phi_{uu} \boldsymbol{u} . \tag{9}$$

Se indichiamo con Φ_{ik} le componenti di β rispetto alla terna $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$, si ottiene

$$\boldsymbol{\tau} = \gamma_1 \gamma_2^2 [\Phi_{11} - \Phi_{22}] \boldsymbol{i}_1 - \gamma_1 \gamma_2^2 [\Phi_{11} - \Phi_{22}] \boldsymbol{i}_2 + \gamma_1 \Phi_{13} \boldsymbol{i}_3 .$$

Ma con la scelta fatta degli assi è $\Phi_{11} = \Phi_{22} = \Phi_2$ e perciò si ottiene

$$\boldsymbol{\tau} = \gamma_1 \Phi_{13} \boldsymbol{i}_3 \, . \tag{10}$$

Ne segue che per tutte le fibre sulle sezioni circolari reali di $\mathcal{E}_\beta$, oltre ad essere costanti gli sforzi normali, gli sforzi di taglio sono ortogonali alle sezioni stesse. Tale proprietà si può facilmente invertire. Difatti, supponiamo che, con riferimento alla terna $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$, per qualunque $\boldsymbol{u}$ normale ad $\boldsymbol{i}_3$ sia $\boldsymbol{\tau}$ parallelo ad $\boldsymbol{i}_3$. I tre vettori $\beta\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}$ ed $\boldsymbol{i}_3$ dovranno perciò risultare complanari, e quindi, con le notazioni già adoperate,

$$\gamma_1\gamma_2[\Phi_{11} - \Phi_{22}] + [\gamma_2^2 - \gamma_1^2]\Phi_{12} = 0 \, . \tag{11}$$

Ma dovendo questa valere identicamente rispetto a γ_1 e γ_2, deve essere $\Phi_{11} = \Phi_{22}$, $\Phi_{12} = 0$ e quindi $\boldsymbol{i}_3$ risultare normale ad una delle sezioni cicliche di $\mathcal{E}_\beta$. Ne risulta quindi che tali sezioni cicliche sono caratterizzate dalla proprietà su citata degli sforzi di taglio.

5. – Il legame sforzi-deformazione per i sistemi isotropi.

Sia, al solito, β l'omografia degli sforzi relativa a C. Nei suoi profondi studi sulla meccanica delle trasformazioni termoelastiche finite, il prof. SIGNORINI (4) ha introdotto la nozione di *omografia lagrangiana degli sforzi* ponendo

$$\beta_* = I_3 \alpha \cdot \alpha^{-1} \beta K \alpha^{-1} \, . \tag{12}$$

Con l'intervento di tale omografia si possono, tra l'altro, scrivere le equazioni di moto o della statica del sistema riferendole allo stato C_*, ed anche esprimere il lavoro virtuale delle forze intime in modo assai semplice.

Per i sistemi isotropi si è soliti adottare l'ipotesi che la terna principale di β coincida con la trasformata della terna principale di ξ, il che equivale esattamente a supporre che coincidano le terne principali di β_* e di ξ (5). Tale coincidenza importa un semplice legame qualitativo tra l'omografia degli sforzi β e quella di deformazione ξ, non un legame quantitativo. Occorre aggiungere, a quella della coincidenza delle terne principali di β e di ξ, qualche ulteriore ipotesi.

Per i sistemi a trasformazioni reversibili, il prof. SIGNORINI nella Memoria citata è pervenuto ad una ben precisa relazione tra β e ξ, dimostrando che

---

(4) A. SIGNORINI, loc. cit., p. 105.
(5) A. SIGNORINI, loc. cit., p. 108.

deve aversi

$$-\frac{I_3\alpha}{k_*}\beta = l^{(\varepsilon)} + 2m^{(\varepsilon)}\varepsilon_\varrho + n^{(\varepsilon)}\varepsilon_\varrho^2 , \tag{13}$$

dove: k_* è la densità materiale del mezzo allo stato C_*, ed è quindi $k_* = I_3\alpha k$, con k densità attuale; ε_ϱ è definita da

$$\varepsilon_\varrho = \alpha_\varrho \varepsilon \alpha_\varrho^{-1} , \tag{14}$$

con ε omografia di deformazione, $\xi = 1 + 2\varepsilon$; ed $l^{(\varepsilon)}$, $m^{(\varepsilon)}$, $n^{(\varepsilon)}$ sono tre funzioni scalari degli invarianti di ε che si esprimono mediante le derivate, rispetto a tali invarianti, del potenziale termodinamico del sistema. Per i sistemi a trasformazioni più generali, anche non reversibili, si può cercare di introdurre una qualche ipotesi supplementare (oltre alla coincidenza delle terne principali di β e ξ) per ottenere una relazione quantitativa tra β ed ε.

Per quanto si è visto nei numeri precedenti, è chiaro che le sezioni cicliche delle quadriche indicatrici di β e di ξ devono avere una notevole importanza nello studio della meccanica dei mezzi continui. Si è visto infatti che sulle sezioni cicliche di $\mathcal{E}_\xi$ gli scorrimenti mutui di due fibre infinitamente vicine sono nulli, e quindi le fibre di tali sezioni nè si addensano nè si divaricano nella trasformazione, e tale proprietà è caratteristica delle sezioni circolari di $\mathcal{E}_\xi$. Si è visto ancora che tutte le fibre appartenenti alle sezioni circolari reali di $\mathcal{E}_\beta$ sono sollecitate da sforzi di taglio normali alle sezioni stesse, e che questa proprietà è caratteristica delle sezioni stesse. Sulle sezioni circolari di $\mathcal{E}_\xi$, inoltre, sono costanti gli allungamenti unitari, mentre costanti si mantengono gli sforzi normali sulle sezioni circolari di $\mathcal{E}_\beta$.

Il prof. CALDONAZZO, nel Corso già citato, osservando questa ultima proprietà delle sezioni circolari di $\mathcal{E}_\xi$ e di $\mathcal{E}_\beta$, e quella degli scorrimenti specifici mutui sulle sezioni circolari di $\mathcal{E}_\xi$, aveva introdotto l'ipotesi che le sezioni circolari di $\mathcal{E}_\beta$ fossero disposte, rispetto alla terna unita di β, allo stesso modo che le sezioni circolari di $\mathcal{E}_\xi$ rispetto alla terna unita di ξ. Otteneva così una relazione tra β e ξ in cui però non rientra, come dovrebbe, la (13). Modificheremo qui un poco la sua ipotesi.

Osserviamo che tutte le proprietà enunciate per le sezioni cicliche di β, che sono proprietà unicamente qualitative, rimangono inalterate se a β si aggiunge un qualsiasi scalare. Se allora si scompone β facendo figurare la sua parte isotropa, ponendo

$$\beta = \varphi + p , \qquad p = \frac{1}{3} I_1 \beta , \tag{15}$$

in cui φ è l'omografia *deviatore* degli sforzi, è presumibile che si debbano porre in relazione le sezioni circolari di ξ con quelle di $\mathcal{E}_\varphi$ piuttosto che con quelle di $\mathcal{E}_\beta$. All'omografia β corrisponde in C_* l'omografia β_*, che ha per direzioni unite le trasformate (nella trasformazione $C \to C_*$) delle direzioni unite di β, ed a φ corrisponde l'omografia

$$\varphi_* = I_3\alpha \cdot \alpha^{-1}\varphi K\alpha^{-1} \tag{16}$$

legata a β_* da

$$\beta_* = \varphi_* + I_3\alpha p\xi^{-1}. \tag{17}$$

Se le direzioni unite di β_* coincidono con quelle di ξ (e perciò anche con quelle di ξ^{-1}), anche le direzioni unite di φ_* coincidono con quelle di ξ. *Faremo l'ipotesi che, nei mezzi isotropi, le quadriche indicatrici di φ_* e di ξ, oltre ad avere la stessa terna unita, abbiano coincidenti le sezioni cicliche reali.*

Indicando con φ_{i*} le componenti principali di φ_* ed adottando per il loro ordinamento il criterio già scelto per β, l'ipotesi ora ammessa porta a scrivere

$$\frac{\varphi_{1*} - \varphi_{2*}}{\varphi_{1*} - \varphi_{3*}} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 - A_3}, \qquad \frac{\varphi_{2*} - \varphi_{3*}}{\varphi_{1*} - \varphi_{3*}} = \frac{A_2 - A_3}{A_1 - A_3}, \tag{18}$$

da cui

$$\varphi_{i*} = LA_i + M,$$

nella quale L ed M, a causa dell'isotropia, dipendono dalla trasformazione solo per il tramite degli invarianti di deformazione. Si ottiene così

$$\varphi_* = L\xi + M, \tag{19}$$

ovvero

$$\beta_* = \varphi_* + I_3\alpha p\xi^{-1} = L\xi + I_3\alpha p\xi^{-1} + M. \tag{20}$$

Da quest'ultima si ottiene infine

$$\beta = l + 2m\varepsilon_\varrho + n\varepsilon_\varrho^2, \tag{21}$$

con

$$l = \frac{L+M}{I_3\alpha} + p, \qquad M = \frac{2L+M}{I_3\alpha}, \qquad n = \frac{4L}{I_3\alpha}.$$

Osserviamo ora che la scomposizione di β nella somma della sua parte isotropa e nel deviatore degli sforzi obbedisce evidentemente a questioni di pura convenienza. Anche se si considera nella (15) p come funzione scalare arbitraria, la relazione tra le sezioni circolari di β e di ξ non ne rimane alterata. Potremo dunque nella (21) considerare l, m ed n funzioni a priori completamente arbitrarie degli invarianti di deformazione. Altre volte converrà invece considerare p proprio uguale ad $\frac{1}{3} I_1\beta$. È ciò che faremo nel n. seguente.

6. – Applicazione alla deduzione di legami sforzi-deformazione già noti.

È chiaro che, ammessa la validità, per i mezzi isotropi, della (21), devono potersi ottenere da essa, specificando i coefficienti l, m ed n, i legami sforzi-deformazione già noti e collaudati da esperienze. Si è già osservato che, nel caso di trasformazioni termoelastiche finite, la (21) non differisce dalla (13) dimostrata dal prof. SIGNORINI. Faremo qui vedere, a titolo di esempio, che dalla (21) possono anche dedursi in modo assai semplice i legami proposti per le deformazioni plastiche da LOCATELLI e UDESCHINI (6), da PRANDTL e REUSS e da VON MISES (7), tutti nell'ipotesi di deformazioni infinitesime.

a) *Legge di Locatelli–Udeschini per le deformazioni elasto-plastiche.*

Si cominci con l'osservare che, per deformazioni infinitesime, ε_ϱ non differisce da ε. Conviene poi introdurre, accanto all'omografia φ deviatore degli sforzi, l'omografia

$$\eta = \varepsilon - q\,, \qquad q = \frac{1}{3} I_1\varepsilon\,, \tag{22}$$

per le quali è

$$I_1\varphi = I_1\eta = 0, \; I_2\eta = I_2\varepsilon - \frac{1}{3}(I_1\varepsilon)^2, \qquad I_3\eta = I_3\varepsilon - \frac{1}{3} I_1\varepsilon I_2\eta - \frac{1}{27}(I_1\varepsilon)^3\,.$$

Dopo ciò, il legame sforzi-deformazione proposto da LOCATELLI e poi modi-

---

(6) P. LOCATELLI, *Estensione, flessione, pressione nei corpi elasto plastici*, Rend. Ist. Lombardo Sc. Lett. **73**, 581-589 (1939-40).

P. UDESCHINI, *Deformazioni elastiche nei corpi elasto plastici: casi di Clebsch*, Rend. Ist. Lombardo Sc. Lett. **74**, 373-388 (1940-41). Cfr. anche l'eccellente esposizione riassuntiva delle principali teorie sulla deformazione plastica, della prof.ssa M. PASTORI: *Plasticità*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **18**, 93-113 (1947).

(7) Per la teoria delle deformazioni plastiche perfette cfr. l'ottimo volume di W. PRAGER e P. G. HODGE Jr.: *Theory of perfectly plastic solids*, J. Wiley, New York 1951.

ficato da UDESCHINI si scrive

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{4h^2} I_2\eta}} [A\theta + 2B\varepsilon] , \tag{23}$$

in cui h^2 è una costante, così come A e B, e θ indica la dilatazione cubica. Poichè $I_2\eta$ si esprime mediante $I_1\varepsilon$ e $I_2\varepsilon$, è chiaro che la (23) si ottiene dalla (21) semplicemente ponendo

$$n\varepsilon^2 \backsim 0 , \qquad l = A\theta \Big/ \sqrt{1 + \frac{3}{4h^2} I_2\eta} , \qquad m = B \Big/ \sqrt{1 + \frac{3}{4h^2} I_2\eta} .$$

b) *Legge di Prandtl-Reuss per le deformazioni plastiche perfette.*

Il legame proposto da PRANDTL e REUSS per le deformazioni plastiche perfette si scrive

$$2G\dot{\eta} = -\dot{\varphi} - \frac{G}{k^2} W\varphi \text{ [8]}, \tag{24}$$

in cui G e k sono costanti positive, e W è una funzione positiva la cui espressione si trova immediatamente dalla (24) stessa. Ricordando infatti che è $I_1\varphi = 0$, e che durante il regime plastico è $I_2\varphi = k^2$, moltiplicando la (24) per φ e prendendo l'invariante primo si ottiene immediatamente $W = I_1(\varphi\dot{\eta})$.

Per riottenere la (24) dalla (21), si osservi che direttamente dalla (19) si ottiene

$$I_3\alpha \cdot \varphi = \alpha\varphi_* K\alpha = L(\alpha K\alpha)^2 + M\alpha K\alpha ,$$

cioè

$$I_3\alpha \cdot \varphi = L(1 + 2\varepsilon_\varrho)^2 + M(1 + 2\varepsilon_\varrho) .$$

Gli scalari L ed M hanno le dimensioni di uno sforzo, e li scriveremo perciò nella forma $L\varphi_0$, $M\varphi_0$, in cui φ_0 è una funzione che ha le dimensioni di uno sforzo. Se si pone allora $I_3\alpha/\varphi_0 = \Phi_0$ e si ricorda che per deformazioni infinitesime è $\varepsilon_\varrho = \varepsilon$, e si tiene presente la (22), si ottiene

$$\Phi_0\varphi = \lambda + 2\mu\eta + \nu\eta^2 , \tag{25}$$

con

$$\lambda = L(1 + 2q)^2 + M(1 + 2q) , \qquad \mu = 2L(1 + 2q) + M , \qquad \nu = 4L . \tag{26}$$

---

[8] Cfr. PRAGER e HODGE, loc. cit., p. 28.

Da queste si ricava immediatamente $L = \frac{1}{4}\nu$, $M = \frac{\lambda}{1+2q} - \frac{1+2q}{4}\nu$ e perciò $\mu = \frac{\lambda}{1+2q} + \frac{1+2q}{4}\nu$. Ma anche le funzioni λ e ν sono legate tra loro. È infatti $I_1\varphi = 0$ e perciò, dalla (25),

$$\lambda = \frac{2}{3} I_2\eta\,\nu, \tag{27}$$

e quindi

$$\mu = \left\{ \frac{1+2q}{4} + \frac{2}{3}\frac{I_2\eta}{1+2q} \right\} \nu \,. \tag{28}$$

Si osservi ora che se si suppone η infinitesima del primo ordine, dalla (25) essendo φ finita ed altrettanto potendo supporsi di Φ_0, uno almeno dei termini a secondo membro deve essere finito. Si supponga ora che ν sia grande del primo ordine, in modo che $\nu\eta$ sia finito. Dalla (28) risulta anche che μ è dello stesso ordine di ν, mentre λ è infinitesimo del primo ordine almeno.

D'altra parte si deve intendere che la (25) valga identicamente rispetto al tempo, e perciò in essa tutte le grandezze che vi figurano vanno considerate funzioni, che qui saranno supposte derivabili, del tempo. Facendo ora l'ipotesi che $\dot{\nu}$ sia al più finita, dalla (28) risulta che anche $\dot{\mu}$ è al più finita, mentre per la (27) $\dot{\lambda}$ risulta infinitesima almeno del primo ordine. Derivando allora la (25) rispetto al tempo si ha

$$\dot{\Phi}_0\varphi + \Phi_0\dot{\varphi} = \dot{\lambda} + 2\dot{\mu}\eta + \dot{\nu}\eta^2 + 2\mu\dot{\eta} + \nu(\dot{\eta}^2)\,.$$

Ma il primo termine al secondo membro è infinitesimo almeno del primo ordine, così come $2\dot{\mu}\eta$, $\dot{\nu}\eta^2$, $\nu(\dot{\eta}^2)$, mentre $2\mu\dot{\eta}$ è finito, e perciò, a meno di infinitesimi, si ha

$$\dot{\Phi}_0\varphi + \Phi_0\dot{\varphi} = 2\mu\dot{\eta}\,. \tag{29}$$

Φ_0 è rimasta sin qui arbitraria, purchè finita. Basta ora porre

$$\Phi_0 = -\mu/G\,, \qquad \dot{\Phi}_0/\Phi_0 = (G/k^2)W\,,$$

per ottenere dalla (29) la (24).

c) *Legge di Von Mises.*

La legge di VON MISES si scrive

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{\sqrt{I_2\dot{\varepsilon}}}{k}\varphi \quad (9), \tag{30}$$

in cui k è la costante di plasticità che già figura nella (24). Si può ricavare la (30) ancora dalla (19). Da essa infatti si ha, coi simboli già adoperati,

$$\Phi_0\varphi = a + 2b\varepsilon + c\varepsilon^2 , \tag{31}$$

con $a = L + M$, $b = 2L + M$, $c = 4L$, e perciò $L = (1/4)c$, $M = a - (1/4)c$, $b = a + (1/4)c$. Prendendo al solito l'invariante primo dei due membri della (31) si trova che

$$a = -\left[\left(I_1\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\,I_1\varepsilon\right) \Big/ (3 + 2I_1\varepsilon)\right] c\,.$$

Ma la legge di VON MISES vale per i materiali per cui è $I_1\varepsilon = 0$, e si ottiene quindi che se c, come poco fa ν, è grande in modo che $c\varepsilon$ sia finito, a è infinitesimo, mentre b è dello stesso ordine di c. Se poi $\dot{c}$ è finito, lo stesso accade di $\dot{b}$, mentre $\dot{a}$ è infinitesimo. Derivando allora la (31) si ottiene, a meno di nfinitesimi,

$$\dot{\Phi}_0\varphi + \Phi_0\dot{\varphi} = 2b\dot{\varepsilon}\,.$$

Se si suppone che $\Phi_0\dot{\varphi}$ sia trascurabile in confronto agli altri termini si ottiene la legge di VON MISES nella forma

$$\dot{\varepsilon} = -\sigma\varphi\,, \qquad \sigma = -\dot{\Phi}_0/(2b)\,. \tag{32}$$

Ma prendendo l'invariante secondo dei due membri si ottiene

$$I_2\dot{\varepsilon} = \sigma^2 I_2\varphi\,,$$

e ricordando che per la condizione di plasticità è $I_2\varphi = k^2$, con k costante, si ottiene $\sigma = \sqrt{I_2\dot{\varepsilon}}/k$ e quindi la (32) assume la forma (31).

---

(9) Cfr. PRAGER e HODGE, loc. cit., pp. 31 e 235.