Rivista Mat. Univ. Parma 4, 11 - 29 (1953)

GUIDO ASCOLI (*)

Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y'' = (1 + f(t))y$ in un caso notevole. (**)

Con la presente Memoria intendo portare un contributo allo studio del comportamento asintotico degli integrali dell'equazione differenziale

$$y'' = (1 + f(t))y \,, \tag{A}$$

per $t \to +\infty$, nell'ipotesi che, essendo la f definita per $t > 0$, $|f|^p$ riesca, per un conveniente $p \geqslant 1$, integrabile tra 0 e $+\infty$.

Il caso $p = 1$ può dirsi esaurito da antiche ricerche di M. BÔCHER [2] (1), e si trova poi contenuto in risultati generali di altri Autori (CESARI, FAEDO, LEVINSON,...); esiste in tale ipotesi un integrale y della (A) tale che per $t \to \infty$ è

$$\log y = t + C + o(1) \,.$$

Più recente è la trattazione del caso $1 \leqslant p \leqslant 2$, per il quale P. HARTMAN [3], perfezionando risultati di A. WINTNER [4], in un esteso ed importante lavoro, ha dimostrato la formula

$$\log y = t + \frac{1}{2}\int_0^t f\,d\tau + C + o(1) \,.$$

Ancora più di recente R. BELLMAN [1] ha studiato il caso $p = 3$, con $f \to 0$ per $t \to \infty$, e, combinando abilmente diseguaglianze classiche, ha trovato una

(*) Professore o. della Università di Torino. Indirizzo: Via Giacomo Medici 44, Torino (Italia).

(**) Ricevuto il 19-IV-1953.

(1) Il BÔCHER studia il comportamento degli integrali di un'equazione differenziale di 2° ordine nell'intorno di un punto singolare $x = 0$; ci si riduce a questo caso ponendo, nella (A), $t = -\log x$. Le ricerche del BÔCHER sono state riprese da S. FAEDO in: *Il teorema di Fuchs per le equazioni differenziali ecc.*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **25**, 111-133 (1946).

formula più complessa, in cui però, per una svista di calcolo, un coefficiente risulta errato. Vi è inoltre nel suo lavoro una deduzione erronea ([2]); con altri metodi si può tuttavia ottenere un risultato meno preciso, ma che conduce egualmente allo scopo. L'Autore afferma, con buon fondamento, che il suo metodo può servire anche per valori più elevati di p; ma fa presente che le complicazioni che si incontrano rendono l'estensione pressochè inattuabile.

Nel presente scritto mi valgo ancora del metodo di BELLMAN (e di HARTMAN), cioè della riduzione della (1) ad una equazione di RICCATI; riesco però a facilitare grandemente le deduzioni mediante l'uso sistematico di un certo operatore funzionale lineare: le integrazioni per parti, le inversioni di segni di integrazione, le maggiorazioni legate alla diseguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER vengono così ridotte a proprietà elementari di tale operatore, e applicate in modo quasi meccanico.

Questo ed altri espedienti mi hanno permesso:

a) di rinunciare — cosa non immediata — alla condizione $f \to 0$ e alla continuità di f, e di ammettere per p valori reali qualunque $\geqslant 1$;

b) di analizzare assai profondamente la struttura delle formule asintotiche corrispondenti ai vari valori di p, ottenendo un metodo ricorrente, non troppo laborioso, per dedurne una forma canonica abbastanza semplice. Si ricavano così, con uno sforzo minimo, le formule già note ed anche nuove formule per $3 < p \leqslant 4$ e $4 < p \leqslant 5$. Una determinazione diretta, per ogni p, di dette forme canoniche sembra cosa molto difficile.

Ritengo che i procedimenti qui usati possano essere utili per trattare problemi più generali, come quelli indicati dal BELLMAN alla fine della sua Memoria.

1. – Essendo $f(t)$ definita per $t \geqslant 0$ e sommabile in ogni intervallo finito $0 \vdash\!\dashv T$, si indicherà con $V_\alpha f$ (con $\alpha > 0$) l'integrale, nullo per $t = 0$, dell'equazione differenziale

$$y' + \alpha y = f\,; \tag{1}$$

([2]) Si tratta della formula (4) di pag. 85, ove il segno di valore assoluto nel primo membro non è giustificato. Tale menda, avvertita dal collega F. G. TRICOMI e da lui segnalata all'Autore, ha dato luogo ad una rettifica (lettera in data 6 ottobre 1952, gentilmente comunicatami dal prof. TRICOMI) del sig. BELLMAN: in essa, si supera la difficoltà risolvendo la (3) della stessa pag. 85 mediante approssimazioni successive, e pervenendo così ad una maggiorazione che, con i simboli da me usati, si scrive $|w| < 2V_1|f|$. Cfr. il n. 3, b) in cui, assai più rapidamente, si prova che è anzi $|w| < V_1 f$.

si porrà cioè:

(2) $$V_\alpha f(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau\,.$$

La $V_\alpha f$ è dunque una funzione assolutamente continua, nulla per $t=0$, che soddisfa quasi ovunque alla (1) ([3]).

L'operatore (di VOLTERRA, di 1ª specie) V_α è lineare; e si ha inoltre:

a) *Se* $f \leqslant g$ *è* $V_\alpha f \leqslant V_\alpha g$; *in particolare*:

$$|V_\alpha f| \leqslant V_\alpha |f|\,, \qquad V_\alpha f \geqslant 0 \quad \text{se} \quad f \geqslant 0\,.$$

b) *Si ha*:

$$V_\alpha f + \alpha \int_0^t V_\alpha f(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)\,d\tau\,.$$

Risulta da (1) integrando tra 0 e t e scrivendo $V_\alpha f$ al posto di y.

c) Ne segue: *per* $f \geqslant 0$ *è*

$$V_\alpha f \leqslant \int_0^t f(\tau)\,d\tau\,, \qquad \int_0^t V_\alpha f(\tau)\,d\tau \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_0^t f(\tau)\,d\tau\,.$$

d) Diremo che f è *di classe* p $(p > 0)$ se $|f|^p$ è sommabile in ogni intervallo finito $0 \mapsto T$. Si ha allora: *Se* f *è di classe* p, g *di classe* q, *con* $1/p + 1/q = 1$ (classi « complementari ») *è*:

$$|V_\alpha (fg)| \leqslant \{V_\alpha |f|^p\}^{1/p} \cdot \{V_\alpha |g|^q\}^{1/q}\,.$$

Basterà limitarci al caso $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$. Si ha allora:

$$V_\alpha (fg) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau) g(\tau)\,d\tau = \int_0^t \{e^{-(\alpha/p)(t-\tau)} f(\tau)\}\{e^{-(\alpha/q)(t-\tau)} g(\tau)\}\,d\tau\,,$$

([3]) Nelle deduzioni seguenti ci appoggiamo, secondo i casi, sia all'una che all'altra definizione di V_α; non vi è però difficoltà ad ottenere gli stessi risultati con l'uso esclusivo della (2).

da cui, applicando la diseguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER, segue senz'altro la tesi.

Il risultato si estende senza difficoltà al caso di tre o più fattori.

e) Ponendo in particolare $g = 1$ e notando che

$$V_\alpha 1 = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} < \frac{1}{\alpha},$$

segue: *Se f è di classe p, con $p > 1$, è*

$$|V_\alpha f|^p \leqslant \frac{1}{\alpha^{p-1}} V_\alpha |f|^p .$$

Il risultato vale anche per $p = 1$, come è evidente.

f) *Per $\alpha \neq \beta$ si ha*

$$V_\alpha V_\beta f = -\frac{V_\alpha f - V_\beta f}{\alpha - \beta} .$$

Gli operatori V_α, V_β sono quindi permutabili.

Direttamente la cosa risulta senza difficoltà dallo scambio di due integrazioni. In altro modo, si ponga $y = V_\alpha f$, $z = V_\beta f$, $y - z = u$; sarà allora, quasi ovunque,

$$y' + \alpha y = f, \qquad z' + \beta z = f,$$

$$u' + \alpha u = y' + ay - z' - \alpha z = f - f + \beta z - \alpha z = (\beta - \alpha) z = (\beta - \alpha) V_\beta f,$$

e di qui, essendo u assolutamente continua e $u(0) = 0$,

$$u = (\beta - \alpha) V_\alpha V_\beta f, \qquad V_\alpha f - V_\beta f = (\beta - \alpha) V_\alpha V_\beta f .$$

Segue senz'altro la tesi.

2. – Interessandoci ora il comportamento asintotico di $V_\alpha f$ per $t \to \infty$, diremo che una funzione f è di classe $p > 0$ in $0 \vdash \infty$ se $|f|^p$ è sommabile tra 0 e ∞. Si ha allora:

a) *Se f è di classe $p \geqslant 1$ in $0 \vdash \infty$, è*

$$\lim_{t \to \infty} V_\alpha f(t) = 0 .$$

Come risulta da 1, e), basta provare il teorema per $p = 1$ ed $f \geqslant 0$.

Ora dalla seconda maggiorazione di 1, c) risulta intanto che $V_\alpha f$ è di classe 1; da 1, b) segue allora che $V_\alpha f$ ha per $t \to \infty$ limite finito. E questo, essendo $V_\alpha f$ sommabile tra 0 e $+\infty$, è necessariamente nullo.

b) *Se f è di classe $p \geqslant 1$ in $0 \vdash \infty$, anche $V_\alpha f$ è di classe p in $0 \vdash \infty$.* Infatti dal n. 1, e) e dal n. 1, c) segue:

$$\int_0^t |V_\alpha f|^p \, d\tau \leqslant \frac{1}{\alpha^{p-1}} \int_0^t V_\alpha |f|^p \, d\tau \leqslant \frac{1}{\alpha^p} \int_0^t |f|^p \, d\tau \, .$$

c) *La tesi di* a) *vale anche nell'ipotesi*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 0 \, .$$

Sia infatti $k > 0$ abbastanza grande perchè per $t > k$ sia $|f(t)| < \alpha\varepsilon/2$; per ogni $t > k$ si avrà allora:

$$\left| \int_k^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau) \, d\tau \right| < \frac{\alpha\varepsilon}{2} \int_k^t e^{-\alpha(t-\tau)} \, d\tau < \frac{\varepsilon}{2} \, ,$$

mentre d'altra parte per un tale k e per t abbastanza grande sarà

$$\left| \int_0^k e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau) \, d\tau \right| = e^{-\alpha t} \left| \int_0^k e^{\alpha\tau} f(\tau) \, d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Sommando sia ha $|V_\alpha f(t)| < \varepsilon$, donde la tesi.

3. – a) Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$y'' = A(t) y \, , \tag{3}$$

dove $A(t) = 1 + f(t)$ sia definita e sommabile in ogni intervallo finito $0 \vdash T$.

È noto [4], e di facile dimostrazione, che se $A(t)$ soddisfa alle condizioni

$$A(t) > 0 \, , \qquad \int_0^\infty A(t) \, dt = +\infty \, ; \tag{4}$$

[4] G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale* (Bologna, 1941), II, p. 43. Cfr. anche una mia Nota in corso di pubblicazione nel Bollettino dell'Un. Mat. Italiana.

esiste un integrale della (3) che per $t \to \infty$ diverge a $+\infty$ insieme con la sua derivata; esso si ottiene, per esempio, ponendo le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 1$; y e y' sono allora positivi per ogni $t > 0$.

Se si pone poi

$$\frac{y'}{y} = 1 + w ,$$

si ricava facilmente per w l'equazione di RICCATI

$$w' + 2w + w^2 = f , \tag{5}$$

e al detto integrale y corrisponde allora un integrale della (5) definito per ogni $t > 0$, nullo per $t = 0$. Per $t > 0$ è anzi $w > -1$.

b) È particolarmente interessante ottenere casi in cui sia

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y'}{y} = 1 , \tag{6}$$

ossia $w \to 0$ per $t \to \infty$. È classico (PERRON) il caso $f \to 0$, nel quale sono anzi verificate, almeno per t abbastanza grande, le condizioni (4) ([5]); qui vogliamo invece occuparci del caso in cui f *sia di classe* $p \geqslant 1$ *tra* 0 *e* ∞.

Dimostriamo che in questa ipotesi è soddisfatta la seconda delle (4). La cosa è immediata per $p = 1$; per $p > 1$, supposto $1/p + 1/q = 1$, si ha invece

$$\int_0^t A(\tau)\,d\tau = t + \int_0^t f(\tau)\,d\tau ,$$

$$\Big| \int_0^t f(\tau)\,d\tau \Big| = \Big| \int_0^t 1 \cdot f(\tau)\,d\tau \Big| \leqslant \Big\{ \int_0^t |f(\tau)|^p\,d\tau \Big\}^{1/p} \Big\{ \int_0^t d\tau \Big\}^{1/q} = O(t^{1/q}) = o(t) ,$$

e di qui segue subito l'asserto.

Se ora ammettiamo, provvisoriamente, valida anche la prima delle (4) — con le conseguenze segnalate in a) — possiamo dimostrare agevolmente la (6) nel modo seguente. Il considerato integrale w soddisfa alla equazione lineare

$$W' + (2 + w)W = f ,$$

([5]) Per una semplicissima dimostrazione diretta, v. la mia Nota citata in ([4]), n. 2, a).

e si annulla per $t = 0$; esso è dato perciò da

$$w = \int_0^t e^{-\int_\tau^t (2+w(t_1))\,dt_1} f(\tau)\,d\tau,$$

equazione integrale a cui dunque soddisfa w. Ora essendo $w > -1$ si ricava di qui:

$$|w| \leqslant \int_0^t e^{-(t-\tau)} |f(\tau)|\,d\tau = V_1|f|,$$

e si è visto (n. 2, a)) che se f è di classe $p \geqslant 1$ questo tende a zero. Ne segue $w \to 0$, e quindi la (6).

c) La cosa è assai più riposta, come mostrano le ricerche di HARTMAN, se si fa l'unica ipotesi che f sia di classe p, in quanto non si è allora nemmeno sicuri a priori dell'esistenza di una soluzione della (5) determinata per ogni $t \geqslant 0$ (cioè di una y definitivamente diversa da zero).

Cominciamo ad osservare che la funzione $V_2|f|$, per il già citato n. 2, a), tende a zero per $t \to \infty$, onde potrà trovarsi un t_0 tale che per $t > t_0$ riesca $V_2|f| < 1/2$. Sarà allora, a fortiori, per $t > t_0$,

$$\int_{t_0}^t e^{-2(t-\tau)} |f(\tau)|\,d\tau < \frac{1}{2},$$

e quindi con un eventuale cambiamento di variabile $t = t_0 + t'$ potremo sempre ridurci al caso in cui $V_2|f| < 1/2$ per $t > 0$.

Ciò posto, dimostriamo che se w è l'integrale della (5), nullo per $t = 0$, è sempre $|w| < 1$. Ciò vale certo per t abbastanza piccolo; se quindi non è sempre $|w| < 1$ dovrà esistere un *primo* valore T tale che è $|w(T)| = 1$. Ora dalla (5), scritta nella forma

$$w' + 2w = f - w^2,$$

e considerato in essa il secondo membro come noto, si ricava:

$$w = V_2 f - V_2 w^2, \tag{7}$$

da cui, per $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$|w| \leqslant V_2|f| + V_2 w^2 < 1/2 + V_2 1 < 1/2 + 1/2 = 1,$$

e ciò anche per $t = T$, contro l'ipotesi. È dunque sempre $|w| < 1$.

Come è noto, essendo w limitato in tutto il suo campo di definizione, esso esiste per ogni t. Essendo inoltre $w > -1$, è valida la dimostrazione svolta in b), che dà

$$|w| \leqslant V_1 |f| ,$$

e quindi $w \to 0$ per $t \to \infty$. Si aggiunga, per 2, b), che w è di classe p tra 0 e ∞.

Concludiamo che *se f è di classe $p \leqslant 1$, la* (5) *ammette un integrale w, determinato per ogni t abbastanza grande, che tende a zero per $t \to \infty$ e che è di classe p in* $0 \vdash \infty$. Da questo, mediante la formula

$$y = \exp \left[t + \int_0^t w(\tau)\, d\tau\right] ,$$

si risale immediatamente all'*esistenza di un integrale della* (3) *che è positivo e divergente insieme alla sua derivata per $t \to \infty$, e per il quale vale la* (6).

d) Il metodo usato potrebbe servire, con leggere modificazioni, a dimostrare l'esistenza di un secondo integrale z, della (3), che tende a zero con la sua derivata per $t \to \infty$, e per il quale si ha invece

$$\lim_{t \to \infty} \frac{z'}{z} = -1 .$$

Assai più rapidamente si può ricavarlo, con HARTMAN, da quello trovato, mediante la formula di LIOUVILLE, nella forma:

$$z = y \int_t^\infty \frac{d\tau}{y^2(\tau)} .$$

Risulta facilmente

$$\lim_{t \to \infty} (yz) = 1 ,$$

e ciò riconduce lo studio del comportamento di z — e quello di ogni altro integrale — a quello di y, a cui quindi possiamo limitarci.

4. – Ad un metodo generale per ottenere una rappresentazione asintotica di y per ogni valore di p si giunge col seguente procedimento.

a) Si consideri, al posto della (5), l'altra equazione

$$w' + 2w + w^2 = \lambda f \,, \tag{8}$$

con λ complesso arbitrario, e il suo integrale $w(t, \lambda)$ nullo per $t = 0$. Come è noto, esso è funzione analitica di λ, regolare — e anzi nulla — per $\lambda = 0$; onde per $|\lambda|$ abbastanza piccolo vale lo sviluppo

$$w(t, \lambda) = \sum_1^\infty \lambda^n w_n(t) \,, \tag{9}$$

i cui coefficienti w_n si possono ricavare sostituendo nella (8) e identificando i termini di egual grado in λ. Si ottengono così le equazioni differenziali:

$$w_1' + 2w_1 = f \,; \qquad w_n' + 2w_n = -\sum_1^{n-1} w_s w_{n-s} \qquad \text{per } n > 1, \tag{10}$$

con le condizioni iniziali $w_n(0) = 0$. Risulta quindi:

$$w_1 = \mathrm{V}_2 f \,; \qquad w_n = -\sum_1^{n-1} \mathrm{V}_2 \, (w_s w_{n-s}) \qquad \text{per } n > 1 \,, \tag{11}$$

formule ricorrenti che permettono il calcolo successivo delle w_n.

Continuando allora a supporre la f di classe $p > 1$ si prova subito che *se* $n \leqslant p$, w_n *è di classe* p/n. La cosa vale intanto per $n = 1$; ammesso che valga poi per ogni indice $s < n$, sarà w_s di classe $\frac{p}{s}$, w_{n-s} di classe $\frac{p}{n-s}$, quindi (6) $w_s w_{n-s}$ di classe $\frac{p}{n} \geqslant 1$, e della stessa classe (n. 2, b)) anche $\mathrm{V}_2 \, (w_s w_{n-s})$ e perciò, per la (11), w_n.

---

(6) Qui e nel seguito ci serviamo delle seguenti osservazioni che, per quanto ovvie, ci sembrano degne di esplicita menzione:

a) *Se* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *sono rispettivamente di classi* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(p_i > 0)$ *in un insieme* I, $f_1 f_2 \ldots f_n$ *è di classe* $q = \dfrac{1}{\sum (1/p_i)}$.

Infatti, essendo $\{|f_i|^q\}^{p_i/q}$ sommabile, $|f_i|^q$ è di classe p_i/q; ma si ha: $\sum q/p_i = 1$, quindi $|f_1|^q |f_2|^q \ldots |f_n|^q$ è sommabile, donde la tesi.

b) *Nelle stesse ipotesi, se le* f_i *sono inoltre limitate, se* φ *è di classe* $\pi > 1$ *ed è*

$$\sum \frac{1}{p_i} + \frac{1}{\pi} \geqslant 1 \,,$$

$f_1 f_2 \ldots f_n \varphi$ *è sommabile.*

Infatti $f_1 f_2 \ldots f_n$ è, per a), di classe $q = \dfrac{1}{\sum 1/p_i}$, quindi, essendo limitata, anche di

Si aggiunga che *le* w_n *tendono a zero per* $n \to \infty$; ciò consegue, per induzione, dalle (10) e dal n. 2, a) per $n = 1$; n. 2, c) per $n > 1$.

b) La considerazione dello sviluppo (9) ha principalmente, come ora si vedrà, valore euristico, per giustificare le posizioni (10); ma si può anche darle valore effettivo potendosi sempre fare in modo che lo sviluppo valga per $\lambda = 1$. Si ha così per l'integrale w della (5) nullo per $t = 0$ l'espressione

$$w = \sum_{1}^{\infty} w_n \, .$$

Difatti basta prendere nella dimostrazione del n. 3, c) il numero t_0 in modo che per $t > t_0$ riesca $V_2 f < k < 1/2$ per vedere subito che in essa ad f si può sostituire λf con λ complesso e tale che

$$|\lambda| < R, \qquad \text{con} \qquad R = \frac{1}{2k} > 1 \, .$$

La $w(t, \lambda)$ è allora regolare per $|\lambda| < R$ e quindi lo sviluppo (9) converge per $\lambda = 1$. E si giustificano anche le successive operazioni che ci hanno condotto alle (10) e (11).

Ma ciò che a noi basta è dimostrare che *se si pone*

$$w = w_1 + w_2 + \ldots + w_{\nu-1} + R_\nu \, , \tag{12}$$

R_ν *è di classe* p/ν *se* $p > \nu$, *è di classe* 1, *cioè sommabile tra* 0 *e* ∞, *se* $\nu - 1 < p \leqslant \nu$.

Cominciamo a provarlo per $\nu = 2$, $p > 2$. Si ha allora

$$w = w_1 + R_2 \, ,$$

donde, per ciò che si è visto in a), R_2 risulta di classe p. D'altra parte, sosti-

---

classe $\dfrac{\pi - 1}{\pi} \geqslant q$; allora $f_1 f_2 \ldots f_n$ e φ sono di classi complementari e il loro prodotto è sommabile.

Si ricordi anche che la somma di due funzioni di classe $p > 0$ è ancora della stessa classe.

Per le proprietà qui applicate può vedersi: M. Picone e T. Viola, *Lezioni sulla moderna teoria dell'integrazione* (Torino, 1952), pp. 175 e 207.

tuendo nella (5) e tenendo conto della prima delle (10), si ha:

$$R_2' + 2R_2 = -(w_1 + R_2)^2 .$$

Ora essendo w_1 e R_2 di classe p, la loro somma è di classe p, e il secondo membro di classe $p/2$; quindi tale è anche (n. 2, b)) R_2.

Se fosse invece $1 < p \leqslant 2$, l'ultima deduzione non sarebbe lecita; potremmo però affermare che essendo $p/2 \leqslant 1$ e $w_1 + R_2$ limitata tra 0 e ∞, $(w_1 + R_2)^2$ è anche di classe 1, e così R_2.

Sia ora il teorema valido per il resto $R_{\nu-1}$ e sia prima $p > \nu$; saranno allora di classe $\frac{p}{\nu - 1}$ sia $R_{\nu-1}$ sia $w_{\nu-1}$, e quindi anche

$$R_{\nu-1} - w_{\nu-1} = R_\nu .$$

D'altra parte, sostituendo il valore (12) nella (5) si trova

$$R_\nu' + 2R_\nu + R_\nu^2 + \sum_1^{\nu-1} (w_s' + 2w_s) + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_{\nu-1} + 2R_\nu \sum_1^{\nu-1} w_s + H_\nu = f ,$$

$$\left(\sigma_s = \sum_1^{s-1} w_i w_{s-i}\right),$$

dove H_ν è somma di termini della forma $w_r w_s$ con

$$2 \leqslant r \leqslant \nu - 1 , \qquad 2 \leqslant s \leqslant \nu - 1 , \qquad r + s \geqslant \nu ,$$

e di qui, tenuto conto delle (10),

$$R_\nu' + 2R_\nu = -2R_\nu \sum_1^{\nu-1} w_s - R_\nu^2 - H_\nu . \tag{13}$$

Ora, per l'osservazione già fatta [7], il sommatorio è della classe del suo primo termine, cioè p, mentre R_ν è di classe $\frac{p}{\nu - 1}$; il prodotto risulta quindi di classe $\frac{p}{\nu}$. Così pure ogni termine $w_r w_s$ di H_ν risulta di classe $\frac{p}{r + s} \leqslant \frac{p}{\nu}$, e quindi anche di classe $\frac{p}{\nu}$; e infine R_ν^2 risulta di classe $\frac{p}{2(\nu - 1)}$ e quindi

[7] E cioè che se f è limitata e di classe p, essa è anche di ogni classe $p' > p$. (È infatti $|f|^{p'} = O(|f|^p)$.) Qui w e i w_i sono limitati, anzi tendono a zero.

anch'esso di classe $\frac{p}{\nu}$. Se ne conclude che il secondo membro della (13) è di classe $\frac{p}{\nu} > 1$ e perciò è tale anche R_ν.

Nel caso $\nu - 1 < p \leqslant \nu$ i termini del secondo membro della (13) risultano di classe $\frac{p}{\nu} \leqslant 1$, quindi di classe 1, e lo stesso avviene della loro somma; perciò R_ν è sommabile.

c) Siamo ora in grado di dare una prima forma asintotica del considerato integrale y della (3) nell'ipotesi che f sia di classe $p \geqslant 1$. Essendo infatti ν l'intero tale che

$$\nu - 1 < p \leqslant \nu ,$$

varrà la (12), con R_ν sommabile tra 0 e ∞. Ne segue, integrando,

$$\log y - t = \sum_{1}^{\nu-1} \int_0^t w_s(\tau)\, d\tau + C + o(1) , \tag{14}$$

da cui segue senz'altro la forma cercata ([8]).

5. – a) La formula (14) risolve teoricamente il problema; però essa dà anche nei primi casi, espressioni assai più complicate del necessario. Indicheremo ora una via per ottenerne una « forma canonica » che dà verosimilmente la migliore soluzione del problema.

Per ottenerla ci sarà comodo introdurre un operatore F_α così definito

$$\mathrm{F}_\alpha z = \mathrm{V}_\alpha(fz).$$

Si ha allora: *Una forma P_n^s di grado s nelle $w_1, w_2, \ldots, w_k$, isobarica di peso n, si può esprimere come somma di un numero finito di termini del tipo*

$$c\mathrm{F}_{2\alpha_1}\mathrm{F}_{2\alpha_2} \ldots \mathrm{F}_{2\alpha_n} 1 ,$$

con $1 \leqslant \alpha_i \leqslant n$, $\alpha_1 \geqslant s$.

([8]) Proseguendo il ragionamento di b) si prova facilmente che, per ogni $n \geqslant p$, w_n e R_n sono sommabili tra 0 e ∞. Ciò porta che in realtà la (14), con un dato ν, vale per ogni p per cui sia $1 \leqslant p \leqslant \nu$. L'analoga osservazione può farsi sulle formule che nei nn. seguenti ricaveremo dalla (14); v. per esempio i risultati del n. 7.

Per dimostrarlo si osservi che dalle (10) si ha:

$$\frac{dP_n^s}{dt} = \frac{\partial P_n^s}{\partial w_1} w_1' + \sum_2^k \frac{\partial P_n^s}{\partial w_i} w_i' = (f - 2w_1) \frac{\partial P_n^s}{\partial w_1} + \sum_2^k (-\sigma_i - 2w_i) \frac{\partial P_n^s}{\partial w_i},$$

da cui, per il teorema di EULERO,

$$\frac{dP_n^s}{dt} + 2sP_n^s = f\frac{\partial P_n^s}{\partial w_1} - \sum_2^k \sigma_i \frac{\partial P_n^s}{\partial w_i}.$$

Si riconosce subito che, con notazioni evidenti, e tenuto conto del significato delle σ_i, si può scrivere

$$\frac{\partial P_n^s}{\partial w_1} = P_{n-1}^{s-1}, \qquad \sum_2^k \sigma_i \frac{\partial P_n^s}{\partial w_i} = P_n^{s+1},$$

onde, essendo $P_n^s(0) = 0$, risulta:

$$P_n^s = \mathrm{V}_{2s}(fP_{n-1}^{s-1}) - \mathrm{V}_{2s} P_n^{s+1} = \mathrm{F}_{2s} P_{n-1}^{s-1} - \mathrm{V}_{2s} P_n^{s+1},$$

formula di riduzione che ci condurrà facilmente allo scopo.

Si dica infatti *altezza* di un P_n^s la differenza $2n - s$; si vedrà subito che se P_n^1 ha altezza h, P_{n-1}^{s-1} e P_n^{s+1} hanno altezza $h-1$. Si ammetta allora vero il teorema per i polinomi di altezza $h-1$, sicchè per P_{n-1}^{s-1} e P_n^{s+1} valgano rappresentazioni del tipo annunciato; una tale rappresentazione vale allora senz'altro per $\mathrm{F}_{2s} P_{n-1}^{s-1}$, ed anzi con $\alpha_1 = s$; il numero degli operatori F passa infatti con la sostituzione da $n-1$ ad n. Quanto poi all'addendo $\mathrm{V}_{2s} P_n^{s+1}$, si noti che se uno dei termini della rappresentazione di P_n^{s+1} è

$$c\mathrm{F}_{2\beta_1}\mathrm{F}_{2\beta_2} \ldots \mathrm{F}_{2\beta_n} 1 = c\mathrm{V}_{2\beta_1}(f\mathrm{F}_{2\beta_2} \ldots \mathrm{F}_{2\beta_n} 1),$$

con $1 \leqslant \beta_i \leqslant n$, $\beta_1 \geqslant s+1$, ad esso corrisponde in $\mathrm{V}_{2s} P_n^{s+1}$ il termine

$$c\mathrm{V}_{2s}\mathrm{V}_{2\beta_1}(f\mathrm{F}_{2\beta_2} \ldots \mathrm{F}_{2\beta_n} 1)$$

che per il n. 1, f) si decompone in

$$-c\frac{\mathrm{V}_{2\beta_1} - \mathrm{V}_{2s}}{2\beta_1 - 2s}(f\mathrm{F}_{2\beta_2} \ldots \mathrm{F}_{2\beta_n} 1) =$$

$$= -\frac{c}{2\beta_1 - 2s}\mathrm{F}_{2\beta_1}\mathrm{F}_{2\beta_2} \ldots \mathrm{F}_{2\beta_n} 1 + \frac{c}{2\beta_1 - 2s}\mathrm{F}_{2s}\mathrm{F}_{2\beta_2} \ldots \mathrm{F}_{2\beta_n} 1,$$

e ciò conduce ancora a termini della forma voluta.

D'altra parte, essendo $n \geqslant s \geqslant 1$, il minimo valore di h è 1, e si ha solo per $n = s = 1$, cioè per il monomio $cw_1 = cV_2 f = cF_2 1$, per il quale vale il teorema. Questo risulta perciò dimostrato in tutta la sua generalità.

b) Il risultato precedente vale in particolare per $P_n^1 = w_n$, che si può dunque esprimere come combinazione lineare di termini del tipo

$$F_{2\alpha_1} F_{2\alpha_2} \dots F_{2\alpha_n} 1 = V_{2\alpha_1}(f F_{2\alpha_2} F_{2\alpha_3} \dots F_{2\alpha_n} 1) ,$$

con $0 \leqslant \alpha_i \leqslant n$; e di qui risulta uno spezzamento per il suo integrale tra 0 e t che comparisce nella (14).

Ma vi è qui luogo ad un'altra semplice osservazione, di carattere generale: *Se $z = V_\alpha y$ tende a 0 per $t \to \infty$, si ha, per $t \to \infty$,*

$$\int_0^t z \, d\tau = \int_0^t V_\alpha y \, d\tau = \frac{1}{\alpha} \int_0^t y \, d\tau + o(1) . \tag{15}$$

Ciò risulta subito da $z' + \alpha z = y$ integrando tra 0 e t (cfr. n. 1, b)).

Applicando questo risultato a w_n vediamo che $\int_0^t w_n \, d\tau$ *è eguale ad una combinazione lineare di termini del tipo*

$$\int_0^t f F_{2\alpha_2} F_{2\alpha_3} \dots F_{2\alpha_n} 1 \cdot d\tau, \qquad (1 \leqslant \alpha_i \leqslant n),$$

più un infinitesimo per $t \to \infty$.

L'introduzione di queste espressioni nella (14) fornisce la forma canonica che avevamo in vista.

È utile però osservare che questa forma canonica, per un dato n, può ottenersi senza passare per la corrispondente forma ridotta di w_n, bastando averla per σ_n, che è di altezza minore. Essendo infatti $w_n = - V_2 \sigma_n$, sarà, per la (15),

$$\int_0^t w_n \, d\tau = -\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_n \, d\tau + o(1) .$$

Questa semplificazione può talvolta usarsi in altri casi consimili.

c) Volendo fare uso sistematico del procedimento di riduzione indicato in a), converrà ordinare i monomi nelle w_i secondo la loro altezza crescente.

Senza difficoltà si ha così:

$$\text{per } h=1:\ w_1;\quad \text{per } h=2:\ w_1^2;\quad \text{per } h=3:\ w_1^3,\ w_2;$$

$$\text{per } h=4:\ w_1^4,\ w_1w_2;\quad \text{per } h=5:\ w_1^5,\ w_1^2w_2,\ w_3;\ \text{e così via.}$$

Diamo qui, in corrispondenza, alcune forme canoniche che ci serviranno in seguito:

$$w_1 = \mathrm{V}_2 f = \mathrm{F}_2 1\ ;\qquad w_1^2 = 2\mathrm{V}_4(fw_1) = 2\mathrm{V}_4(f\mathrm{V}_2 f) = 2\mathrm{F}_4\mathrm{F}_2 1\ ;$$

$$w_1^3 = 3\mathrm{V}_6(fw_1^2) = 6\mathrm{V}_6\big(f\mathrm{V}_4(f\mathrm{V}_2 f)\big) = 6\mathrm{F}_6\mathrm{F}_4\mathrm{F}_2 1\ ;$$

$$w_2 = -\mathrm{V}_2 w_1^2 = -2\mathrm{V}_2\mathrm{V}_4(fw_1) = \mathrm{V}_4(f\mathrm{V}_2 f) - \mathrm{V}_2(f\mathrm{V}_2 f) = \mathrm{F}_4\mathrm{F}_2 1 - \mathrm{F}_2\mathrm{F}_2 1\ .$$

6. – La struttura formale delle formule asintotiche per l'integrale y, nelle ipotesi poste per f, risulta perfettamente chiarita da quanto precede; un ulteriore progresso in questo senso sembra assai difficile, e anche il calcolo effettivo dei termini, per valori non troppo piccoli di p (ossia di ν), si presenta ancora assai penoso. Pensiamo quindi possa avere interesse una trasformazione che rappresenta un primo passo verso la forma canonica e che può ottenersi operando direttamente sulla (5) in modo singolarmente semplice.

Osserviamo per questo che, supposto, come è lecito, $|w| < 2$, dalla (5) si ha:

$$w = \frac{f}{2+w} - \frac{w'}{2+w}\,,$$

da cui, integrando tra 0 e t,

$$\int_0^t w(\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{f(\tau)}{2+w(\tau)}\,d\tau - \log\left(1+\frac{w}{2}\right)$$

e, per $t\to\infty$,

$$\int_0^t w(\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{f(\tau)}{2+w(\tau)}\,d\tau + o(1)\,. \tag{16}$$

D'altra parte, con le notazioni del n. 4, possiamo scrivere

$$\frac{f}{2+w} = \frac{1}{2}f - \frac{1}{4}fw + \frac{1}{8}fw^2 - \ldots + \frac{(-1)^{\nu-2}}{2^{\nu-1}}fw^{\nu-2} + \varrho\,,$$

dove è

$$|\varrho| = \frac{1}{2^{\nu-1}} \left| \frac{fw^{\nu-1}}{2+w} \right| = O(fw^{\nu-1}) ;$$

la regola più volte usata mostra allora che ϱ è sommabile tra 0 e $+\infty$:

$$\frac{\nu-1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{\nu}{p} \geqslant 1 ,$$

e quindi può scriversi

$$(17) \qquad \int_0^t \frac{f(\tau)}{2+w(\tau)} \, d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t f \, d\tau - \frac{1}{4} \int_0^t fw \, d\tau + \ldots + \frac{(-1)^{\nu-2}}{2^{\nu-1}} \int_0^t fw^{\nu-2} \, d\tau + C + o(1) .$$

A loro volta, gli integrali a secondo membro possono essere valutati asintoticamente ricordando (n. 4, b)) che, posto

$$(18) \qquad w = w_1 + w_2 + \ldots + w_{\nu-2} + R_{\nu-1} ,$$

il resto $R_{\nu-1}$ è di classe $\dfrac{p}{\nu-1}$ e tende a zero, come i w_i, per $t \to \infty$.

Anzitutto, come sopra, si prova che $fR_{\nu-1}$ è sommabile tra 0 e ∞, onde può scriversi

$$\int_0^t fw \, d\tau = \sum_1^{\nu-2} \int_0^t fw_i \, d\tau + C_1 + o(1) .$$

Quadrando poi la (18), e moltiplicando per f, si trova subito che i soli termini non sommabili tra 0 e ∞ possono essere quelli della forma $fw_{i_1}w_{i_2}$ in cui sia

$$i_1 + i_2 + 1 < p , \qquad \text{cioè} \qquad i_1 i_2 + 1 \leqslant \nu - 1 , \qquad i_1 + i_2 \leqslant \nu - 2 .$$

Si ha dunque

$$\int_0^t fw^2 \, d\tau = \sum_{i_1+i_2 \leqslant \nu-2} \int_0^t fw_{i_1}w_{i_2} \, d\tau + C_2 + o(1) .$$

Nello stesso modo, elevando la (14) a cubo, moltiplicando per f, ed esaminando la classe dei singoli termini, si otterrebbe

$$\int_0^t f w^3 \,\mathrm{d}\tau = \sum_{i_1+i_2+i_3 \leqslant \nu-2} \int_0^t f w_{i_1} w_{i_2} w_{i_3} \,\mathrm{d}\tau + C_3 + o(1)\,,$$

e così via.

Sostituendo queste espressioni nelle (16) e (17) si ottiene la formula definitiva:

$$(19) \qquad \log y - t = \sum_{\Sigma i_r \leqslant \nu-2} \frac{(-1)^s}{2^{s+1}} \int_0^t f w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_s} \,\mathrm{d}\tau + C + o(1)\,,$$

in cui gli indici i_1, i_2, ... debbono prendersi in tutte le disposizioni possibili che soddisfino alla condizione $\Sigma\, i_r \leqslant \nu - 2$. Alle disposizioni potranno sostituirsi le combinazioni, introducendo nella formula un opportuno coefficiente polinomiale.

b) Se nella (19) si raccolgono insieme i termini per i quali $\Sigma\, i_r$ è costante, si ha l'altra formula:

$$(18) \qquad \log y - t = \sum_{0}^{\nu-2}{}_k \sum_{\Sigma i_r = k} \frac{(-1)^s}{2^{s+1}} \int_0^t f w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_s} \,\mathrm{d}\tau + C + o(1)\,,$$

che può scriversi anche

$$\log y - t = \int_0^t f \sum_0^{\nu-2} P_k (w_1, w_2, \ldots, w_k) \,\mathrm{d}\tau + C + o(1)\,,$$

dove P_k è il polinomio isobarico, di peso k, definito da

$$P_k = \sum_{\Sigma i = k} \frac{(-1)^s}{2^{s+1}} w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_s}\,.$$

È questa la formula cui volevamo giungere, la quale richiede, per un dato $\nu \geqslant 3$, la conoscenza delle forme ridotte di monomi di altezza massima $2\nu - 5$, con notevole semplificazione rispetto al metodo generale.

Facilmente si ottiene:

$$P_0 = \frac{1}{2}, \qquad P_1 = -\frac{1}{4} w_1 = -\frac{1}{4} V_2 f,$$

$$P_2 = -\frac{1}{4} w_2 + \frac{1}{8} w_1^2 = -\frac{1}{4} V_4(fV_2 f) + \frac{1}{4} V_2(fV_2 f) + \frac{1}{4} V_4(fV_2 f) = \frac{1}{4} V_2(fV_2 f),$$

$$P_3 = -\frac{1}{4} w_3 + \frac{1}{4} w_1 w_2 - \frac{1}{16} w_1^3 = \dots .$$

7. – Passiamo, per terminare, ad alcuni esempi e al confronto con i risultati già noti.

a) Per $p = 1$, w risulta sommabile tra 0 e ∞ (n. 2, b)), onde può scriversi:

$$\log y - t = \int_0^t w \, d\tau = C + o(1), \qquad \text{(Bôcher [2])}.$$

b) Per $1 < p \leqslant 2$ si ha:

$$\log y - t = \int_0^t f P_0 \, d\tau + C + o(1) = \frac{1}{2} \int_0^t f \, d\tau + C + o(1), \qquad \text{(Hartman [3])}.$$

c) Per $2 < p \leqslant 3$ si ha:

$$\log y - t = \int_0^t f(P_0 + P_1) \, d\tau + C + o(1) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t f \, d\tau - \frac{1}{4} \int_0^t f V_2 f \, d\tau + C + o(1),$$

formula data, per $p = 3$, sotto ipotesi più restrittive (f continua e tendente a zero per $t \to \infty$) e con un errore nel secondo termine (1/2 invece di 1/4), da R. Bellman [1].

d) Per $3 < p \leqslant 4$ il termine da aggiungere al secondo membro è

$$\int_0^t f P_2 \, d\tau = \frac{1}{4} \int_0^t f V_2(f V_2 f) \, d\tau.$$

e) Per $4 < p \leqslant 5$ si dovrà ancora aggiungere il termine:

$$\int_0^t fP_3 \, d\tau = -\frac{1}{4}\int_0^t fV_2(fV_2(fV_2 f)) \, d\tau - \frac{1}{8}\int_0^t fV_2(fV_4(fV_2 f)) \, d\tau ,$$

come risulta da un non difficile calcolo, che per brevità omettiamo.

Bibliografia.

[1] R. Bellman, *On the asymptotic behaviour of solutions of* $u'' - (1 + f(t))u = 0$, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **31**, 83-91 (1950).

[2] M. Bôcher, *On regular singular points of linear differential equations of the second order whose coefficients are not necessarily analytic*, Trans. Amer. Math. Soc. **1**, 40-52 (1900).

[3] P. Hartman, *Unrestricted solution fields of almost-separable differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 560-580 (1948).

[4] A. Wintner, *Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator*, Amer. J. Math. **69**, 251-272 (1947).