

**Le varietà  $V_5$  i cui spazi tangenti ricoprono una varietà  $W$  di dimensione inferiore alla ordinaria. (\*\*)**

Parte II.

§ 4. -  $V_5$  non sviluppabili la cui  $W$  ha dimensione inferiore a dieci.

6. - Prima di occuparci delle  $V_5$  di cui si dice nel titolo di questo § 4, vogliamo esaminare quelle varietà  $V_k$  che soddisfano ad un sistema di equazioni di LAPLACE tale che il sistema delle quadriche associate sia costituito dalle quadriche dello  $S_{k-1}$  che passano per uno  $S_{k-l-1}$  con  $l > 1$  <sup>(1)</sup>, oppure contenga un siffatto sistema di quadriche. Ci limiteremo a trattare il caso  $k = 5$ ,  $l = 2$  <sup>(2)</sup> facendo però osservare che casi generali si possono trattare sulla base di considerazioni sostanzialmente eguali a quelle che svolgeremo. Ci accontenteremo di dare gli enunciati relativi ai casi più generali.

Come è noto le equazioni di LAPLACE, linearmente indipendenti, a cui soddisfa presentemente la  $V_5$ , sono in numero di 9, 10 od 11. Il caso in cui le equazioni sono 9 è stato trattato dal TERRACINI [op. cit. in <sup>(2)</sup>, pag. 435 della Parte I] e conduce ad  $S_1$ -coni proiettanti da una retta una  $V_3$  generica (non soddisfacente cioè a nessuna equazione di LAPLACE). Nel caso in cui le equazioni sono 10 od 11 si sa intanto che 9 di esse possono scriversi (con una opportuna scelta dei parametri):

$$(59) \quad \begin{cases} x^{(55)} = 0, & x^{(44)} = 0, \\ x^{(5i)} = \sum_{r=1}^5 a_{ir} x^{(r)} + a_i x, & (i = 1, 2, 3, 4), \\ x^{(4i)} = \sum_{r=1}^5 b_{ir} x^{(r)} + b_i x, & (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

(\*) Indirizzo: Istituto Matematico S. PINCHERLE, Università, Bologna (Italia).

(\*\*) La Parte I del presente lavoro è apparsa in questa Rivista 2, 435-462 (1951).

<sup>(1)</sup> Ossia quei sistemi di quadriche il cui sistema apolare duale è costituito di  $S_{i-1}$ -coni con l' $S_{i-1}$ -vertice in comune. (Si veda il n. 3.)

<sup>(2)</sup> Si ricordi che i casi  $l = k$ ,  $l = k - 1$  danno luogo a varietà banali [cfr. TERRACINI, op. cit. nell'annotazione <sup>(2)</sup> della Parte I, questa Rivista, 2, 435-462 (1951)]. Il caso  $k = 5$ ,  $l = 3$  rientra in quelli considerati dal TERRACINI nel lavoro citato ora.

Ora formiamo le conseguenze delle (59) che si ottengono eguagliando le derivate terze  $x^{(5ij)} = x^{(5ji)}$ , ( $i \neq j = 1, 2, 3$ ),  $x^{(5ij)} = x^{(4ji)}$  ed infine  $x^{(45i)} = x^{(4i5)}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), e tenendo conto delle (59) stesse. Le forme quadratiche associate a quelle nuove equazioni sono quelle che si ottengono annullando i minori delle matrici:

$$(60) \quad \left\| \begin{array}{ccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \sum_r^3 a_{1r} \theta_r & \sum_r^3 a_{2r} \theta_r & \sum_r^3 a_{3r} \theta_r \end{array} \right\|,$$

$$(60') \quad \left\| \begin{array}{ccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \sum_r^3 b_{1r} \theta_r & \sum_r^3 b_{2r} \theta_r & \sum_r^3 b_{3r} \theta_r \end{array} \right\|,$$

ed inoltre le seguenti

$$(61) \quad \theta_i \left[ \sum_r^3 a_{4r} \theta_r \right] = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Per ciò che riguarda le (60), (60') osserviamo che, in base a considerazioni già svolte nel n. 5<sup>(3)</sup>, le forme quadratiche (60) svaniscono tutte identicamente, oppure due almeno sono indipendenti, come pure le (60'). Quanto alle (61), la matrice dei loro coefficienti è

$$\left\| \begin{array}{cccccc} a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{41} & 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \\ 0 & 0 & a_{41} & 0 & a_{52} & a_{43} \end{array} \right\|$$

e si vede così che quelle forme svaniscono tutte oppure sono indipendenti.

Si deve dunque concludere che se le equazioni di LAPLACE l.i. sono 10, quelle 9 fra di esse della forma (59) costituiscono un sistema chiuso e pertanto la  $V_5$  è attualmente un  $S_1$ -cono proiettante una  $V_3$  soddisfacente ad una equazione di LAPLACE. Se le e.d.L.l.i. sono 11, cinque fra di esse, e precisamente le

$$\begin{cases} x^{(55)} = 0, \\ x^{(5i)} = \sum_r^5 a_{ir} x^{(r)} + a_i x, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

oppure le

$$\begin{cases} x^{(44)} = 0, \\ x^{(4i)} = \sum_r^5 b_{ir} x^{(r)} + b_i x, \\ x^{(45)} = \sum_r^5 a_{4r} x^{(r)} + a_4 x, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3),$$

(<sup>3</sup>) Cioè considerando le omografie  $\theta'_i = \sum_r^3 a_{ir} \theta_r$ ,  $\theta'_i = \sum_r^3 b_{ir} \theta_r$ , ( $i = 1, 2, 3$ ).

costituiscono un sistema chiuso. In questo caso la  $V_5$  è un cono proiettante da un punto una  $V_4$  sviluppabile che soddisfa a 6 e.d.L.i. [dei tipi determinati in TERRACINI, op. cit. in (2)] (4).

Riguardo al caso di  $k$  ed  $l$  qualunque ci limiteremo a rilevare che la  $V_k$  deve soddisfare ad equazioni di LAPLACE fra le quali ve ne sono  $lk - \frac{l(l-1)}{2}$  costituenti un sistema a caratteristica di tipo parabolico [cfr. BOMPIANI, op. cit. in (22), Parte I del presente lavoro, pag. 444]. Ragionando come prima si vede che, se oltre alle predette equazioni, la  $V_k$  soddisfa ad altre  $\delta < k - l - 1$  e.d.L.i., le  $lk - \frac{l(l-1)}{2}$  prime costituiscono un sistema chiuso e la  $V_k$  è allora un  $S_{l-1}$ -cono proiettante una  $V_{k-l}$  che soddisfa a  $\delta$  equazioni di LAPLACE l.i. Ora se si tiene presente il teorema del n. 3, si può concludere:

*Le varietà  $V_k$  per le quali la varietà  $W$  degli spazi tangenti ha dimensione  $2k - l$  ( $k - 2 \geq l \geq 2$ ) e che rappresentano  $d$  equazioni di Laplace linearmente indipendenti con  $lk - \frac{l(l-1)}{2} \leq d \leq lk - \frac{l(l-1)}{2} + k - l - 2$  sono  $S_{l-1}$ -coni proiettanti una  $V_{k-l}$  che soddisfa a  $d - lk + l(l-1)$  equazioni di Laplace l.i..*

Terminiamo osservando che i metodi del n. 5 si presterebbero, opportunamente completati, ad approfondire lo studio delle  $V_k$  soddisfacenti a sistemi di equazioni a caratteristica di tipo parabolico; ma su ciò qui non insisto.

7. - Considereremo in questo numero le  $V_5$  che soddisfano a quei sistemi di e.d.L. i cui sistemi lineari di quadriche associate hanno per sistema apolare duale  $\infty^6$ ,  $\infty^5$  od  $\infty^4$  quadriche dell' $S_4$  fra le quali  $\infty^5$ ,  $\infty^4$  od  $\infty^3$  sono  $S_1$ -coni col vertice in comune. Si hanno, rispettivamente, in quei casi  $V_5$  soddisfacenti a  $d = 8, 9$  oppure 10 e.d.L.i.. Incominciamo col considerare il caso  $d = 8$ ; conviene distinguere tre possibilità:

(a) La generica quadrica del sistema  $\infty^5$  sopradetto ha due punti distinti in comune con l' $S_1$ -vertice degli  $\infty^4$   $S_1$ -coni del sistema. (b) La generica quadrica è tangente all' $S_1$ -vertice. (c) La generica quadrica contiene l' $S_1$ -vertice

Indicheremo, col TERRACINI, con  $A_h$  l'operatore differenziale:

$$A_h = \sum_1^5 a_{hr} \frac{\partial}{\partial \tau_r}, \quad (h = 1, 2, 3, 4, 5),$$

e supporremo sempre che gli operatori  $A$  che intervengono in seguito siano indipendenti (linearmente). Si vede senza difficoltà che nel caso (a) la  $V_5$  sod-

(4) Le verifiche delle proposizioni che enunceremo d'ora in poi si dovranno intendere fatte anche se non lo diremo esplicitamente.

disfa alle equazioni (5):

$$(62) \quad \begin{cases} A_l A_l x + \sum_1^5 g_{lr} x^{(r)} + g_{ll} x = 0, & (l = 1, 2), \\ A_l A_m x + \sum_1^5 g_{lmr} x^{(r)} + g_{lm} x = 0, & (l = 1, 2; m = 3, 4, 5). \end{cases}$$

Nel caso (b) la  $V_5$  soddisfa alle:

$$(63) \quad \begin{cases} A_1 A_1 x + \sum_r g_{11r} x^{(r)} + g_{11} x = 0, \\ A_1 A_2 x + \sum_1^5 g_{12r} x^{(r)} + g_{12} x = 0, \\ A_l A_m x + \varrho_{lm} A_2 A_2 x + \sum_1^5 g_{lmr} x^{(r)} + g_{lm} x = 0, & (l = 1, 2; m = 3, 4, 5). \end{cases}$$

Infine nel caso (c) la  $V_5$  soddisfa alle:

$$(64) \quad \begin{cases} A_l A_m x + \sum_1^5 g_{lmr} x^{(r)} + g_{lm} x = 0, & (l, m = 1, 2), \\ A_h A_k x + \varrho_{hk} A_1 A_3 x + \sum_1^5 g_{hkr} x^{(r)} + g_{hk} x = 0, & (h = 1, 2; k = 4, 5), \\ A_2 A_3 x + \varrho_{23} A_1 A_3 x + \sum_1^5 g_{23r} x^{(r)} + g_{23} x = 0. \end{cases}$$

Sulle equazioni dei sistemi (62), (63), (64) si opererà in modo del tutto analogo a quello usato dal TERRACINI nella Nota II del suo lavoro citato nella Parte I del presente lavoro, annotazione (2). Ricordiamo che si tratta di formare le condizioni di integrabilità per le equazioni dei sistemi scritti sopra applicando ad esse opportunamente gli operatori  $A$  e confrontando poi i risultati. Dalla considerazione delle quadriche associate alle nuove equazioni che si ottengono, le quali quadriche debbono appartenere al sistema lineare delle quadriche associate alle equazioni di partenza (5), si deduce che il sistema

$$(65) \quad A_1 \sigma = A_2 \sigma = 0$$

(5) Si perviene alla forma scritta, per le equazioni a cui la  $V_5$  deve soddisfare, con una opportuna scelta del riferimento, nello  $S_4$  del sistema lineare delle quadriche associate. Questa osservazione valga anche per il seguito.

(6) Si ricordi che la  $V_5$  soddisfa soltanto alle equazioni dei sistemi (62), (63), (64) ed alle loro combinazioni lineari.

è completo e quindi si possono prendere come nuovi parametri  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  tre soluzioni indipendenti del sistema (65). I sistemi (62), (63) si possono così trasformare in altri due che si ottengono eguagliando a zero otto combinazioni linearmente indipendenti delle  $x^{(14)}, x^{(24)}, x^{(34)}, x^{(15)}, x^{(25)}, x^{(35)}, x^{(44)}, x^{(45)}, x^{(55)}$ , delle derivate prime e della  $x$ . Il sistema (64) diventa poi

$$(64') \quad \begin{cases} x^{(44)} \oslash x^{(45)} \oslash x^{(55)} \oslash 0, \\ x^{(hk)} + \varrho_{hk} x^{(13)} \oslash 0, & (h = 1, 2; k = 4, 5), \\ x^{(23)} + \varrho_{23} x^{(13)} \oslash 0, \end{cases}$$

dove, come d'uso, il simbolo  $\oslash$  sta ad indicare che il primo membro differisce dal secondo per una espressione lineare ed omogenea in  $x$  e le sue derivate prime.

Ragionamenti identici a quelli che usa il TERRACINI nel lavoro indicato dianzi provano poi che le  $V_5$  sono dei tipi seguenti:  $V_5$  luogo di  $\infty^3$  superficie non sviluppabili oppure sviluppabili, situate negli  $S_3$  di un  $S_2$ -cono proiettante una generica  $V_3$ , e  $V_5$  luogo di  $\infty^3$   $S_2$  dotata di  $S_6$  tangente fisso lungo ogni  $S_2$ . Non abbiamo ripetuto i ragionamenti del TERRACINI poichè essi sono ampiamente svolti nel suo lavoro citato.

Veniamo ora ai casi  $d = 9$  e  $d = 10$ ; attualmente vi sono 8 fra le 9 o 10 equazioni l.i. che sono della forma (62), (63) oppure (64), distinguendo anche ora le possibilità (a), (b), (c). Seguiamo ora il seguente procedimento: incominciamo col formare le conseguenze delle equazioni dei sistemi (62), (63) o (64) nello stesso modo di sopra e poi consideriamo le quadriche associate a quelle conseguenze. Si vede che quelle quadriche o appartengono al sistema lineare di quelle associate alle equazioni del sistema (62), (63) o (64) oppure ve ne sono almeno tre di linearmente indipendenti fra loro e da quelle. Poichè nei casi che ci interessano, oltre alle equazioni dei sistemi (62), (63) o (64) la  $V_5$  soddisfa soltanto ad una o due altre equazioni l.i. si può concludere anche ora che il sistema (65) è completo ed effettuare il cambiamento di parametri. Effettuato, si riprenderanno i ragionamenti di prima e si perverrà alle seguenti conclusioni, che si verificano poi agevolmente. Le  $V_5$  sono attualmente dei seguenti tipi:  $V_5$  luogo di  $\infty^3$  superficie (?) situate negli  $S_3$  di un  $S_2$ -cono proiettante una  $V_3$  che soddisfa ad una oppure a due equazioni di Laplace l.i.;  $V_5$  luogo di  $\infty^3$  superficie situate negli  $S_3$  di un  $S_2$ -cono proiettante una  $V_4$  rigata sviluppabile che soddisfa a 6 equazioni di Laplace l.i.;  $V_5$  luogo di  $\infty^3$  piani con  $S_6$  tangente fisso lungo ogni piano e soddisfacente ad una o due equazioni di Laplace (indipendenti e non conseguenze di quelle che esprimono la predetta proprietà).

(?) Non sviluppabili o sviluppabili.

Terminiamo questo n. con osservazioni analoghe a quelle con cui terminammo il n. 6, e cioè facendo rilevare che i risultati conseguiti potrebbero venir estesi senza grandi difficoltà a  $V_k$  ( $k$  qualunque) soddisfacenti a sistemi di equazioni di LAPLACE formalmente analoghi a quelli qui considerati (e si tenga presente l'osservazione con cui termina il n. 3). Si perverrebbe a  $V_k$  luoghi di superficie dell' $S_3$  o luoghi di  $S_2$  analoghe alle  $V_5$  ottenute in questo n..

**8.** — Esaminiamo qui quelle  $V_5$  che soddisfano ai sistemi di e.d. LAPLACE aventi un sistema associato tale che il sistema apolare duale sia:

1) Un sistema  $\infty^4$  di quadriche contenente le  $\infty^2$  coppie di  $S_2$  di un fascio; e in tal caso la  $W$  relativa alla  $V_5$  ha dimensione 9.

2) Un sistema  $\infty^3$  di quadriche contenenti le  $\infty^2$  coppie di  $S_3$  di un fascio; e in tal caso la  $W$  ha dimensione 8.

Nel caso 1) la  $V_5$  soddisfa a 10 e.d.L.l.i., ad 11 nel caso 2). Anche ora si useranno gli stessi metodi del n. precedente. Incominciamo col caso 1); conviene, per rendere più facili i calcoli, distinguere i seguenti sottocasi: ( $a_1$ ) Le quadriche del sistema segnano sull' $S_2$ , base del fascio di  $S_3$ , un fascio di coniche. Sono da distinguersi in questo sottocaso gli otto tipi di fasci di coniche, proiettivamente distinti. ( $b_1$ ) Le quadriche del sistema segnano sul predetto  $S_2$  una conica fissa. Sono da distinguersi ora la conica irriducibile, dalla coppia di rette distinte e dalla retta doppia. ( $c_1$ ) Le quadriche del sistema passano tutte per l' $S_2$ . In ciascuno dei casi elencati conviene scegliere un opportuno riferimento nell' $S_4$  delle quadriche associate e poi scrivere le equazioni di LAPLACE dei sistemi relativi ad ogni caso. Come esempio scriviamo il sistema relativo al caso ( $a_1$ ), nell'ipotesi che il fascio di coniche abbia quattro punti base distinti:

$$(66) \quad \begin{cases} A_l A_l x \simeq 0, & (l = 1, 2, 3), \\ A_m A_n x + \rho_{mn} A_1 A_2 x + \sigma_{mn} A_2 A_3 x \simeq 0, & (m = 1, 2, 3; n = 4, 5), \\ A_1 A_3 x + \rho_{12} A_1 A_2 x + \sigma_{13} A_2 A_3 x \simeq 0. \end{cases}$$

Sui sistemi scritti si opererà poi in modo analogo a quello che abbiamo indicato nel n. precedente al fine di dimostrare che il sistema

$$(67) \quad A_1 \sigma = A_2 \sigma = A_3 \sigma = 0$$

è completo<sup>(8)</sup>. Ci si riesce in ogni caso ed allora col cambiamento di para-

<sup>(8)</sup> Ad esempio, per il sistema (66): tenendo sempre presente [cfr. TERRACINI, loc. cit. in (2)] che in ogni equazione si possono scambiare fra loro due operatori  $A_l, A_m$ ,

metri  $\sigma_1 = \sigma_1(\tau)$ ,  $\sigma_2 = \sigma_2(\tau)$ ,  $\sigma_3 = \tau_3$ ,  $\sigma_4 = \tau_4$ ,  $\sigma_5 = \tau_5$ , dove  $\sigma_1$ ;  $\sigma_2$  sono due integrali indipendenti di (67), i sistemi di cui s'è detto diventano: nel caso (a<sub>1</sub>) dieci combinazioni lineari, linearmente indipendenti delle  $x^{(i,j)}$ , delle derivate prima e delle  $x$ , con  $(i, j) = (13), (14), (15), (23), (24), (25), (33), (34), (35), (44), (45), (55)$ ; nel caso (b<sub>1</sub>), come nel caso (a<sub>1</sub>), ma cinque delle combinazioni contengono solo le ultime sei delle derivate seconde scritte prima; nel caso (c<sub>1</sub>) infine il sistema contiene le sei equazioni

$$x^{(33)} \oslash x^{(34)} \oslash x^{(35)} \oslash x^{(44)} \oslash x^{(45)} \oslash x^{(55)} \oslash 0.$$

Ragionamenti analoghi a quelli che si facevano per i sistemi del n. precedente mostrano che, nei casi (a<sub>1</sub>) e (b<sub>1</sub>) le  $V_3$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  costanti, appartengono al più allo  $S_5$ . Ma nel caso (b<sub>1</sub>) è facile vedere, formando le condizioni di integrabilità e tenendo conto che il sistema in esame è chiuso, che quelle  $V_3$  soddisfano a 5 equazioni di LAPLACE l.i. e quindi stanno in  $S_4$  se non sono  $\infty^1$  di  $S_2$  sviluppabili ordinarie. Continuando poi a ragionare come prima si perviene finalmente alle seguenti conclusioni, che si verificano analiticamente senza difficoltà: *Nel caso (a<sub>1</sub>) la  $V_5$  è costituita da  $\infty^2$   $V_3$  situate negli  $S_5$  di un  $S_4$ -cono proiettante una superficie generica <sup>(9)</sup>; nel caso (b<sub>1</sub>) la  $V_5$  è costituita come prima da  $V_3 \infty^1$  di piani sviluppabili ordinarie, oppure è costituita da  $\infty^2$   $V_3$  situate negli  $S_4$  di un  $S_1$ -cono proiettante una  $V_4$  sviluppabile che soddisfi a 6 equazioni di Laplace l.i. e sia luogo di  $\infty^2$   $S_2$ , oppure negli  $S_4$  di una  $V_6$ ,  $\infty^2$  di  $S_4$  con  $S_7$  tangente fisso lungo ogni  $S_4$ ; nel caso (c<sub>1</sub>) la  $V_5$  è una  $\infty^2$  di  $S_3$  con  $S_7$  tangente fisso lungo ogni  $S_3$ , generica.*

Ciò che s'è fatto per il caso 1) si può ripetere, con lievi modificazioni, nel

modificando convenientemente i termini del 1° ordine, si operi con  $A_1$  sulla  $A_2A_4 + \sigma_{24}A_1A_2 + \sigma_{24}A_2A_3$ , con  $A_2$  su  $A_1A_4 + \sigma_{14}A_1A_2 + \sigma_{14}A_2A_3$ . Le  $A_1A_2A_1$ ,  $A_2A_1A_2$  possono venir espresse per mezzo delle  $A_2A_1A_1$ ,  $A_1A_2A_2$  ottenute dalle prime fra le (66). Dall'ultima si ricava poi  $A_1A_2A_3$  che si sostituirà nella relazione ottenuta facendo la differenza fra le due ricavate prima; si ottiene così una nuova equazione di LAPLACE che deve essere combinazione lineare delle (66). Le quadriche associate alle (66) passano tutte per la retta  $A_1\theta = A_2\theta = A_3\theta = 0$  e così dovrà accadere della quadrica associata alla nuova equazione; si perviene, tenendo conto di ciò, a dimostrare che la equazione del 1° ordine

$$\sum_r^5 \left( \sum_t^5 a_{2t} a_{1r}^{(t)} - a_{1t} a_{2r}^{(t)} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial r_r} = 0$$

è combinazione lineare delle  $A_1\sigma = A_2\sigma = A_3\sigma = 0$ . E così via.

<sup>(9)</sup> Il sistema lineare delle coniche associate alle equazioni di LAPLACE l.i. cui soddisfano le  $V_3$ , ha per sistema apolare duale quello che le quadriche di cui si dice in principio del presente n. segnano sull' $S_2$  base del relativo fascio di  $S_3$ . Analoghi fatti per il caso (b<sub>1</sub>).

caso 2); ora si debbono distinguere i sottocasi: (a<sub>2</sub>) Le quadriche del sistema segnano sull' $S_2$  base del fascio di  $S_3$  una conica, che potrà essere irriducibile, spezzata in due rette distinte o retta doppia. (b<sub>2</sub>) Tutte le quadriche del sistema contengono l' $S_2$ . Si perviene ai seguenti tipi di  $V_5$ :  $V_5$  formata da  $\infty^2 V_3$  situate negli  $S_4$  di un  $S_3$ -cono proiettante una superficie generica;  $V_5$ ,  $\infty^2$  di  $S_3$  con  $S_6$  tangente fisso lungo ogni  $S_3$ , per altro generica.

9. — Ora considereremo i sistemi di  $d = 9, 10, 11$  equazioni di LAPLACE l.i., i cui sistemi di quadriche associate hanno per sistemi apolari duali rispettivamente:

(a) Il sistema  $\infty^5$  delle quadriche di  $S_4$  passanti per uno  $S_2$  ed uno  $S_1$ , fra loro sghembi.

(b) Sistemi  $\infty^4$  contenuti nel sistema (a).

(c) Il sistema  $\infty^3$  di quadriche per due  $S_2$  (non appartenenti ad  $S_3$ ). I casi (a), (b) forniscono  $V_5$  per cui la  $W$  ha dimensione 9, nel caso (c) la  $W$  ha dimensione 8.

Nel caso (a) il sistema di equazioni di LAPLACE a cui soddisfa la  $V_5$  è

$$(67) \quad \begin{cases} A_l A_m x \infty 0, & (l, m = 1, 2), \\ A_h A_k x \infty 0, & (h, k = 3, 4, 5), \end{cases}$$

e la varietà stessa è, come ha dimostrato il TERRACINI la  $V_5^{10}$  di  $S_{11}$  di C. SEGRE.

Nel caso (b) il sistema contiene le equazioni (67) ed inoltre una equazione del tipo:

$$(68) \quad \varrho_{13} A_1 A_3 x + \varrho_{14} A_1 A_4 x + \varrho_{15} A_1 A_5 x + \varrho_{23} A_2 A_3 x + \varrho_{24} A_2 A_4 x + \varrho_{25} A_2 A_5 x \infty 0.$$

Dimostriamo che [come avviene per il caso del sistema (67) da solo] i sistemi

$$(69) \quad \begin{cases} A_1 \sigma = A_2 \sigma = 0, \\ A_3 \sigma = A_4 \sigma = A_5 \sigma = 0, \end{cases}$$

sono completi. All'uopo si formino quelle conseguenze delle (67) che occorrono a dimostrare la completezza dei sistemi (69); si esprima poi che le quadriche associate alle conseguenze ottenute sono combinazioni lineari delle quadriche associate alle (67) e dell'unica quadrica associata alla (68). Si vedrà così che in quelle combinazioni di quadriche quella associata alla (68) non può figurare e perciò si potrà ragionare sulle predette conseguenze come se la (68) non ci fosse. Assumendo poi come nuovi parametri

$$\sigma_1 = \sigma_1(\tau), \quad \sigma_2 = \sigma_2(\tau), \quad \sigma_3 = \sigma_3(\tau),$$



tre soluzioni indipendenti del primo dei sistemi (69) e

$$\sigma_4 = \sigma_4(\tau), \quad \sigma_5 = \sigma_5(\tau),$$

due soluzioni indipendenti del secondo sistema (69), le (67) e la (68) diventano

$$(70) \quad \begin{cases} x^{(11)} \oslash x^{(12)} \oslash x^{(13)} \oslash x^{(22)} \oslash x^{(23)} \oslash x^{(33)} \oslash 0, \\ x^{(44)} \oslash x^{(45)} \oslash x^{(55)} \oslash 0, \\ \sigma_{13}x^{(13)} + \sigma_{14}x^{(14)} + \sigma_{15}x^{(15)} + \sigma_{23}x^{(23)} + \sigma_{24}x^{(24)} + \sigma_{25}x^{(25)} \oslash 0. \end{cases}$$

Si verifica subito, formando le derivate terze che i sistemi nelle due prime righe di (70) sono rispettivamente tali che le derivate seconde sono combinazioni lineari di  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x$  soltanto e di  $x^{(4)}, x^{(5)}, x$  soltanto. La  $V_5$  è dunque attualmente luogo di  $\infty^3 S_2$  e di  $\infty^2 S_3$  (come la  $V_5^{10}$  di C. SEGREGÈ); se si esamina il ragionamento che conduce il TERRACINI a dimostrare che la  $V_5$  soddisfacente a tutte e sole le (67) è la  $V_5^{10}$  di  $S_{11}$ , si può concludere che invece la nostra  $V_5$  sta in  $S_{10}$ . Consideriamo poi la  $V_5$  definita dalle

$$y = A\tau_6(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5) + x,$$

dove  $A$  è un punto fisso ed  $x$  è il punto variabile sulla nostra  $V_5$ , mentre  $\tau_6(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)$  soddisfa alle equazioni del sistema (67) e soltanto a quelle. Si vede subito che il punto  $y$  descrive una  $V_5^{10}$  di C. SEGREGÈ; concludiamo perciò che la nostra  $V_5$  è una proiezione di quella varietà in  $S_{10}$ .

Ragionamenti analoghi a quelli svolti sopra permettono di dimostrare la seguente proposizione, che completa in un certo senso una proposizione del TERRACINI.

*Una  $V_p$ , con  $k = p + q$  ( $p, q > 1$ ), che soddisfa ad un sistema di equazioni di Laplace tale che il relativo sistema di quadriche associate ha per sistema apolare duale il sistema delle quadriche di  $S_{k-1}$  che passano per uno  $S_{p-1}$  e per uno  $S_{q-1}$  fra loro sghembi, oppure un sistema contenuto in quello (di dimensione  $k-1$ , almeno) è la  $V_{p+q}$  di  $S_{p+q}$  di C. Segre oppure una proiezione di quella varietà in uno spazio di dimensione  $2k$  almeno.*

Nel primo caso si sa che le equazioni l.i. del sistema sono in numero di  $\frac{1}{2}p(p+1) + \frac{1}{2}q(q+1) = d$ ; nel secondo quel numero è  $d + \alpha$  con  $0 < \alpha \leq pq - k$ .

Dobbiamo ora esaminare (c) del principio di questo n. Il sistema contiene attualmente 11 equazioni l.i. che si scrivono come segue:

$$(71) \quad \begin{cases} A_i A_i x \oslash 0, & (i = 1, 2, 3, 4, 5), \\ A_l A_m x \oslash 0, & (l, m = 2, 3), \\ A_h A_k x \oslash 0, & (l, m = 4, 5), \end{cases}$$

Dimostriamo che i sistemi

$$(72) \quad \begin{cases} A_1\sigma = A_2\sigma = A_3\sigma = 0, \\ A_1\sigma = A_4\sigma = A_5\sigma = 0, \end{cases}$$

sono completi. All'uopo osserviamo che le equazioni (71) contengono il gruppo di 6 equazioni

$$(71') \quad A_i A_j x \approx 0, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

e anche il gruppo, pure di 6 equazioni <sup>(10)</sup>,

$$(71'') \quad A_i A_j x \approx 0, \quad (i, j = 1, 4, 5).$$

Formiamo le conseguenze delle (71') allo stesso modo che per le equazioni della seconda riga di (67), e così pure per le (71''). Considerando le quadriche associate a quelle conseguenze, che debbono essere combinazioni lineari delle quadriche associate alle (71), si vede subito allora che sono soddisfatte le condizioni di completezza dei sistemi. Assumendo i nuovi parametri

$$\sigma_1 = \sigma_1(\tau), \quad \sigma_2 = \sigma_2(\tau),$$

soluzioni del primo sistema (72),

$$\sigma_3 = \sigma_3(\tau), \quad \sigma_4 = \sigma_4(\tau),$$

soluzioni del secondo sistema (72) e  $\sigma_5 = \tau_5$ , le (71) diventano:

$$(73) \quad \begin{cases} x^{(55)} \approx x^{(54)} \approx x^{(53)} \approx x^{(52)} \approx x^{(51)} \approx 0, \\ x^{(33)} \approx x^{(34)} \approx x^{(44)} \approx 0, \\ x^{(11)} \approx x^{(12)} \approx x^{(22)} \approx 0. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che le equazioni della prima riga costituiscono un sistema chiuso e pertanto la nostra  $V_5$  è un  $S_0$ -cono. La forma delle altre 6 equazioni (73) mostra poi che la  $V_5$  è un  $S_0$ -cono proiettante una  $V_4^6$  dell' $S_8$  di C. SEGRE.

Anche il precedente risultato può venir convenientemente esteso.

<sup>(10)</sup> Avente in comune l'equazione  $A_1 A_1 x \approx 0$  col primo gruppo.

10. — L'ultimo tipo di  $V_5$  che ci rimane da esaminare è quello delle  $V_5$  che soddisfano a 10 equazioni di LAPLACE l.i. (e la cui  $W$  ha dimensione 9), quelle equazioni essendo tali che il sistema delle quadriche associate ammette per sistema apolare duale un sistema  $\infty^4$  di quadriche contenente il sistema  $\infty^3$  delle quadriche per due  $S_2$  (non di  $S_3$ ). Conviene distinguere i seguenti casi:

(a) La generica quadrica del sistema  $\infty^4$  non passa per il punto comune ai due  $S_2$ .

b) Tutte le quadriche del sistema passano per il punto comune ai due  $S_2$ , ma una quadrica generica non passa per nessuno degli  $S_2$ .

(c) Tutte le quadriche del sistema passano per uno (solo) degli  $S_2$ .

Si formeranno, come nei casi già visti, i sistemi di equazioni di LAPLACE relativi ai vari casi e conviene distinguere, nel caso (a), sei sottocasi a seconda che le due coniche sezioni della generica quadrica del sistema con i due  $S_2$  sono irriducibili, spezzate in 2 rette distinte, o rette doppie; nel caso (b) si distinguono nove sottocasi, analogamente a quanto s'è fatto per (a), ma distinguendo ancora il caso in cui il punto comune ai due  $S_2$  è semplice o doppio per le coniche sezioni; infine nel caso (c) si hanno tre sottocasi. Non svolgeremo dettagliatamente i calcoli relativi a tutti i diciannove sottocasi e ci limiteremo a considerare:

1) Il caso (a) nell'ipotesi di due coniche irriducibili;

2) il caso (b) nella stessa ipotesi.

Per tutti gli altri casi si procede in modo perfettamente analogo a quello che esporremo; daremo in ultimo i risultati relativi. Per 1) le 10 equazioni l.i. a cui soddisfa la  $V_5$  si scrivono:

$$(74) \quad \begin{cases} A_i A_j x \infty 0, \\ A_i A_i x + \alpha_i A_1 A_1 x \infty 0, \end{cases}$$

per  $i \neq j = 1, 2, 3$ , ed  $i = 2, 3$  e poi  $i \neq j = 1, 4, 5$  ed  $i = 4, 5$ . Come per il sistema (71) si prova che i sistemi (72) sono completi <sup>(11)</sup> e facendo il cambiamento di parametri si perviene al sistema:

$$(75) \quad \begin{cases} x^{(15)} \infty 0, & x^{(35)} \infty 0, \\ x^{(25)} \infty 0, & x^{(45)} \infty 0, \\ x^{(ij)} + q_{ij} x^{(55)} \infty 0, & (i, j = 3, 4), \\ x^{(hk)} + q_{hk} x^{(55)} \infty 0, & (h, k = 1, 2), \end{cases}$$

<sup>(11)</sup> Si veda anche TERRACINI, loc. cit. in <sup>(2)</sup>, Nota III, pag. 12.

le  $q_{ij}$ , come pure le  $q_{hk}$  essendo non tutte nulle. Formando le derivate terze in tutti i modi e confrontando si vede che (75) essendo chiuso deve ridursi alla forma seguente:

$$(75') \quad \begin{cases} x^{(5i)} = a_{5i}x^{(5)}, & (i=3, 4), \\ x^{(ij)} + q_{ij}x^{(55)} = a_{ij}x^{(3)} + b_{ij}x^{(4)} + c_{ij}x^{(5)} + d_{ij}x, & (i, j=3, 4) \end{cases}$$

con altre cinque analoghe per  $i, j=1, 2$ .

Il sistema contiene dunque le quattro equazioni

$$(75'') \quad x^{(5i)} = a_{5i}x^{(5)}, \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

dalle quali discende <sup>(12)</sup> che sulla nostra  $V_5$ , le  $V_4$ ,  $\sigma_5 = \text{costante}$ , sono tali che gli  $S_5$  tangenti alla  $V_5$  nei punti di una di quelle  $V_4$  passano per il punto  $X = x^{(5)}$ . Derivando rispetto a  $\sigma_5$  le 6 equazioni fra le (75) che contengono  $x^{(55)}$  e sostituendo alle derivate terze le loro espressioni ricavate dalle (75''), eliminando poi fra le relazioni ottenute  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x$ , si ottiene una relazione del tipo

$$\lambda x^{(555)} + \mu x^{(55)} + \nu x^{(5)} = 0,$$

che, insieme con le (75''), mostra che il punto  $X$  descrive una retta  $r$  al variare dei parametri e che le linee  $\sigma_5$  della  $V_5$  sono curve piane <sup>(13)</sup> i cui piani passano per  $r$ ; la  $V_5$  è poi, come si vede subito, proiettata secondo una  $V_6'$  dalla retta  $r$ .

Consideriamo le  $\infty^2 V_3'$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  costanti, e le  $\infty^2 V_3''$ ,  $\sigma_3$  e  $\sigma_4$  costanti, tracciate sulla  $V_5$ ; quelle varietà soddisfano a cinque equazioni di LAPLACE l.i. (75') la cui forma assicura ch'esse stanno in  $S_4$  (non sono cioè  $\infty^1$  di  $S_2$  sviluppabili ordinarie). Si vede facilmente che i due sistemi  $\infty^2$  di  $S_4$  formano le  $V_6'$  di cui s'è detto prima, gli  $S_4$  passando per  $r$ ; due  $S_4$  di sistema diverso si segano lungo un piano per  $r$ , contenente una linea  $\sigma_5$  di  $V_5$ , mentre invece due  $S_4$  dello stesso sistema hanno a comune soltanto  $r$ . Semplici ragionamenti permettono infine di concludere che la  $V_6'$  è un  $S_1$ -cono proiettante la  $V_4^e$  di  $S_3$  di C. SEGRE. Si conclude che: *la  $V_5$  è attualmente luogo di due sistemi  $\infty^2$  di  $V_3$  situate negli  $S_4$  di un  $S_1$ -cono proiettante la  $V_4^e$  di C. SEGRE.*

Passiamo ora a considerare l'eventualità 2) di prima. Si è condotti al sistema

$$(76) \quad \begin{cases} A_i A_i x \simeq 0, & (i=1, 2, 3, 4, 5), \\ A_h A_k x + \alpha_{hk} A_1 A_2 x \simeq 0, \end{cases}$$

<sup>(12)</sup> Si veda: BOMPIANI, pag. 110 del lavoro citato nella annotazione <sup>(22)</sup> di pag. 444 della Parte I del presente lavoro.

<sup>(13)</sup> Escluse le rette.

per  $h = 1, k = 3, 4, 5$  e poi  $h = 2, k = 3$  ed  $h = 4, k = 5$ . Come per il sistema (74), ci si riduce al sistema

$$(76') \quad \begin{cases} x^{(55)} \simeq 0, \\ x^{(ij)} + \varrho_{ij}x^{(45)} \simeq 0, & (i, j = 3, 4 \text{ ed } i, j = 1, 2), \\ x^{(l5)} + \varrho_{l5}x^{(45)} \simeq 0, & (l = 1, 2, 3), \end{cases}$$

le  $\varrho_{ij}$  essendo non tutte nulle, come pure le  $\varrho_{l5}$ .

Il confronto delle derivate terze permette anche ora di constatare che la prima equazione (76') contiene solo  $x^{(55)}, x^{(5)}$  ed  $x$  e si vede così che le linee  $\sigma_5$  sono ora rette. Con una opportuna scelta del parametro  $\sigma_5$  si può ridurre quella prima equazione ad  $x^{(55)} = 0$ , confrontando poi ancora le derivate terze, calcolate in tutti i modi possibili dalle (76') si constata che le equazioni della terza riga di (76') si riducono alle:

$$(77) \quad \begin{cases} x^{(15)} + \varrho_{15}x^{(45)} = a_1x^{(5)} + l_1x, \\ x^{(25)} + \varrho_{25}x^{(45)} = a_2x^{(5)} + l_2x, \\ x^{(35)} + \varrho_{35}x^{(45)} = a_3x^{(5)} + l_3x. \end{cases}$$

Considerando poi il punto  $X = x^{(5)}$  si vede facilmente ch'esso descrive una curva al variare dei parametri e poi, approfittando opportunamente delle (77) e (76') si vede che quella curva è una retta  $r$ . Se si considerano poi le  $V'_3, \sigma_1$  e  $\sigma_2$  costanti, e le  $V''_3, \sigma_3$  e  $\sigma_4$  costanti, segue dalle (76') che si tratta di  $V_3$  rigate appartenenti allo  $S_4$ , le cui generatrici si appoggiano ad  $r$ . Infine si conclude, ragionando analogamente a quanto s'è fatto per il caso 1), che: *la  $V_5$  è ora formata da due sistemi  $\infty^2$  di  $V_3$  rigate situate negli  $S_4$  di un  $S_1$ -cono proiettate la  $V_4^6$  di  $C$ . Segre.*

Descriviamo ora i tipi di  $V_5$  che si ottengono in corrispondenza ai vari sottocasi dei quali s'è detto in principio. Nel caso (a) e nei cinque sottocasi in cui non entrambe le coniche sezioni sono rette doppie si ottengono sempre  $V_5$  del tipo di quella descritta prima in 1), le  $V_3$  dei due sistemi possono però essere  $V_3$  rigate o anche  $S_0$ -coni o  $S_1$ -coni. Se le due coniche sezioni sono rette doppie si ottiene invece la  $V_5$ :

$$(78) \quad x = X + A(\sigma_5),$$

dove  $X$  è un punto che descrive la  $V_4^6$  di  $S_3$  di  $C$ . SEGRE. Si tratta di una  $V_5$  luogo di  $\infty^1 V_4^6$  e tale che le tangenti alle linee  $\sigma_5$  nei punti di una  $V_4^6$  concorrono, mentre gli  $S_4$  tangenti alle  $V_4^6$  nei punti di una linea  $\sigma_5$  passano per

uno  $S_3$ . La (78) è anche luogo di due sistemi di  $V_3$ ,  $S_1$ -coni con gli  $S_1$ -vertici situati nei piani di una  $V_4^6$ .

Nel caso (b) si ottengono varietà analoghe a quelle considerate in 2), con le  $V_3'$  e  $V_3''$  eventualmente  $S_0$ -coni o  $S_1$ -coni ed anche, se le due coniche sezioni hanno entrambe punto doppio nel punto comune ai due  $S_2$ , varietà dei tipi considerati nel n. 1 (14); infatti il sistema delle quadriche associate ha per sistema apolare duale un sistema di coni col vertice in comune.

Nel caso (c) si ottengono  $V_5$  formate da un sistema di  $\infty^2 S_3$  ed un sistema  $\infty^2$  di  $V_3$  dello  $S_4$  (ancora situati nei due sistemi di  $S_4$  di un  $S_1$ -cono proiettante la  $V_4^6$  di C. SEGRE) oppure varietà rigate sviluppabili e coni, dei tipi considerati nel n. 1.

**11.** - Raccogliamo nel seguente enunciato i risultati conseguiti per le  $V_5$ :

*Se una  $V_5$  rappresenta  $d$  equazioni di Laplace l.i. con  $5 \leq d \leq 10$ , (e perciò sta in  $S_r$  con  $r \geq 10$ ) e tuttavia è tale che i suoi  $S_5$  tangenti ricoprono una varietà di dimensione 9, essa è:*

(a) *Un cono proiettante da un punto una  $V_4$  che non rappresenta alcuna equazione di Laplace, oppure ne rappresenta  $\delta$ , con  $1 \leq \delta \leq 5$ .*

(b) *Una sviluppabile con curva direttrice, generica, oppure soddisfacente a  $\delta$  (con  $1 \leq \delta \leq 2$ ) equazioni di Laplace l.i. oltre quelle (in numero di 8) che assicurano l'esistenza di una curva direttrice.*

(c) *Una sviluppabile con superficie direttrice o una  $V_5$  luogo di  $S_3$  tangenti ad una superficie.*

(d) *Una  $V_5$  luogo di  $\infty^3$  superficie situate negli  $S_3$  di un  $S_2$ -cono proiettante una  $V_3$ , generica, oppure soddisfacente ad una o due equazioni di Laplace l.i., le superficie degli  $S_3$  potendo essere non sviluppabili o sviluppabili.*

(e)  *$V_5$  luogo di  $\infty^3$  superficie, non sviluppabili o sviluppabili, situate negli  $S_3$  di un  $S_1$ -cono proiettante una  $V_4$  rigata sviluppabile che soddisfa a 6 equazioni di Laplace.*

(f)  *$V_5$  luogo di  $\infty^2 V_3$  situate negli  $S_5$  di un  $S_4$ -cono generico, escluse le  $V_3$  sviluppabili ordinarie.*

(g)  *$V_5$  luogo di  $\infty^2 V_3$ ,  $\infty^1$  di piani sviluppabili ordinarie, situate negli  $S_5$  di un  $S_4$ -cono generico.*

(h)  *$V_5$  luogo di  $\infty^2 V_3$ , situate negli  $S_4$  di un  $S_1$ -cono proiettante una  $V_4$  luogo di  $\infty^2$  piani e soddisfacente a 6 equazioni di Laplace, oppure negli  $S_4$  di una  $V_6'$   $\infty^2$  di  $S_4$  con  $S_7$  tangente fisso lungo  $S_4$ .*

(i)  *$V_5$  luogo di  $\infty^3 S_2$  con  $S_6$  tangente fisso lungo ogni  $S_2$ .*

(l)  *$V_5$  luogo di  $\infty^2 S_3$  con  $S_7$  tangente fisso lungo ogni  $S_3$ .*

(m)  *$V_5^{10}$  di  $S_{11}$  di C. Segre e sua proiezione in  $S_{10}$ .*

(14) Tali varietà hanno però in parte i caratteri delle varietà ottenute nel presente n. 1.

(n)  $V_5$  formate da due sistemi  $\infty^2$  di  $V_3$  situate negli  $S_3$  di un  $S_1$ -cono proiettante la  $V_4^6$  di C. Segre, le  $V_3$  potendo essere rigate o anche  $S_0$ -coni o  $S_1$ -coni.

(o)  $V_5$  formate da  $\infty^2$   $S_3$  e da  $\infty^2$   $V_3$  situati negli  $S_3$  di un  $S_1$ -cono proiettante la  $V_4^6$  di C. Segre.

(p)  $V_5$  luogo di  $\infty^1$   $V_4^6$  di C. Segre, tali che le tangenti alle linee di un certo sistema, nei punti di una  $V_4^6$ , concorrono in un punto.

