VITTORIO EMANUELE GALAFASSI (*)

Sulle falde delle rigate astratte reali.

1. – Da tempo è noto il teorema di HARNACK il quale afferma che il numero k dei circuiti di una curva algebrica reale di genere p soggiace alla limitazione:

$$k \leqslant p + 1 \ , \tag{1}$$

e che per ogni genere p, tale limite superiore è raggiunto (1).

L'analoga questione relativa al numero m delle falde di una superficie algebrica reale è invece tuttora aperta (2).

La più larga estensione alle superficie della limitazione (1) dovrebbe condurre ad una limitazione del tipo:

$$m \leqslant J \ , \tag{2}$$

dove J sia un invariante birazionale *assoluto* della superficie nell'ambito della variabilità complessa.

Ma l'esempio offerto dalle superficie razionali, che nel senso assoluto (e nella variabilità complessa) formano una sola classe, subito avverte come ad una estensione di tale indole non si possa pervenire.

Invero, la teoria delle superficie razionali reali, elaborata dal COMESSATTI in modo che può giudicarsi definitivo e completo, permette in particolare di affermare l'esistenza di superficie razionali reali con un numero di falde comunque elevato (3).

(*) Indirizzo: Via Volta, 9; Pavia (Italia).

(1) Cfr. A. HARNACK, *Über die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven*, Math. Ann. **10** 189-198 (1876). Sotto l'aspetto birazionale sono da ricordare i classici lavori di F. KLEIN; ad es.: *Über die Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigem Geischlechte* ecc., Math. Ann. **42** 1-29 (1892); *Riemannsche Flächen*, Göttingen 1894.

(2) Per quanto è noto sull'argomento e per la relativa bibliografia, cfr. A. COMESSATTI, *Problemi di realtà per le superficie e varietà algebriche*, R. Acc. Italia (IX Convegno A. Volta Atti), Roma 1943, pp. 15-41. In seguito si faranno più specifici rinvî.

(3) Cfr. A. COMESSATTI, *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale*, Math. Ann. **73**, 1-72 (1912); *Sulla connessione delle superficie razionali reali*, Ann. Mat. Pura Appl. (3) **23**, 215-284 (1915).

Tale circostanza si presenta anche in altri casi.

Così, nel presente lavoro, si giunge a stabilire, per ogni genere p, l'esistenza di rigate astratte [4] (irriducibili) reali di genere p dotate di un numero di falde comunque elevato.

Dapprima, per $p = 0$, si riottiene (n. 4) il risultato noto testè richiamato con un processo che consente la estensione ad ogni valore del genere (n. 6).

Si rivelano utili alcune premesse sulle curve razionali *graduate* (n. 2) e sopra la costruzione nello spazio ordinario di modelli di rigate astratte (nei quali le generatrici sono coniche), per ogni assegnato valore del genere p (nn. 3 e 5).

Il numero m delle falde di una rigata astratta reale di genere p può peraltro limitarsi superiormente facendo intervenire un invariante relativo complesso della superficie. Ad es., detto I l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE, sotto opportune ipotesi semplificatrici (n. 7), si ottiene (n. 8):

$$m \leqslant \begin{cases} p+1, & \text{se } I+4p \leqslant 3, \\ \left[\dfrac{I}{2}\right]+3p, & \text{se } I+4p \geqslant 2, \end{cases} \tag{3}$$

risultato che, per $p = 0$, trova riscontro (n. 9) nella richiamata teoria delle superficie razionali reali.

2. – In S_r, ed al di fuori di ogni questione di realità, sia C una curva razionale. Associando a tre suoi punti distinti (cioè origini di rami distinti) tre distinti ma arbitrarî valori (ad es., ∞, 0, 1) di un parametro complesso λ, si introduce sulla curva un riferimento proiettivo mediante il quale ai punti della curva vengono biunivocamente associati i valori di λ.

Una curva razionale sulla quale sia fissato un riferimento nel modo detto, si dirà *curva razionale graduata* [5]; ed ovviamente sopra una stessa curva razionale possono introdursi ∞^3 *graduazioni* in corrispondenza alle altrettante proiettività sulla curva, ed i parametri rispondenti a due graduazioni saranno legati da una equazione bilineare.

Dette x_i ($i = 0, 1, \ldots, r$) le coordinate omogenee in un riferimento proiet-

---

[4] Seguendo una denominazione introdotta dal SEVERI, dicesi *rigata astratta* ogni superficie algebrica che possiede un fascio di curve razionali (e queste diconsi *generatrici* della rigata). Cfr. F. SEVERI, *Sulla classificazione delle rigate algebriche*, Univ. Roma e Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) **2**, 1-32 (1941). Cfr. anche: A. MARONI, *Sulle rigate astratte*, Ibidem **7**, 236-242 (1948).

[5] Si può in proposito ricordare il trattato: E. A. WEISS, *Punktreihengeometrie*, Leipzig und Berlin 1939. Ivi *Punktreihe* equivale a *retta graduata*.

tivo in S_r, una curva C razionale graduata potrà rappresentarsi con le equazioni:

$$\varrho x_i = f_i(\lambda)\,, \qquad (i = 0, 1, \ldots, r), \tag{4}$$

ove $f_i(\lambda)$ sono polinomî nel parametro λ il quale, fornendo la graduazione della curva, è variabile essenziale. L'ordine n della curva C è il massimo grado dei polinomî $f_i(\lambda)$, nei quali si penseranno soppressi gli eventuali fattori comuni.

Subito si accerta che il passaggio per un punto assegnato con graduazione ivi assegnata offre alle curve razionali graduate di ordine non superiore ad n precisamente r *condizioni lineari indipendenti* (6).

Assumendo n abbastanza elevato, è sempre possibile introdurre in S_r una curva razionale graduata la quale passi per h punti genericamente fissati in S_r ed in essi abbia ordinatamente h *distinti* prefissati valori della graduazione (7).

Ma di più, trattandosi di condizioni lineari, ove ci si muova nella variabilità reale, *non hanno luogo discussioni di realità.*

Le considerazioni svolte si intenderanno senz'altro estese agli enti ∞^1 razionali, immersi in ∞^r lineari.

3. – Siamo ora in grado di costruire, ad es. in S_3, un modello di rigata astratta razionale le cui generatrici siano coniche fra le quali almeno h degeneri, essendo *h un intero comunque prefissato.*

In S_3 si assuma un sistema Σ lineare ∞^3 di quadriche, ed in questo genericamente h quadriche

$$E_1\,, \quad E_2\,, \quad \ldots, \quad E_h\,.$$

Ad esse si associno ordinatamente i piani

$$E_1^*\,, \quad E_2^*\,, \quad \ldots, \quad E_h^*$$

a quelle risp. tangenti e del resto generici; e si indichi con Σ^* il sistema (lineare, ∞^3) dei piani di S_3.

---

(6) Invero sostituendo nelle (4) alle x_i le coordinate y_i del punto assegnato ed a λ l'assegnato valore μ, indi eliminando ϱ, se ad es. $y_0 \neq 0$, si hanno le r equazioni:

$$y_i f_0(\mu) = y_0 f_i(\mu)\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

lineari omogenee negli $(r+1)(n+1)$ coefficienti omogenei dei polinomî f_i, e si tratta certamente di equazioni indipendenti perchè in ciascuna di esse compaiono incognite che non figurano in nessun'altra.

(7) Basta che: $rh \leqslant (n+1)(r+1) - 1$, cioè $n \geqslant \dfrac{r(h-1)}{r+1}$. Cfr. (6). Di più la genericità dei punti assegnati (e la possibilità di scelta per n) permette di evitare che al punto corrente sulla curva assunta siano associati (LÜROTH) più valori del parametro.

In Σ si introduca un sistema $\Gamma\infty^1$ razionale graduato contenente le E_j, in Σ^* un fascio gobbo razionale graduato Γ^* contenente gli E_j^*, in modo che le graduazioni che in questo competono ai piani E_j^* siano risp. eguali alle graduazioni che in Γ competono alle quadriche E_j. Fra Γ e Γ^* si ha il riferimento (per $0 \leqslant h < 3$, un riferimento) per eguaglianza di graduazioni nel quale ordinatamente si corrispondono le quadriche E_j ed i piani E_j^*.

Le coniche intersezione di quadriche di Γ e piani di Γ^* così corrispondenti formano un fascio Φ_0 razionale di coniche nel quale è fissata una graduazione in uniformità a quella assegnata in Γ (od in Γ^*).

Tale fascio graduato Φ_0 contiene le coniche degeneri $\varepsilon_j \equiv E_j \cdot E_j^*$, colle graduazioni risp. eguali a quelle che competono ad es. alle E_j in Γ. I punti delle coniche di Φ_0 costituiscono il richiesto modello F_0 di rigata astratta razionale.

4. – Passando a questioni di realità, supposto S_3 reale, si assuma Σ reale anzi in modo che contenga quadriche (reali) a punti ellittici, e fra queste si assumano le E_j. Siano poi E_j^* piani tangenti reali. Introdotte graduazioni reali per le E_j (quind'anche per gli E_j^*), risultano reali i sistemi razionali Γ e Γ^*, anzi ad elementi reali, e riferiti in una corrispondenza reale. Risulterà così reale il fascio Φ_0 e la rigata astratta razionale F_0.

La parte reale di questa *consta di un numero di falde non inferiore ad* $\left[\dfrac{h+1}{2}\right]$.

Invero, in condizioni generiche, entro il continuo reale del fascio Φ_0 ciascuna conica reale la quale, come ciascuna delle h coniche ε_j, abbia parte reale ridotta ad un punto, si presenta come elemento di separazione fra coniche (reali non degeneri) prive di parte reale e coniche dotate di parte reale. Il numero $\nu \geqslant h$ delle coniche reali la cui parte reale riducesi ad un sol punto eguaglia perciò il doppio del numero m delle falde di F_0, onde si ha:

$$m = \frac{\nu}{2} \geqslant \left[\frac{h+1}{2}\right],$$

in quanto, se h è dispari, il numero pari ν sarà $\geqslant h+1$.

Poichè h può assumersi arbitrariamente elevato, ne consegue *l'esistenza di rigate astratte razionali reali F_0 con un numero di falde comunque elevato.*

5. – Si voglia ora estendere il risultato del n. precedente alle rigate astratte di genere p, comunque assegnato.

Ripresa perciò la trattazione del n. 3, per comodità di esposizione gioverà introdurre lo spazio σ (risp. σ^*) dei punti immagini delle quadriche di Σ (risp. dei piani di Σ^*).

In σ (risp. in σ^*) sia γ (risp. γ^*) la curva razionale graduata i cui punti siano le immagini delle quadriche di Γ (risp. dei piani di Γ^*), e fra γ e γ^* ancora si ponga il riferimento per eguaglianza di graduazione (traducendo in tal modo il riferimento esistente fra Γ e Γ^*).

Su γ si introduca una involuzione Ω (semplicemente infinita e d'ordine 2) e sia Λ la rigata razionale delle rette congiungenti le coppie di punti coniugati in Ω. Il riferimento posto tra le curve γ e γ^* introduce su quest'ultima una involuzione Ω^* e quindi (in σ^*) la rigata Λ^* delle rette congiungenti le coppie di punti coniugati in Ω^*.

Il riferimento tra γ e γ^* induce un riferimento proiettivo tra le coppie di Ω e Ω^* e quindi tra le generatrici di Λ e risp. di Λ^*. Ma è facile introdurre una corrispondenza birazionale tra le superficie Λ e Λ^*. Basta perciò fissare genericamente in σ (risp. in σ^*) un piano π (risp. π^*) e chiamare corrispondenti un elemento generico ad es. di Λ ed uno di Λ^* quando appartenendo a generatrici corrispondenti di più si corrispondano nella proiettività che fra esse si stabilisce facendo ordinatamente corrispondere al punto che giace su π ed ai due che giacciono su γ il punto che giace su π^* ed i due che giacciono su γ^* (corrispondenti risp. ai punti di γ nel riferimento intercedente fra le due curve).

È poi subito visto che la corrispondenza birazionale così posta tra le superficie Λ e Λ^* subordina fra le curve γ e γ^* (che si corrispondono) il riferimento inizialmente posto.

Su Λ si consideri ora la curva connessa composta dalla curva γ e da p sue corde genericamente assunte. Essa apparterrà ad una famiglia di curve (di Λ) del genere p. A ciascuna curva δ di detta famiglia è associata una curva δ^* di Λ^* birazionalmente riferita alla precedente.

In Σ (risp. in Σ^*) sia Δ (risp. Δ^*) il sistema ∞^1 avente per immagine δ (risp. δ^*). I sistemi Δ e Δ^* risultano biunivocamente riferiti, e le coniche intersezioni di elementi di Δ e risp. di Δ^* corrispondenti costituiscono le generatrici di una rigata astratta F_p di genere p, dello S_3.

6. – Passando a questioni di realità, ripresa la trattazione di n. 4, la si completi nel modo suggerito da n. 5.

Assunti reali gli spazi σ e σ^* (e riferiteli in modo reale ai sistemi Σ e Σ^* risp.), in tali spazi risulteranno reali le curve γ e γ^* (anzi a punti reali). Supposta poi reale la involuzione Ω, e quindi anche la Ω^*, risulteranno reali (anzi a generatrici reali) le rigate Λ e Λ^*, e reale sarà la corrispondenza birazionale posta fra esse, ove pure reali si suppongano i piani π e π^*.

Su Λ si assumano quindi le p generatrici reali in altrettante corde di γ ad appoggi immaginario-coniugati, e si sottoponga la curva connessa reale così introdotta a «piccola variazione», entro la famiglia reale cui si attribuisce, ottenendo una curva reale irriducibile δ, di genere p.

La rigata astratta F_p che col processo indicato al n. precedente si introduce in S_3 risulta reale.

Anzi la parte reale di F_p deducesi, in S_3, per «piccola variazione» topologica dalle parti reali della superficie F_0 costruita al n. 4 e delle p superficie cubiche reali ciascuna costituita dalle coniche intersezioni delle quadriche del fascio avente per immagine una delle generatrici reali assunte su Λ con i piani corrispondenti di un fascio proiettivamente riferito al precedente. Siccome F_0 e le p superficie cubiche di cui dianzi non hanno generatrici reali comuni (su Λ la curva γ e le p generatrici assunte non hanno mutue intersezioni reali), la piccola variazione deduce dalle falde della parte reale di F_0 e da quelle delle superficie cubiche complessivamente altrettante falde della parte reale di F_p. Si può perciò affermare:

Per ogni genere p comunque prefissato, esistono rigate astratte reali di genere p, dotate di un numero di falde comunque elevato.

7. – Nell'ambito della variabilità complessa, ma dal punto di vista *relativo*, accanto al genere p della rigata astratta, potranno introdursi altri invarianti.

L'esistenza di singolarità *proprie* (nel noto senso del SEVERI) in un modello di rigata astratta, comporta l'esistenza di punti comuni a tutte le generatrici, e tale affermazione per $p > 0$ si inverte. Qui tali circostanze si escluderanno e le eventuali singolarità di un modello saranno pertanto *improprie* (8).

Le rigate astratte di genere $p = 0$ richiederebbero un esame particolare nel quale pure è da tener presente la circostanza per cui esse, come superficie razionali, possono in più modi riguardarsi come rigate astratte; ma non occorre esaminare qui nella sua intierezza il caso $p = 0$ atteso che lo studio delle superficie razionali (anche sotto l'aspetto della realità) può ritenersi pressochè esaurito.

Dopo di ciò si prenda in considerazione il numero D delle generatrici spezzate le quali, per evitare complicazioni meramente formali, si supporranno ciascuna spezzata in due componenti, necessariamente razionali ed unisecantesi. Inoltre nel gruppo delle generatrici spezzate ciascuna sia da contarsi una sola volta (9).

I caratteri p e D, sotto le ipotesi semplificatrici ammesse, esauriscono la classificazione qualitativa, almeno in un primo esame.

Con essi giova peraltro introdurre l'invariante I di ZEUTHEN-SEGRE della

(8) Sono così esclusi i coni. Per i coni astratti, cfr. SEVERI (4), nn. 14-15.

(9) Ricorrendo alla varietà dei punti immagini delle curve razionali (dello spazio ambiente) aventi lo stesso ordine delle generatrici, con ciò si esclude che la curva immagine del fascio di queste sia tangente alla varietà delle immagini delle curve spezzate, o passi per punti multipli di questa. E si osserverà che ciò già implica che ogni generatrice spezzata consti di due sole componenti.

superficie, il quale si esprime mediante p e D con la formula:

$$I = D - 4p , \tag{5}$$

come subito si ottiene utilizzando il fascio (di genere p) delle generatrici in virtù di un noto risultato di CASTELNUOVO ed ENRIQUES ([10]), e pur tenendo presente che, sotto le ipotesi semplificatrici ammesse, fra i punti doppi del fascio non vanno annoverati i punti i quali, in un particolare modello proiettivo, risultassero eventualmente doppi per una generatrice irriducibile.

8. – Passando a questioni di realità, supposta reale la rigata astratta F_p ed anche il fascio Φ_p delle generatrici ([11]), sarà intanto da considerare il numero k dei «circuiti» di Φ_p, vale a dire dei circuiti della curva reale di genere p a cui può assimilarsi il fascio Φ_p pensato come ente ∞^1 di generatrici. E, per il teorema di HARNACK (cfr. n. 1), sarà:

$$0 \leqslant k \leqslant p + 1 . \tag{6}$$

Se $k > 0$, per ciascun circuito ω_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sarà da considerare il numero $c_i \geqslant 0$ delle generatrici (reali) spezzate la cui parte reale riducesi ad un punto (comune alle due componenti immaginario-coniugate). E si avrà:

$$\sum_1^c{}_i\, c_i \leqslant D . \tag{7}$$

Le parti reali delle generatrici (reali) del circuito ω_i costituiranno $m_i \geqslant 0$ falde della rigata astratta.

Entro il continuo (reale) del circuito ω_i ciascuna generatrice la cui parte reale è ridotta ad un punto si presenterà [cfr. n. 7, ([9])] come elemento di separazione fra generatrici dotate e risp. prive di parte reale. Così sarà:

$$c_i \equiv 0 \pmod{2} , \tag{8}$$

e la (7) potrà sostituirsi con la:

$$\sum_1^c{}_i\, c_i \leqslant 2 \left[\frac{D}{2}\right] ; \tag{7'}$$

ma di più, se $c_i \neq 0$, si avrà:

$$m_i = \frac{1}{2} c_i , \tag{9}$$

([10]) Cfr. G. CASTELNUOVO e F. ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Ann. Mat. Pura Appl. (3) 6, 165-225 (1901).

([11]) Per $p > 0$ se F_p è reale lo è pure Φ_p, in quanto unico. Per $p = 0$ invece la superficie razionale reale F_0 può non possedere fasci reali di curve. Cfr. A. COMESSATTI, primo lavoro citato in ([3]), n. 39. Pertanto qui si considerano soltanto F_0 appartenenti a quella che tale Autore indica come Iª famiglia, e precisamente le F_0 che posseggono un fascio Φ_0 privo di punti-base (cfr. n. 7).

mentre, se $c_i = 0$, potrà tanto essere $m_i = 0$ [ancora in accordo con la (9)] quanto $m_i = 1$, a seconda che tutte le generatrici reali del circuito ω_i siano prive o risp. dotate di parte reale.

Indicato con k' il numero dei circuiti per i quali vale la (9), e supposti siano $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k'}$, a ciascuno dei $k - k'$ rimanenti si associerà una falda della rigata; il numero totale m delle falde di questa sarà pertanto:

$$m = \sum_{1}^{k'} {}_i \, m_i + k - k' = \frac{1}{2} \sum_{1}^{k'} {}_i \, c_i + k - k' \, .$$

Se $k' = 0$ (onde necessariamente ogni $c_i = 0$) sarà $m = k$, e per la (6) quindi:

$$m \leqslant p + 1 \; ; \tag{10}$$

se invece $k' \geqslant 1$, per la (6) e la (7') si avrà:

$$m \leqslant \left[\frac{D}{2}\right] + p \, , \tag{11}$$

in virtù della (5) equivalente alla:

$$m \leqslant \left[\frac{I}{2}\right] + 3p \, . \tag{11'}$$

Così, se $D \geqslant 4$ sarà da considerare la (11), mentre per $D \leqslant 1$ si dovrà tener presente la (10); per $D = 2$ oppure $D = 3$ sarà infine indifferente il ricorso all'una o all'altra delle due limitazioni, manifestamente equivalenti.

Si può pertanto concludere che, fissati comunque i caratteri p e D (ovvero p ed I), il numero m delle falde di una rigata astratta reale avente quei caratteri ammette una *limitazione superiore*. E questa anzi può esprimersi colla (3) di n. 1, come ben si accerta ricordando la (5).

9. – Alla trattazione del n. precedente intendiamo ora recare qualche complemento.

Si può intanto osservare che, se $D \geqslant 4$, affinchè la (11) valga come eguaglianza occorre e basta che siano verificate le seguenti circostanze:

1°) Sia $k = p + 1$, vale a dire l'ente algebrico ∞^1 reale delle generatrici abbia il massimo numero di circuiti.

2°) Sia $k' = 1$, vale a dire esista un solo circuito ω_1 contenente generatrici (in numero di c_1) la cui parte reale sia ridotta ad un punto.

3°) Sia $c_1 = 2\left[\frac{D}{2}\right]$, vale a dire tutte le generatrici spezzate della rigata siano reali e tutte (eccetto una, se D è dispari) abbiano parte reale ridotta ad un punto.

4°) Sia $m_i = 1$ $(i = 2, \ldots, p+1)$, vale a dire le generatrici dei rimanenti circuiti $\omega_2, \ldots, \omega_{p+1}$ siano tutte dotate di parte reale.

Supposto invece $D \leqslant 1$, affinchè la (10) valga come eguaglianza occorre e basta che sia $k = p + 1$ e che le generatrici dei circuiti ω_i $(i = 1, 2, \ldots, p+1)$ siano tutte dotate di parte reale $(m_i = 1)$.

Infine per $D = 2$ oppure $D = 3$, affinchè la (10) [o la equivalente (11)] valga come eguaglianza occorre e basta che colla $k = p + 1$, si verifichi una delle seguenti circostanze:

I) Non esistendo alcuna generatrice reale a parte reale ridotta ad un punto, le generatrici dei $p+1$ circuiti ω_i siano tutte dotate di parte reale.

II) Essendovi due generatrici reali a parte reale ridotta ad un punto, necessariamente appartenenti ad uno stesso circuito ω_1, i rimanenti ω_i siano intieramente costituiti di generatrici dotate di parte reale.

Si può anche osservare che, sempre nelle ipotesi semplificatrici ammesse, ove in un modello (reale) della rigata astratta le generatrici siano *di ordine dispari*, si ha senz'altro $c_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ perchè allora non potranno presentarsi generatrici (reali) spezzate in due componenti immaginario-coniugate e perciò del medesimo ordine. In tal caso tutte le generatrici reali sono dotate di parte reale: si avrà quindi, colla $k' = 0$, $m = k$ e sarà da tenere presente la limitazione (10).

Giova infine rilevare che per $D = 0$ oppure per $p = 0$ le limitazioni stabilite al n. precedente non possono sostituirsi certamente con altre più efficaci

Invero, per $D = 0$, nella (10) è accettabile il segno di eguaglianza, in quanto ad es. esistono rigate proiettive reali di genere p dotate di precisamente $p+1$ falde [12].

Per $p = 0$, risulta $D = I$, onde per $I = 0$ oppure $I = 1$ sarà:

$$m \leqslant 1, \tag{10*}$$

mentre in ogni altro caso

$$m \leqslant \left[\frac{I}{2}\right], \tag{11*}$$

ed è noto come nelle (10*), (11*) il limite superiore sia raggiungibile con opportune superficie razionali reali [13].

---

(12) Cfr. ad es. V. E. GALAFASSI, *Superficie algebriche reali dotate di falde pari di prima specie*, questa Rivista **2**, 115-121 (1951).

(13) Cfr. A. COMESSATTI, primo lavoro citato in (3). Cfr. anche (11).

Commentando i suoi risultati il COMESSATTI [cfr. (2), n. 6] scrive: « Così avviene che, nell'accezione, per dir così, canonica, *il problema di* HARNACK per le superficie razionali reali *non ammette una soluzione rigorosamente unitaria* ». Tale constatazione sembra debba estendersi al caso delle rigate astratte di un genere p comunque prefissato [sebbene per $p > 0$ intervenga la circostanza semplificatrice della unicità del fascio (irrazionale) di curve razionali]; dopo di che si apre la via alla posizione delle corrispondenti questioni esistenziali.