LAMBERTO CESARI (*)

Su un particolare processo di retrazione per superficie. (**)

1. – Sia J una regione di JORDAN semplice e chiusa del piano euclideo π dei punti $u=(u^1, u^2)$, sia E lo spazio euclideo dei punti $x=(x^1, x^2, x^3)$, sia $T=(T, J)$: $x = T(u)$, $u \in J$, una trasformazione continua, univoca, non necessariamente biunivoca. La trasformazione T definisce una superficie S di FRÉCHET e, sul contorno J^* di J, una curva continua chiusa C (non necessariamente semplice) che diremo contorno della superficie S e denoteremo con $C = \theta S = \theta T$. Denoteremo con $\|l, l'\|$ la distanza secondo FRÉCHET di due curve continue e chiuse l, l' di E, e con $L(S)$ l'area secondo LEBESGUE della superficie S. (Per queste e per altre notazioni si veda [**1**, a].) L'insieme $[S] = T(J) \subset E$ dei punti occupati dalla superficie S è limitato, chiuso, connesso e localmente connesso. Quando occorra supporremo che $[S]$ sia interamente contenuto nel cubo $(0, 0, 0; 1, 1, 1)$ di E. Denoteremo con $|u-v|$, $|x-y|$ la distanza euclidea di due punti $u, v \in \pi$, $x, y \in E$.

Sia $G = G(T, J)$ la collezione dei continui massimali $g \in J$ sui quali $T(u)$ è costante. Allora G è una collezione semicontinua superiormente (cfr. [**1**, b)]) ricoprente J di continui disgiunti $g \subset J$. Si dice che la trasformazione T è *aperta non degenere* se: α) per ogni $g \in G$ l'insieme $J - g$ è connesso; β) nessun continuo $g \in G$ ricopre interamente J^*. Si dice che T è *chiusa non degenere* se α) vale e se β') esiste un $g \in G$ ricoprente J^* ma non ricoprente J. Si dice che T è *di tipo A* (oppure è una trasformazione *base*) se α') per ogni $g \in G$ l'insieme $\pi - g$ è connesso [**1**, a, n. 9] (1). Denoteremo nel seguito con I^* e $\bar{I} = I + I^*$ la frontiera e la chiusura di un insieme I.

(*) Professore o. della Università di Bologna. Indirizzo: Via Castiglione 1, Bologna (Italia).

(**) Ricevuto il 20-VII-1951.

(1) Ad esempio le trasformazioni T_1: $x^1 = u^1$, $x^2 = u^2$, $x^3 = 0$, $u \in J$; T_2: $x^1 = \operatorname{sen} \pi\varrho \cos\theta$, $x^2 = \operatorname{sen} \pi\varrho \operatorname{sen}\theta$, $x^3 = \cos\pi\varrho$, $u \in J$, ove $J \equiv (0 \leqslant \varrho \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, $u^1 = \varrho\cos\theta$, $u^2 = \varrho \operatorname{sen}\theta$, sono rispettivamente aperta non degenere e chiusa non degenere. Le trasformazioni T_3: $x^1 = u^1$, $x^2 = 0$, $x^3 = 0$, $u \in J$; T_4: $x^1 = u^1$, $x^2 = u^1u^2$, $x^3 = 0$, $u \in J$, sono di tipo A, mentre T_5: $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 = 1 - \varrho$, $u \in J$, non è di tipo A.

Sia $K \subset J$ un continuo. Dagli elementi di topologia sappiamo che $J - K$ è un insieme relativamente a J e che la collezione $\{\gamma\}_K$ dei componenti γ di $J - K$ è al più numerabile. Inoltre, per ogni $\gamma \in \{\gamma\}_K$, l'insieme $\gamma\gamma^*$ è vuoto, oppure coincide con J^*, oppure è un arco aperto di J^* avente gli estremi in K, mentre l'insieme $F(\gamma) = \gamma^* - \gamma\gamma^* = \bar{\gamma} - \gamma$ è un continuo contenuto in K, non vuoto, separante γ da $J - \gamma - F(\gamma)$ in J (n. 2).

Diremo che il continuo $K \subset J$ soddisfa la condizione $\mathcal{D}$ in J (rispetto alla trasformazione (T, J)) se, per ogni $\gamma \in \{\gamma\}_K$, T è costante sul continuo $F(\gamma)$. Diremo che la trasformazione (T_0, J) è la *retrazione* della trasformazione (T, J) rispetto al continuo $K \subset J$, soddisfacente $\mathcal{D}$, se:

1) $T_0(u) = T(u)$ per ogni $u \in K$;

2) $T_0(u) = T[F(\gamma)]$ per ogni $u \in \gamma$, $\gamma \in \{\gamma\}_K$ (n. 3).

Denoteremo con S_0 la superficie di FRÉCHET definita dalla trasformazione (T_0, J). Evidentemente $[S_0] \subset [S]$.

È ben noto il seguente

Teorema I. Per ogni trasformazione (T, J) non costante su J^* esiste una retrazione (T_0, J) di tipo A con $\theta T_0 = \theta T$. Inoltre $L(S_0) \leqslant L(S)$.

Questa proposizione è usata correntemente in Calcolo delle Variazioni come un processo di lisciamento per superficie ed è dovuta a G. T. WHYBURN e a C. B. MORREY [5]. Una dimostrazione elementare di essa è contenuta in [**1**, b] ([2]).

Nella presente Nota dimostro elementarmente la seguente proposizione, che ritengo nuova, di cui mi servirò, insieme alla precedente, in altro lavoro sul Calcolo delle Variazioni [**1**, f].

Teorema II. *Sia C una curva continua semplice e chiusa in E e sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario. Allora esiste un numero $\delta = \delta(C, \varepsilon) > 0$ tale che ogni trasformazione (T, J) di tipo A con $\|\theta T, C\| < \delta$ possiede una retrazione (T_0, J) aperta non degenere con $\|\theta T_0, C\| < \varepsilon$. Inoltre $L(S_0) \leqslant L(S)$.*

Dimostrerò la prima parte di questo Teorema nei nn. 4-13 e la seconda parte nel n. 16.

In precedenti lavori ho poi studiato il concetto di integrale $\mathcal{J}(S)$ [**1**, c] sopra una superficie qualunque S di FRÉCHET di area finita secondo LEBESGUE e ho dimostrato condizioni necessarie e condizioni sufficienti di semicontinuità in tale generale classe di superficie [**1**, d, e]. Nel presente lavoro dimostro (n. 17) il seguente teorema che completa i due precedenti:

([2]) Infatti si osservi che l'attuale superficie S_0 è quella denotata con S_1 in [**1**, b, § 4, n. 5], che per essa l'insieme F [**1**, b, § 5, n. 4] è vuoto e pertanto esiste una sola superficie $\bar{S}_1 = S_1$ [**1**, b, § 5, nn. 5 e 6] di tipo A [**1**, b, § 5, n. 8].

Teorema III. *Se* (T_0, J) *è una qualunque retrazione della trasformazione* (T, J) *e* $L(S) < +\infty$, *allora per ogni integrale* $\mathcal{J}(S)$ *semidefinito positivo si ha* $\mathcal{J}(S_0) \leqslant \mathcal{J}(S)$.

Alcune proprietà dei continui K.

2. – Sia J una regione semplice e chiusa di JORDAN e K un qualunque continuo $K \subset J$, $(K \neq 0,\ K \neq J)$, soddisfacente la condizione $\mathcal{D}$. Oltre alle proprietà richiamate nel n. 1, valgono ancora le seguenti:

a) Dato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si ha diam $T(\gamma) > \varepsilon$ soltanto per un numero finito al più di componenti γ di $J - K$.

b) Se $[\gamma]$ è una qualunque sottocollezione di $\{\gamma\}_K$, allora anche $K' = K + \sum_{\gamma \in [\gamma]} \gamma$ è un continuo contenuto in J e i componenti di $J - K'$ sono tutti e soli gli insiemi $\gamma \in \{\gamma\}_K - [\gamma]$.

Dimostriamo qui brevemente, per comodità del lettore, le proprietà richiamate che sono tuttavia sostanzialmente note e seguono da proprietà di continui piani e delle regioni di JORDAN.

Se $\gamma \in \{\gamma\}_K$, $\gamma\gamma^* \neq 0$, $u \in \gamma\gamma^*$, allora $u \in \gamma$, onde esiste un intorno U_0 di u con $U_0 K = 0$, e perciò $UK = 0$ per ogni altro intorno $U \subset U_0$. D'altra parte $u \in \gamma^*$, onde in U cadono punti di γ e punti non di γ. Essendo J un continuo localmente connesso in π, per ogni U esiste un altro intorno $U' \in U$ tale che tutti i punti $v \in U'J$ appartengono ad un arco $\lambda \subset UJ$ di estremi u e v, onde $\lambda K = 0$, $\lambda \subset \gamma$. Pertanto i punti di U' non in γ sono fuori di J, cioè in ogni U' cadono punti di J e punti non di J, onde $u \in J^*$ e di più tutto un arco di J^* contenente u appartiene ad U', onde a γ. Perciò $\gamma\gamma^*$ è un insieme aperto in J^* e quindi, se $\gamma\gamma^* \neq J^*$, i componenti di $\gamma\gamma^*$ sono archi aperti massimali di J^* i cui estremi cadono in K e in $F(\gamma)$. Se esistessero due di tali archi, diciamo ab, cd, allora presi due punti u, v interni ad essi, esisterebbe un arco $\lambda \subset \gamma$ di estremi u, v, onde $\lambda K = 0$, $u, v \in \lambda$, $a, c \in K$ e ciò è impossibile perchè a, c, u, v si separano su J^* [4, pag. 167, Teor. 17]. È così dimostrato che $\gamma\gamma^*$ è nullo, oppure coincide con J^*, oppure è un semplice arco aperto di J^* i cui estremi sono in K e in $F(\gamma)$.

Dimostriamo che $F(\gamma) \neq 0$. Infatti se $K \subset J^*$, allora K è un arco chiuso di J^* (ove non si esclude $K = J^*$, oppure K è un punto singolo) e quindi esiste un solo $\gamma = J - K$, onde $F(\gamma) = K \neq 0$. Se K ha punti interni a J, allora entrambi γ e K hanno punti u, v interni a J. Se α è un arco interno a J di estremi u, v, allora il primo punto a partire da u non in γ deve appartenere a K e a $F(\gamma)$. Dunque $F(\gamma) \neq 0$.

Evidentemente poi $F(\gamma)$ è un insieme chiuso, $F(\gamma) \subset K$. Dimostriamo che

$F(\gamma)$ è un continuo. Infatti se $F(\gamma)$ non fosse un continuo esisterebbe un arco $\lambda \subset J$, aperto o chiuso, con $\lambda F(\gamma) = 0$, separante J in due parti J_1, J_2 entrambe contenenti punti di $F(\gamma)$ ([3]). Se u, v sono due punti di tali parti, $u \in J_1 F(\gamma)$, $v \in J_2 F(\gamma)$, allora esistono due altri punti $u' \in \gamma J_1$, $v' \in \gamma J_2$ e quindi anche un arco $l \subset \gamma$ di estremi u', v', ove possiamo supporre $\lambda - u' - v'$ interno a J. Intanto $l\lambda \neq 0$, ossia $\gamma\lambda \neq 0$. I componenti di $\gamma\lambda$ sono archi aperti di λ i cui estremi, se non cadono in u o v, sono punti di K e di $F(\gamma)$. D'altra parte non può essere $\lambda K = 0$, altrimenti λ separerebbe K in J; onde $\lambda K \neq 0$. Ciò assicura che esiste almeno un arco di $\gamma\lambda$ con un estremo $w \in K$, $w \in F(\gamma)$, cioè $\lambda F(\gamma) \neq 0$, contro il supposto. È così dimostrato che $F(\gamma)$ è un continuo ed è evidente che $F(\gamma)$ separa γ da $J - \gamma - F(\gamma)$.

Dimostriamo a). Sia $\omega(\delta) = \text{l.u.b.}\, |T(u) - T(u')|$ per ogni $u, v \in J$, $|u - v| \leqslant \delta$, $\delta > 0$. Allora $0 \leqslant \omega(\delta') \leqslant \omega(\delta)$ per ogni $0 < \delta' < \delta$ e $\omega(+0) = 0$. Diciamo $\eta > 0$ un numero tale che $\omega(\eta) < \varepsilon/4$. Se per un $\gamma \in \{\gamma\}$ si ha diam $T(\gamma) > \varepsilon$, allora esistono due punti $u, v \in \gamma$, con $|T(u) - T(v)| > \varepsilon$, onde dei due punti u, v almeno uno, diciamo u, verifica la relazione $|T(u) - T[F(\gamma)]| > > \varepsilon/4$. Pertanto il cerchio $c(u, \eta)$ di centro u e raggio η non contiene punti di $F(\gamma)$. Se $\gamma\gamma^* = 0$ allora anche $\gamma J^* = 0$ e $c(u, \eta) \subset \gamma$. Se diam $T(\gamma) > \varepsilon$, $\gamma\gamma^* \neq 0$, diam $T(\gamma\gamma^*) < \varepsilon/4$ allora gli estremi di $\gamma\gamma^*$ cadono in $F(\gamma)$, l'immagine di $\gamma\gamma^*$ è un continuo di diametro $< \varepsilon/4$ contenente il punto $T[F(\gamma)]$ e quindi dei due punti u, v uno, diciamo u, verifica la relazione $|T(u) - T(w)| > > \varepsilon/4$ per ogni $w \in \gamma\gamma^*$. Di nuovo come sopra il cerchio $c(u, \eta)$ è completamente contenuto in γ. Pertanto gli insiemi $\gamma \in \{\gamma\}_K$ con $T(\gamma) > \varepsilon$, $\gamma\gamma^* = 0$, oppure diam $T(\gamma\gamma^*) < \varepsilon/4$ sono in numero finito. I rimanenti insiemi $\gamma = \{\gamma\}_K$ hanno la proprietà diam $T(\gamma\gamma^*) > \varepsilon/4$ e, come è noto, non può esistere che un numero finito di archi disgiunti su J^* aventi tale proprietà. È così dimostrata a).

Dimostriamo b). L'insieme K' è evidentemente connesso. Dobbiamo dimostrare che K' è chiuso. Infatti se u è un punto di accumulazione di K, oppure di un componente $\gamma \in [\gamma]$, allora rispettivamente $u \in K$, $u \in \gamma + F(\gamma)$ e, in ogni caso, $u \in K'$. Se in ogni intorno U di u cadono punti di infiniti

---

([3]) Vale la seguente proposizione: Se J è una regione semplice e chiusa di JORDAN del piano π ed $M \subset J$ un insieme chiuso e non connesso, allora esiste un arco $\lambda \subset J$, aperto o chiuso, separante J in due parti J_1, J_2 con $J_1 M \neq 0$, $J_2 M \neq 0$, $\lambda M = 0$. Infatti se A, B sono due punti di componenti distinti di M, allora [4, pag. 185, Teor. 10] esiste in π una curva semplice e chiusa $l \subset \pi$, $lM = 0$, separante A e B in π, onde l'insieme chiuso lJ separa A e B in J e infine [4, pag. 194, Teor. 24'] un sottocontinuo λ di lJ separa A e B in J e tale sottocontinuo deve essere un arco di l, oppure deve coincidere con l. Pertanto [4, pag. 194, Teor. 24], o λ è un arco di J avente gli estremi in J^*, oppure è completamente interno a J e in ogni caso separa J in due parti J_1, J_2 connesse contenenti rispettivamente $A, B \in M$.

$\gamma \in \{\gamma\}$, allora per ogni U vi è anche un intorno $U' \subset U$ tale che per ogni punto v di $U'J$ esiste un arco $\lambda \subset UJ$ di estremi v ed u. Sia v un punto, $v \in U'J$, $v \in \gamma$, $\gamma \in [\gamma]$. Se $u \in \gamma$, allora $u \in K'$, se u non appartiene a γ, allora esiste su λ un punto $w \in F(\gamma) \subset K$ e $w \in U$. Per l'arbitrarietà di U, $u \in K$ e quindi $u \in K'$. È così dimostrato che $K' \subset J$ è chiuso e perciò è un continuo. Notiamo che $J - K' = \sum \gamma$ ove la somma è estesa a tutti i $\gamma \in \{\gamma\}_K - [\gamma]$. Se Γ è un qualunque componente di $J - K'$ allora $\Gamma\gamma \neq 0$ per almeno un $\gamma \in \{\gamma\}_K - [\gamma]$ e poichè ciascun γ non contiene punti di K', al lora da $\Gamma\gamma \neq 0$ segue $\gamma \subset \Gamma$. Ora Γ non può contenere punti estranei ad uno di questi γ perchè altrimenti dovrebbe contenere anche punti di $F(\gamma)$, ossia di K' essendo $F(\gamma) \subset K \subset K'$. Dunque $\Gamma = \gamma$ per un $\gamma \in \{\gamma\}_K - [\gamma]$. Viceversa ognuno di tali γ è contenuto in un componente Γ di $J - K'$ e, per il medesimo ragionamento, è $\Gamma = \gamma$. E così dimostrata b).

3. – Dimostriamo che (T_0, J) è continua in J. Infatti T_0 è continua in ogni $\gamma \in \{\gamma\}_K$ e in ogni (eventuale) punto interno a K. Sia ora $u_0 \in K$ un punto non interno a K. Dato $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste un intorno U di u_0 tale che per ogni punto $u \in UJ$ risulta $|T(u) - T(u_0)| < \varepsilon$ ed esiste un altro intorno $U' \subset U$ tale che ogni punto $u \in U'J$ appartiene ad un arco $\lambda \subset UJ$ congiungente u con u_0. Per ogni $u \in U'J$, $u \in K$, è allora $|T_0(u) - T_0(u_0)| = |T(u) - T(u_0)| < \varepsilon$. Per ogni $u \in U'J$, $u \in J - K$, è $u \in \gamma$, $\gamma \in \{\gamma\}_K$ e se λ è il relativo arco, $\lambda \subset UJ$, ed esiste su λ un punto $v \in F(\gamma)$. Pertanto $|T_0(u) - T(u_0)| = |T_0(v) - T_0(u_0)| = |T(v) - T(u_0)| < \varepsilon$. Dunque T_0 è continua in J.

Sull'operazione di retrazione si veda anche il n. 18.

Dimostrazione del Teorema II.

4. – La curva C è semplice e chiusa e perciò ha la seguente ben nota proprietà: Per ogni numero $\varepsilon > 0$ esiste un altro numero $\delta_0 = \delta_0(C, \varepsilon) > 0$ tale che, se x_1, x_2 sono punti di C con $x_1 \neq x_2$, $|x_1 - x_2| \leqslant \delta_0$, allora diam $x_1x_2 \leqslant \varepsilon$, oppure diam $x_2x_1 \leqslant \varepsilon$, ove x_1x_2, x_2x_1 sono i due archi in cui x_1, x_2 dividono C.

Sia $d = \text{diam}\, C > 0$, sia $\sigma = \min\,[d/15, \varepsilon/2]$, $\delta = \min\,[\delta_0(C, \sigma)/4, \sigma/2]$.

Sia (T, J): $x = T(u)$, $u \in J$, una qualsiasi trasformazione di tipo A con $\|C, C'\| \leqslant \delta$, ove $C' = \theta T$. Intanto esisterà una rappresentazione C: $x = \mathcal{C}(u)$, $u \in J^*$, della curva C su J^* tale che $|T(u) - \mathcal{C}(u)| \leqslant 2\delta$ per ogni $u \in J^*$. Notiamo inoltre che diam $C' \geqslant \text{diam}\, C - 4\delta = d - 4\delta \geqslant 15\sigma - 2\sigma = 13\sigma$ e che mentre C è una curva semplice e chiusa, C' è chiusa ma non necessariamente semplice.

5. – Diciamo G' la sottocollezione di $G = G(T, J)$, formata da tutti i contorni $g \in G$ per i quali $J - g$ è disconnesso. Si noti che se G' è vuota, allora T è non degenere e poichè diam $C' > 0$, T è anche aperta, onde l'enunciato del Teorema II è, in tal caso, ovvio qualora si ponga $K = J$, $T_0 = T$. Supponiamo dunque G' non vuoto. Si noti che qualunque continuo $g \in G(T, J)$ soddisfa la condizione $\mathcal{D}$.

Per ogni $g \in G'$ l'insieme $J - g$ è disconnesso, onde la collezione $\{\gamma\}_g$ dei componenti γ di $J - g$ contiene almeno due elementi. Dimostriamo che per ogni $\gamma \in \{\gamma\}_g$, $\gamma\gamma^*$ è un arco aperto di J^* i cui estremi sono punti distinti di g. Supponiamo prima $\gamma\gamma^* = 0$. Allora tutti i punti di γ sono punti interni a J e $F(\gamma)$ separa γ dai punti di J^* non in $F(\gamma)$, onde g separa γ da $\pi - J$, ciò che è impossibile perchè T è di tipo A e perciò $\pi - g$ è connesso. Dunque $\gamma\gamma^* \neq 0$ e quindi (n. 1) $\gamma\gamma^*$ è un arco aperto di J^*, oppure coincide con J^*. Ma $\{\gamma\}_g$ contiene almeno due elementi, onde debbono esservi su J^* almeno due archi $\gamma\gamma^*$ disgiunti e perciò la seconda alternativa è esclusa e $\gamma\gamma^*$ deve essere un arco aperto di J^* i cui estremi sono punti distinti di g. È così dimostrato altresì che per ogni $g \in G'$, l'insieme chiuso J^*g, contiene almeno due punti distinti.

6. – Per ogni $g \in G'$ siano $u_1 = u_2$ due punti di gJ^* e siano $x_i = T(u_i)$, $X_i = \mathcal{C}(u_i)$, $(i = 1, 2)$, le loro immagini su C' e C. Intanto $u_i \in g$, $(i = 1, 2)$, onde $x_1 = x_2$ e, d'altra parte, $|x_i - X_i| < 2\delta$, $(i = 1, 2)$. Dunque $|X_1 - X_2| \leqslant$ $\leqslant |X_1 - x_1| + |x_1 - x_2| + |x_2 - X_2| \leqslant 2\delta + 0 + 2\delta = 4\delta \leqslant \delta_0$ e perciò (n. 4) diam $X_1X_2 \leqslant \sigma$, oppure diam $X_2X_1 \leqslant \sigma$. Supponiamo di aver numerato i punti u_1, u_2 in modo che si abbia diam $X_1X_2 \leqslant \sigma$, onde diam $x_1x_2 \leqslant$ diam $X_1X_2 +$ $+ 4\delta \leqslant \sigma + 2\sigma = 3\sigma$ e conseguentemente anche diam $X_2X_1 \geqslant 15\sigma - \sigma = 14\sigma$, diam $x_2x_1 \geqslant$ diam $C' - 3\sigma \leqslant 13\sigma - 3\sigma = 10\sigma$. Abbiamo così dimostrato la seguente proposizione:

a) Se $g \in G'$ e $u_1 \neq u_2$ sono punti di gJ^*, allora dei due archi u_1u_2, u_2u_1 uno, diciamo u_1u_2, ha la proprietà diam $T(u_1u_2) \leqslant 3\sigma$ e l'altro, diciamo u_2u_1, ha la proprietà diam $T(u_2u_1) \geqslant 10\sigma$. Inoltre diam $\mathcal{C}(u_1u_2) \leqslant \sigma$, diam $\mathcal{C}(u_2u_1) \geqslant$ $\geqslant 14\sigma$.

7. – Sia ancora $g \in G'$ e sia u_1 un punto qualsiasi di gJ^*. L'insieme gJ^* è chiuso, onde esistono due archi massimali u_0u_1, u_1u_2 su J^*, aventi il solo punto u_1 in comune, con le seguenti proprietà: diam $T(u_0u_1) \leqslant 3\sigma$, diam $T(u_1u_2) \leqslant 3\sigma$, $u_0, u_2 \in gJ^*$. Non si esclude che possa essere $u_0 = u_1$, oppure $u_1 = u_2$ ma, in forza del n. 6, queste due relazioni non possono verificarsi insieme. Di più diam $T(u_0u_1u_2) \leqslant$ diam $T(u_0u_1) +$ diam $T(u_1u_2) \leqslant 3\sigma +$ $+ 3\sigma = 6\sigma$, ed essendo diam $C' \geqslant 13\sigma$, è escluso che $u_0u_1u_2$ ricopra J^*. Tuttavia $u_0u_1u_2$ è un arco proprio di J^*. D'altra parte $6\sigma < 10\sigma$ e quindi, in forza della proposizione a) del n. 6, deve essere diam $T(u_0u_1u_2) \leqslant 3\sigma$, diam $T(u_2u_0) \geqslant 10\sigma$. Proviamo che l'arco aperto u_2u_0 è privo di punti di gJ^*. Infatti se esistesse un punto $\bar{u} \in gJ^*$, interno ad u_2u_0, allora, per il n. 6, diam $T(u_1\bar{u}) \leqslant 3\sigma$, oppure diam $T(\bar{u}u_1) \leqslant 3\sigma$ e perciò u_0u_1, oppure u_1u_2, non avrebbero la proprietà di massimo con cui li abbiamo definiti. È così dimostrato che l'arco $\lambda = u_0u_2$ di J^* ha le seguenti proprietà:

b) Gli estremi di λ sono punti di g, $\lambda \subset J^*$, $gJ^* \subset \lambda$, $g(J^* - \lambda) = 0$, diam $T(\lambda) \leqslant 3\sigma$, diam $T(J^* - \lambda) \geqslant 10\sigma$.

Si noti che λ è stato definito partendo da un punto arbitrario $u_1 \in gJ^*$ ma, per le sue proprietà b), λ è indipendente dalla scelta del punto $u_1 \in gJ^*$. Perciò $\lambda = \lambda(g)$, $g \in G'$. Si noti anche che $J^* - \lambda$ appartiene ad un solo componente, diciamo $\tilde{\gamma}$, di $J - g$, $\tilde{\gamma} \in \{\gamma\}_g$, e che $\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}^* = J^* - \lambda$, mentre per ogni $\gamma \neq \tilde{\gamma}$, $\gamma \in \{\gamma\}_g$ si ha $\gamma\gamma^* \subset \lambda$, $\lambda - \lambda g = \sum' \gamma\gamma^*$, ove la somma è estesa a tutti i $\gamma \in \{\gamma\}_g - \tilde{\gamma}$.

8. – Siano $\lambda_1 = ab = \lambda(g_1)$, $\lambda_2 = cd = \lambda(g_2)$, $g_1 \neq g_2$, $g_1, g_2 \in G'$, due archi λ (n. 7). Intanto $g_1 \neq g_2$, onde $g_1g_2 = 0$ e poichè $a, b \in g_1$, $c, d \in g_2$, gli archi λ_1, λ_2 non hanno punti estremi in comune. Dunque i punti a, b, c, d non possono neppure separarsi su J^*, altrimenti i continui g_1, g_2 avrebbero un punto in comune in J [4, pag. 167, Teor. 17]. Ciò assicura che $\lambda_1\lambda_2 = 0$, oppure $\lambda_1 \subset \lambda_2$, oppure $\lambda_1 \supset \lambda_2$, una ed una sola di queste relazioni dovendo necessariamente verificarsi.

9. – Sia u_0 un punto di J^* appartenente a qualche arco $\lambda = \lambda(g)$, $g \in G'$. Allora la collezione $[\lambda]$ di tutti gli archi λ contenenti u_0 può essere ordinata stabilendo che λ precede λ' se $\lambda \subset \lambda'$. Indicheremo con $\lambda_0 = a_0b_0$ l'arco ricoperto da tutti i $\lambda \in [\lambda]$. Esiste allora una successione $\lambda_n = a_nb_n = \lambda(g_n) \in [\lambda]$, $(n = 1, 2, \ldots)$, con $g_n \in G'$, $\lambda_n \subset \lambda_{n+1}$, $a_n \to a_0$, $b_n \to b_0$, $\lambda_n \to \lambda_0$. Intanto $0 < \text{diam } T(\lambda_n) \leqslant 3\sigma$, diam $\mathcal{T}(\lambda_n) \leqslant \sigma$, diam $T(J^* - \lambda_n) \geqslant 10\sigma$ e quindi $0 < \text{diam } T(\lambda_0) \leqslant 3\sigma$, diam $\mathcal{T}(\lambda_0) \leqslant \sigma$, diam $T(J^* - \lambda_0) \geqslant 10\sigma$. Inoltre $a_n, b_n \in g_n$, $g_n \in G'$, $a_n \to a_0$, $b_n \to b_0$ e perciò, posto $k = \limsup g_n$(4), k è continuo (teorema di ZORETTI, [2, pag. 38]), $a_0, b_0 \in k$, ed essendo $G' \subset G$, G semicontinua superiormente, è $k \subset g_0$, $g_0 \in G$, $a_0, b_0 \in g_0$. Notiamo che diam $T(\lambda_0) > 0$, diam $T(J^* - \lambda_0) > 0$, onde g_0 non ricopre interamente nè λ_0, nè $J^* - \lambda_0$ e ciò assicura che g_0 separa J. Infatti se u, v sono due punti, u interno a λ_0, v interno a $J^* - \lambda_0$, non in g_0, e supponiamo u, v appartengano allo stesso

(4) Il lim sup I_n [7, I, 7], o insieme di accumulazione (*Grenzmenge*, in [2, pag. 38]) di una successione I_n, è l'insieme I di tutti i punti in ogni intorno dei quali cadono punti di infiniti insiemi I_n.

componente γ_0 di $J - g_0$, allora esisterebbe un arco $t \subset \gamma_0$, $tg_0 = 0$, congiungente u, v e ciò è assurdo perchè a_0, b_0, u, v si separano in J^* [4, pag. 167, Teor. 17]. Dunque u, v appartengono a componenti diversi da $J - g_0$, cioè g_0 separa J, ossia $g_0 \in G'$. Ne segue che $\lambda_0 \subset \lambda(g_0)$ e, d'altra parte, $u_0 \in \lambda(g_0)$, $\lambda(g_0) \subset [\lambda]$, $\lambda(g_0) \subset \lambda_0$ e quindi, in conclusione, $\lambda_0 = a_0 b_0 = \lambda(g_0)$. Ciò dimostra la seguente proposizione:

c) La collezione $[\lambda]$ di tutti gli archi $\lambda = \lambda(g)$, $g \in G'$, contenenti un dato punto $u_0 \in J^*$ ha un massimo elemento $\lambda_0 = \lambda(g_0)$.

10. – Sia F la collezione di tutti gli archi $\lambda_0 = \lambda(g_0)$ massimali ora determinati. Due qualunque di essi non hanno punti in comune, neppure estremi, perciò F è al più numerabile $F = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$. Intanto $0 < \operatorname{diam} T(\lambda_n) \leqslant 3\sigma$, $\operatorname{diam} \mathcal{C}(\lambda_n) \leqslant \sigma$, $\operatorname{diam} T(J^* - \lambda_n) \geqslant 10\sigma$. Si ha poi $\lambda_n = a_n b_n = \lambda(g_n)$, $g_n \in G'$ e, se diciamo $\tilde{\gamma}_n$ il componente di $J - g_n$ con $\tilde{\gamma}_n \tilde{\gamma}_n^* = J^* - \lambda_n$, γ_{ni}, $(i = 1, 2, \ldots)$, tutti gli altri componenti, allora $\lambda_n = \lambda_n g_n + \sum \gamma_{ni} \gamma_{ni}^*$ (n. 7). Dimostriamo che gli insiemi γ_{ni}, $(n = 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots)$, sono disgiunti. Sappiamo già che $\gamma_{ni}\gamma_{nj} = 0$, $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots)$. Proviamo che $\gamma_{ni}\gamma_{mj} = 0$ per ogni $n \neq m$, $(i, j = 1, 2, \ldots)$. Intanto i punti $v \in \gamma_{mj} J^*$ non appartengono a γ_{ni} e perciò, se esistesse un punto $u \in \gamma_{ni}\gamma_{mj}$, γ_{mj} avrebbe punti in γ_{ni} e punti non in γ_{ni}, onde γ_{mj} avrebbe punti in $F(\gamma_{ni})$ e quindi in g_n, cioè $\gamma_{mj} g_n \neq 0$ e poichè $F(\gamma_{mj}) \subset g_m$, $g_m g_n = 0$, occorre che sia $g_n \subset \gamma_{mj}$ e perciò $g_n J^* \subset \gamma_{mj}\gamma_{mj}^*$. Ora $\operatorname{diam} T(\gamma_{mj}\gamma_{mj}^*) \leqslant 3\sigma$, $\operatorname{diam} T(J^* - \gamma_{mj}\gamma_{mj}^*) \geqslant 10\sigma$, onde $\lambda_n \subset \gamma_{mj}\gamma_{mj}^*$, $\lambda_n \subset \lambda_m$, ciò che è impossibile essendo $n \neq m$, $\lambda_n \lambda_m = 0$. È così dimostrato che $\gamma_{ni}\gamma_{mj} = 0$ per ogni $n \neq m$, $(i, j = 1, 2, \ldots)$. Inoltre $F(\gamma_{ni}) \subset g_n$ e per lo stesso ragionamento $g_n \gamma_{mj} = 0$ per ogni $n \neq m$, $(i, j = 1, 2, \ldots)$.

11. – Poniamo $K = J - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{ni}$. Gli insiemi γ_{ni} sono aperti in J onde K è chiuso. Dimostriamo che K è un continuo. Infatti, in caso contrario, esisterebbe un arco semplice $l \subset J$, privo di punti di K, separante J in due parti J_1, J_2 entrambe contenenti punti di K. Ogni punto di l appartiene a qualche γ_{ni} ma se $l' = \alpha\beta$ è un arco massimale proprio di l appartenente ad un γ_{ni}, allora gli estremi α, β debbono appartenere a K non potendo appartenere a nessun altro γ_{mj} (n. 10). Pertanto deve essere $l' = l$ e quindi $l \subset \gamma_{ni}$, onde g_n appartiene interamente ad una delle due parti J_1, J_2, diciamo J_1. Allora J_2 è privo di punti di $F(\gamma_{ni})$, onde $J_2 \subset \gamma_{ni}$ e perciò $KJ_2 = 0$ contro il supposto. È così dimostrato che K è un continuo, $K \subset J$. Osserviamo che $J - K = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{ni}$ e che per ogni γ_{ni} si ha $F(\gamma_{ni}) \subset g_n \subset K$. Ora ogni γ_{ni} è privo di punti di K, onde $\gamma_{ni} \subset \Gamma$, ove Γ è un componente di $J - K$. D'altra parte Γ non può contenere punti non in γ_{ni}, altrimenti Γ dovrebbe contenere anche punti di $F(\gamma_{ni})$, cioè di K, ciò che è impossibile. Dunque $\gamma_{ni} = \Gamma$, cioè i componenti di $J - K$ sono tutti e soli gli insiemi γ_{ni}. Ora T è costante su g_n onde T è costante su $F(\gamma_{ni})$ per ogni γ_{ni}, cioè K soddisfa la proprietà $\mathcal{P}$ del n. 1.

Possiamo dunque definire la retrazione (T_0, J) di (T, J) rispetto a K.

12. – Diciamo $G(T_0, J)$ la collezione dei continui massimali $h \subset J$ su cui T_0 è costante. Intanto notiamo che l'insieme $g_{n0} = g_n + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{ni}$ è un continuo (n. 2, b)) e che T_0 è certamente costante su g_{n0}. Sia ora h un qualunque continuo $h \in G(T_0, J)$. Intanto deve essere $hK \neq 0$. Infatti se fosse $hK = 0$, allora $h \subset J - K$, $h\gamma_{ni} \neq 0$ per un qualche γ_{ni}, onde $hg_{n0} \neq 0$ e quindi $g_{n0} \subset h$ e dunque $g_n \subset h$, ove $g_n \subset K$, cioè $Kh \neq 0$ contro il supposto. È così dimostrato che $hK \neq 0$ per ogni $h \in G(T_0, J)$. È poi hK un insieme chiuso come prodotto di insiemi chiusi. Dimostriamo che hK è un continuo. Ragioniamo per assurdo e supponiamo hK non continuo. Allora esiste una curva semplice $l \subset J$ separante J in due parti J_1, J_2 con $hKJ_1 \neq 0$, $hKJ_2 \neq 0$, $hKl = 0$. D'altra parte h è un continuo onde $hl \neq 0$ e i punti di hl non sono in K e sono in qualche γ_{ni} e perciò $g_{n0} \subset h$. Se l è completamente contenuto in γ_{ni}, allora $l \subset g_{n0} \subset h$ e delle due parti J_1, J_2, una, diciamo J_1, deve essere completamente contenuta in γ_{ni}, onde $KJ_1 = 0$, $hKJ_1 = 0$, contro il supposto. Se l non è completamente contenuta in γ_{ni}, allora $l\gamma_{ni} \neq 0$, $l(J - \gamma_{ni}) \neq 0$, onde $lF(\gamma_{ni}) \neq 0$, $lg_n \neq 0$, $g_n \subset g_{n0} \subset h$, $g_n \subset K$, onde $lhK \neq 0$ contro il supposto. Dunque hK è un continuo, e poichè T_0 e T coincidono su K, risulta $hK = g$, $g \in G$. Dimostriamo ora che per ogni continuo $h \in G(T_0, J)$ si ha $h = g$, $g \in G$ se $h \subset K$, oppure $h = g_{n0}$ se $h(J - K) \neq 0$. Infatti, se $h \subset K$, allora $h = hK = g$, $g \in G$; se $h(J - K) \neq 0$, allora $h\gamma_{ni} \neq 0$ per qualche γ_{ni}, onde $h \supset g_{n0}$ e $hK \supset g_n$ per gli stessi n. In forza di quanto precede si deve avere $hK = g_n$ per un solo n, onde $h\gamma_{ni} \neq 0$ per un solo n, e infine $h = g_n + \sum \gamma_{ni} = g_{n0}$ per un dato n. Osserviamo che se $h = g_{n0}$, allora $J - h = J - g_{n0} = J - (g_n + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{ni}) = \tilde{\gamma}_n$, onde nessun continuo $h = g_{n0}$ separa J. Se $h \subset K$, $h = hK = g$, allora anche deve essere $J - g$ connesso, altrimenti $g \in G'$ e il relativo arco $\lambda(g)$ sarebbe contenuto in un arco λ_n, o coinciderebbe con uno di questi. Il secondo caso è impossibile perchè da $hg_n \neq 0$ segue $h = g_{n0}$, $h(J - K) \neq 0$. Dunque $\lambda(g)$ dovrebbe essere contenuto in un λ_n e $g \neq g_n$, $gg_n = 0$, onde $\lambda(g) \subset \gamma_{ni}\gamma_{ni}^*$ per un qualche i, $g \subset \gamma_{ni}$, ciò che contraddice $g \subset K$. È così dimostrato che, per ogni continuo $h \in G(T_0, J)$, l'insieme $J - h$ è connesso. Ciò dimostra che (T_0, J) è non degenere.

Notiamo che, se esiste un solo λ_n, allora T_0 coincide con T su $J - \lambda_n$ e perciò diam $T_0(J^* - \lambda_n) =$ diam $T(J^* - \lambda_n) > 0$ onde T_0 è non costante su J^*; se esistono almeno due λ_n, allora esistono su J^* punti di due continui $h = g_{n0}$

diversi e di nuovo T_0 è non costante su J^*. Ciò dimostra che (T_0, J) è aperta non degenere.

13. – Dimostriamo che $\|\theta T_0, C\| \leqslant \varepsilon$. Sia $u \in J^*$ un punto qualsiasi. Se u non è interno ad alcun λ_n, $(n = 1, 2, \ldots)$, allora $u \in K$, $T(u) = T_0(u)$, $|T_0(u) - \mathfrak{C}(u)| = |T(u) - \mathfrak{C}(u)| \leqslant 2\delta \leqslant \sigma < \varepsilon$. Se $u \in \lambda_n$ per un dato n e $\lambda_n = a_n b_n = \lambda(g_n)$, $A_n = \mathfrak{C}(a_n)$, $B_n = \mathfrak{C}(b_n)$, allora $a_n, b_n \in g_n$; $a_n, b_n \in K$ e, in forza del n. 10, diam $A_n B_n =$ diam $\mathfrak{C}(\lambda_n) \leqslant \sigma$. Inoltre $T_0(a_n) = T(a_n)$ e $T_0(u) = T_0(a_n)$ essendo T_0 costante su λ_n. Pertanto $|T_0(u) - \mathfrak{C}(u)| \leqslant$ $\leqslant |T_0(u) - T_0(a_n)| + |T_0(a_n) - T(a_n)| + |T(a_n) - \mathfrak{C}(a_n)| + |\mathfrak{C}(a_n) - \mathfrak{C}(u)| \leqslant$ $\leqslant 0 + 0 + 2\delta + \sigma \leqslant 2\sigma < \varepsilon$. Dunque $|T_0(u) - \mathfrak{C}(u)| < \varepsilon$ per ogni $u \in J^*$ e quindi $\|\theta T_0, C\| < \varepsilon$. La prima parte del Teorema II è così dimostrata. Per la seconda parte si veda il n. 16.

Dimostrazione del Teorema III.

14. – Lemma I. Dati N punti distinti $x_i \in E$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$, ed un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario, esistono un altro numero $\sigma > 0$, $0 < \sigma \leqslant \varepsilon$, ed una trasformazione τ di E in sè, quasi lineare in E, univoca, ma non biunivoca, tale che:

a) $|\tau(x) - \tau(x')| \leqslant |x - x'|$ per ogni $x, x' \in E$;

b) $|\tau(x) - x| < \varepsilon$ per ogni $x \in E$;

c) τ è costante nella sfera F_i di centro x_i e raggio σ;

d) Ogni triangolo rettilineo Δ di E è trasformato in una superficie poliedrica Δ' con $a(\Delta') \leqslant a(\Delta)$.

Dimostrazione. Per ogni $h > 0$, ξ_0 reali, diciamo $t = t(\xi; \xi_0, h)$ la trasformazione continua, quasi lineare, di $-\infty < \xi < +\infty$ in sè, definita ponendo $\eta = t(\xi) = \xi + h$ se $\xi \leqslant \xi_0 - h$, $\eta = t(\xi) = \xi_0$ se $\xi_0 - h \leqslant \xi \leqslant \xi_0 + h$, $\eta = t(\xi) = \xi - h$ se $\xi_0 + h \leqslant \xi$. Se $x_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3)$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$, poniamo $\sigma = \varepsilon(2^{2N} - 1)^{-1}$ e $t_{ir} = t(x^r; x_i^r, 2^{2i-2}\sigma)$, $(r = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, \ldots, N)$; $T_i = t_{i3}t_{i2}t_{i1}$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$; $\tau = T_N T_{N-1} \ldots T_2 T_1$. La trasformazione τ è continua e quasi lineare in E come prodotto di $3N$ trasformazioni t aventi le stesse proprietà. Si noti che per la trasformazione generica t dianzi definita si ha $|t(\xi) - t(\xi')| \leqslant |\xi - \xi'|$, $|t(\xi) - \xi| \leqslant h$ per ogni $-\infty < \xi, \xi' < +\infty$ e $t(\xi)$ è costante nell'intervallo $(\xi_0 - h, \xi_0 + h)$. Pertanto $|T_i(x) - T_i(x')| \leqslant$ $\leqslant |x - x'|$, $|T_i(x) - x| \leqslant 3(2^{2i-2}\sigma)$ per ogni $x, x' \in E$ e T_i è costante nel cubo c_i di E di centro x_i e spigoli di lunghezza $2^{2i-1}\sigma$ paralleli agli assi, $(i =$ $= 1, 2, \ldots, N)$.

Per ogni x, $x' \in E$ si ha ora $|T_1(x) - T_1(x')| \leqslant |x - x'|$, $|T_2T_1(x) - T_2T_1(x')| \leqslant$ $\leqslant |T_1(x) - T_1(x')|$, ..., $|T_N \dots T_1(x) - T_N \dots T_1(x')| \leqslant |T_{N-1} \dots T_1(x) - T_{N-1} \dots T_1(x')|$ e quindi $|\tau(x) - \tau(x')| = |T_N \dots T_1(x) - T_N \dots T_1(x')| \leqslant |x - x'|$, ciò che dimostra a).

Per ogni $x \in E$ si ha $|T_1(x) - x| \leqslant 3\sigma$, $|T_2T_1(x) - T_1(x)| \leqslant 3 \cdot 2^2\sigma$, $|T_3T_2T_1(x) - T_2T_1(x)| \leqslant 3 \cdot 2^4\sigma$, ..., $|T_{i-1} \dots T_1(x) - T_{i-2} \dots T_1(x)| \leqslant 3 \cdot 2^{2i-4}\sigma$ e quindi $|T_{i-1} \dots T_1(x) - x| \leqslant 3\sigma(1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2i-4}) = (2^{2i-2} - 1)\sigma$, $(i = 2, 3, \dots, N + 1)$. In particolare $|\tau(x) - x| = |T_N \dots T_1(x) - x| \leqslant (2^{2N} - 1)\sigma = \varepsilon$ e ciò dimostra b).

Di più, se $x \in F_i$, allora $|x - x_i| \leqslant \sigma$, $|T_{i-1} \dots T_1(x) - x_i| \leqslant |T_{i-1} \dots T_1(x) - x| + |x - x_i| \leqslant (2^{2i-2} - 1)\sigma + \sigma = 2^{2i-2}\sigma$, cioè $T_{i-1} \dots T_1(x) \in c_i$, $T_iT_{i-1} \dots T_1(x) = x_i$ per ogni $x \in F_i$. Dunque $T_i \dots T_1(x)$ è costante in F_i e altrettanto accadrà per $\tau = T_N \dots T_i \dots T_1(x)$, ciò che dimostra c).

Se Δ è un triangolo rettilineo, $\Delta \subset E$, diciamo Δ_1, Δ_2, Δ_3 le parti di Δ con $x^1 \leqslant x_1^1 - h$, oppure $x_1^1 - h \leqslant x^1 \leqslant x_1^1 + h$, $x_1^1 + h < x^1$, $h = 2^{2i-2}\sigma = \sigma$, $i = 1$, allora t_{11} trasforma Δ_1, Δ_3 in parti Δ_1', Δ_3' identiche a Δ_1, Δ_3 e Δ_2 nella sua proiezione Δ_2' sul piano $x^1 = x_1^1$. Pertanto $a(\Delta_m') = a(\Delta_m)$, $(m = 1, 2)$; $a(\Delta_m') \leqslant a(\Delta_m)$ e infine $a(\Delta_{11}') \leqslant a(\Delta)$ se $\Delta_{11}' = t_{11}(\Delta)$. Poichè τ è il prodotto di $3N$ trasformazioni come t_{11}, risulta che $\Delta' = \tau(\Delta)$ è una superficie poliedrica con $a(\Delta') \leqslant a(\Delta)$, ciò che dimostra d).

15. – Nel presente numero, per semplicità di notazioni, useremo la stessa lettera per indicare una trasformazione e insieme la superficie da essa definita. Così indicheremo con $L(T)$, $a(P)$ rispettivamente l'area di LEBESGUE della superficie definita dalla trasformazione T e l'area elementare della superficie poliedrica definita dalla trasformazione quasi lineare P, ove $T = (T, Q)$, $P = (P, Q)$ si penseranno definite nel quadrato fondamentale $Q = (0, 0; 1, 1)$ del piano. Dimostreremo il seguente

Lemma II. Siano Q il quadrato fondamentale del piano π, (T, Q) una trasformazione continua, $K \subset Q$ un continuo soddisfacente la condizione φ, (T_0, Q) la retrazione di T rispetto a K. Allora, per ogni intero n, si possono definire una trasformazione quasi lineare (P_n, Q) e una regione poligonale $R_n \subset Q$, soddisfacente la condizione φ (rispetto alla trasformazione P_n) tali che, se (P_{n0}, Q) è la retrazione di (P_n, Q) rispetto ad R_n, si ha $\lim P_n(u) = T(u)$, $\lim P_{n0}(u) = T_0(u)$ uniformemente in Q, $\lim a(P_n) = L(T)$, $\lim a(P_{n0}) = L(T_0)$, quando $n \to \infty$ e ove $a(P_{n0}) \leqslant a(P_n)$ per ogni n.

Dimostrazione. Sia $\{\gamma\}_K = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i, \dots\}$ la collezione dei componenti di $Q - K$. In forza del n. 2, possiamo supporre $\operatorname{diam} T(\gamma_i) \geqslant \operatorname{diam} T(\gamma_{i+1})$, $(i = 1, 2, \dots)$, e $\lim \operatorname{diam} T(\gamma_i) = 0$ quando $i \to \infty$. Sappiamo che T è costante sul continuo $F(\gamma_i)$, $(i = 1, 2, \dots)$, (n. 1), onde $F(\gamma_i) \subset g_i$, $g_i \in G(T, Q)$ (n. 1). Sappiamo poi che T_0 è costante su $\gamma_i + F(\gamma_i)$ e $T_0(u) =$

$= T(u)$ per ogni $u \in F(\gamma_i)$. Siano $x_i \in E$ i punti $x_i = T[F(\gamma_i)] = T_0[F(\gamma_i)]$, $(i = 1, 2, \dots)$.

Per ogni intero n, sia $N = N(n)$ il più piccolo intero tale che diam $T(\gamma_i) < 1/(3n)$ per ogni $i > N$. Siano $[x]_n$, $[g]_n$, le collezioni dei punti x_i, $(i = 1, 2, \dots, N)$, e dei continui g_i, $(i = 1, 2, \dots, N)$, effettivamente distinti. Sia $\delta_n > 0$ la minima distanza dei continui $g \in [g]_n$. Siano σ_n, $0 < \sigma_n \leq 1/(3n)$, e τ_n il numero e la trasformazione definiti nel Lemma I relativamente alla collezione $[x]_n$ di punti di E e al numero $\varepsilon = 1/(3n)$.

Siano (P_n, Q), (P_{n0}, Q), $(n = 1, 2, \dots)$, due successioni di trasformazioni quasi lineari qualsiasi tali che, per ogni n, si abbia

$$(1) \qquad \begin{cases} |P_n(u) - T(u)| \leq \sigma_n/3 \quad \text{per ogni } u \in Q, \quad a(P_n) < L(T) + 1/n\,, \\ |P_{n0}(u) - T_0(u)| \leq \sigma_n/3 \text{ per ogni } u \in Q, \quad a(P_{n0}) < L(T_0) + 1/n\,. \end{cases}$$

Possiamo allora definire le nuove trasformazioni quasi lineari (P'_n, Q), (P'_{n0}, Q), ponendo $P'_n = \tau_n P_n$, $P'_{n0} = \tau_n P_{n0}$. In tal modo si avrà, per ogni n e $u \subset Q$,

$$(2) \qquad |P'_n(u) - P_n(u)| \leq 1/(3n)\,, \qquad |P'_{n0}(u) - P_{n0}(u)| \leq 1/(3n)\,, \qquad u \in Q\,.$$

Per ogni n possiamo scegliere una unica suddivisione $\mathcal{R}_n$ di Q in triangoli rettilinei t così piccoli che P_n e P_{n0} siano entrambe lineari in ogni $t \in \mathcal{R}_n$ e inoltre si abbia diam $t < \delta_n/3$, diam $T(t) < \sigma_n/3$, diam $T_0(t) < \sigma_n/3$, per ogni $t \in \mathcal{R}_n$. Diciamo allora R_n la regione poligonale, $R_n \subset Q$, di tutti i triangoli $t \in \mathcal{R}_n$ che contengono nel loro interno o sul loro contorno punti di K. Intanto R_n è un continuo, $K \subset R_n \subset Q$, e di più una regione poligonale ([5]). Anche $Q - R_n$ è la somma di un numero finito di regioni poligonali r_{nh}, $(h = 1, 2, \dots, M)$, $M = M(n)$, ove $r_{nh} \subset \gamma_i$ per un qualche $i = 1, 2, \dots$. Diciamo r_{nh}, $(h = 1, 2, \dots, M')$, $M' = M'(n) \leq M(n)$, quelle sole regioni r_{nh} che

---

([5]) Si dice che $R \subset \pi$ è una regione poligonale se $R = p - (p_1 + \dots + p_\nu)^0$, ove $p_0, \dots, p_\nu$, $(\nu \geq 0)$, sono poligoni semplici e chiusi e $p^0 \supset p_i$, $p_i p_j = 0$, $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \dots, \nu)$. Con I^0 si indica qui l'insieme dei punti interni di un insieme I. Riguardo alla costruzione elementare della regione R del testo si noti quanto segue. Anzitutto si prenda per $\mathcal{R}_n$ una suddivisione tale che ogni due triangoli (chiusi) $t, t' \in \mathcal{R}_n$, con $tt' \neq 0$, abbiano un vertice oppure un intero lato in comune. Se $[t]$ è la collezione dei triangoli (chiusi) $t \in \mathcal{R}_n$, con $tK \neq 0$, e dividiamo $[t]$ in gruppi ponendo $t, t' \in [t]$ in uno stesso gruppo solo e soltanto se esiste una catena $t = t_0, t_1, \dots, t_s = t'$ di triangoli di $[t]$ tale che due qualunque triangoli consecutivi sono adiacenti, allora ogni gruppo ricopre un insieme connesso $M = p_0 - (p_1 + \dots + p_\nu)^0$, ove $p_0 \supset p_i$, $p_i^0 p_j^0 = 0$ (vedasi [2, pag. 27] ove il ragionamento è fatto per quadrati). Poichè la frontiera in Q di ciascun insieme M non contiene punti di K e K è un continuo, si ha un solo insieme M e tale insieme può sempre essere ridotto ad una regione poligonale con la modifica indicata in [2, pag. 50].

sono contenute in un γ_i con $i = 1, 2, \ldots, N$. Diciamo R'_n la regione poligonale

$$R'_n = Q - \sum_{h=1}^{M'} r_{nh} = R_n + \sum_{h=M'+1}^{M} r_{nh}, \qquad K \subset R_n \subset R'_n \subset Q .$$

Ciascun $F(r_{nh})$ è un continuo (non nullo) e precisamente una poligonale semplice (chiusa o aperta), somma di un numero finito di lati λ di triangoli $t \in \mathcal{R}_n$, e ogni λ appartiene ad un triangolo t contenente punti di r_{nh} e punti di un $F(\gamma_i)$ e perciò di qualche continuo g_i, $(i = 1, 2, \ldots)$. Se poi $h = 1, 2, \ldots, M'$, allora $g_i \in [g]$ e poichè diam $t < \delta_n/3$, t contiene punti di un solo $g_i \in [g]$. Di più lati λ consecutivi di un $F(r_{nh})$, $(h = 1, 2, \ldots, M')$ appartengono a triangoli t contenenti punti di uno stesso continuo $g \in [g]$. Cioè per ogni r_{nh}, $(h = 1, 2, \ldots, M')$, i lati λ di $F(r_{nh})$ appartengono a triangoli t che contengono punti di un solo $g \in [h]$. Ciò assicura che per ogni $u \in F(r_{nh})$, $(h = 1, 2, \ldots, M')$, si ha $|T(u) - T(g)| <$ diam $T(t) < \sigma_n/3$, $T_0(u) = T_0(g)$, $T(g) = T_0(g) = x \in [x]$, e quindi $|T(u) - x| < \sigma_n/3$, $T_0(u) = x$, e ancora, utilizzando le (1), $|P_n(u) - x| < \sigma_n/3 + \sigma_n/3 < \sigma_n$, $|P_{n0}(u) - x| < \sigma_n/3 + 0 < \sigma_n$. Infine (Lemma I) $P'_n(u) = P'_{n0}(u) = x' = \tau_n(x) =$ costante per ogni $u \in F(r_{nh})$, $(h = 1, 2, \ldots, M')$. Ciò assicura che il continuo R'_n soddisfa la condizione $\mathcal{D}$ rispetto a P'_n così come rispetto a P'_{n0} ed esistono perciò (n. 1) le retrazioni (elementari) (P''_n, Q), (P''_{n0}, Q) delle trasformazioni P'_n, P'_{n0} rispetto ad R_n. Notiamo che

$$(3) \qquad a(P''_n) \leqslant a(P'_n) \leqslant a(P_n), \qquad a(P''_{n0}) \leqslant a(P'_{n0}) \leqslant a(P_{n0}) .$$

Notiamo inoltre che per ogni $u \in Q$, in forza delle (1) e (2), si ha $|P'_n(u) - T(u)| \leqslant |P'_n(u) - P_n(u)| + |P_n(u) - T(u)| \leqslant 1/(3n) + \sigma_n/3 < 2/(3n)$ e analogamente $|P'_{n0}(u) - T_0(u)| \leqslant 2/(3n)$, ossia, uniformemente in Q,

$$(4) \qquad T(u) = \lim_{n\to\infty} P'_n(u), \qquad T_0(u) = \lim_{n\to\infty} P'_n(u) .$$

Pertanto $L(T) \leqslant \underline{\lim}\, a(P'_n)$, $L(T_0) \leqslant \underline{\lim}\, a(P'_{n0})$ e, in forza delle (1) e (3),

$$(5) \qquad L(T) = \lim_{n\to\infty} a(P'_n), \qquad L(T_0) = \lim_{n\to\infty} a(P'_{n0}).$$

Per ogni $u \in K$ si ha $|P''_n(u) - T_0(u)| = |P'_n(u) - T(u)| < 1/n$, $T(u) = T_0(u)$. Per ogni $u \in R_n - K$ si ha $u \in t$, $t \in \mathcal{R}_n$, $tK \neq 0$, diam $T(t) < \sigma_n/3$, diam $T_0(t) < \sigma_n/3$, onde, se $v \in tK$, utilizzando le (1) e (2) si ha $|P''_n(u) - T_0(u)| \leqslant |P''_n(u) - P'_n(u)| + |P'_n(u) - P_n(u)| + |P_n(u) - T(u)| + |T(u) - T(v)| + |T(v) - T_0(v)| + |T_0(v) - T_0(u)| \leqslant 0 + 1/(3n) + \sigma_n/3 + 1/(3n) + 0 + 0 < 1/n$; $|T(u) - T_0(u)| \leqslant 1/(3n) + 0 + 0 = 1/(3n)$. Per ogni $u \in R'_n - R_n$ si ha $u \in r_{nh}$, $r_{nh} \subset \gamma_i$, $i > N$, diam $T(\gamma_i) < \sigma_n/3$, diam $T_0(\gamma_i) = 0$, onde, se $v \in F(\gamma_i)$, si ha

$v \in K$ e valgono le stesse relazioni. Per ogni $u \in Q - R'_u$ si ha $u \in r_{nh}$, $r_{nh} \subset \gamma_i$, $(i = 1, 2, \dots, N)$, onde diam $P''_n(r_{nh}) =$ diam $P''_{n0}(r_{nh}) = 0$ e, se $v \in F(r_{nh})$, allora $v \in R'_n - R_n$ e infine $|P''_n(u) - T_0(u)| \leqslant |P''_n(u) - P''_n(v)| + |P''_n(v) - T_0(v)| + |T_0(v) - T_0(u)| \leqslant 0 + 1/n + 0 = 1/n$. Dunque $|P''_n(u) - T_0(u)| \leqslant 1/n$, per ogni $u \in Q$; $|T(u) - T_0(u)| \leqslant 1/(3n)$ per ogni $u \in R'_n$. Lo stesso ragionamento prova anche che $|P''_{n0}(u) - T_0(u)| \leqslant 1/n$ per ogni $u \in Q$ e quindi, uniformemente in Q, si ha

$$T_0(u) = \lim_{n \to \infty} P''_n(u) = \lim_{n \to \infty} P''_{n0}(u) . \tag{6}$$

Pertanto $L(T_0) \leqslant \underline{\lim}\, a(P''_n)$, $L(T_0) \leqslant \underline{\lim}\, a(P''_{n0})$ e, in forza delle (1) e (3), la seconda diventa $L(T_0) = \lim a(P''_{n0})$ quando $n \to \infty$. Dimostriamo che

$$L(T_0) = \lim a(P''_n) . \tag{7}$$

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che ciò non sia. Allora $L(T_0) < + \infty$ ed esistono un numero $\eta > 0$ e infiniti n con

$$L(T_0) + \eta \leqslant a(P''_n) . \tag{8}$$

Per gli stessi n consideriamo la trasformazione (P^*_n, Q) continua e quasi lineare definita ponendo $P^*_n(u) = P'_n(u)$ per ogni $u \in Q - R'_n$; $P^*_n(u) = P'_{n0}(u) = P''_{n0}(u)$ per ogni $u \in R'_n$. Essendo P'_n, P'_{n0}, P''_{n0} identici su ogni $F(r_{nh})$, $(h = 1, 2, \dots, M')$, la trasformazione P^*_n è continua in Q. D'altra parte $|P^*_n(u) - T(u)| = |P'_n(u) - T(u)| < 2/(3n)$ per ogni $u \in Q - R'_n$; $|P^*_n(u) - T(u)| \leqslant |P'_{n0}(u) - T_0(u)| + |T_0(u) - T(u)| < 2/(3n) + 1/(3n) = 1/n$ per ogni $u \in R'_n$. Dunque $T(u) = \lim P^*_n(u)$ uniformemente in Q per $n \to \infty$ e quindi $L(T) \leqslant \underline{\lim}\, a(P^*_n)$. Notiamo ora che, in forza delle (1), (3) e (8), si ha

$$a(P^*_n) = a(P'_n) - a(P''_n) + a(P''_{n0}) \leqslant$$

$$\leqslant [L(T) + 1/n] + [- L(T_0) - \eta] + [L(T_0) + 1/n] = L(T) + 2/n - \eta$$

e quindi $L(T) \leqslant L(T) - \eta$, $\eta > 0$, ciò che è impossibile se $L(T) < + \infty$. La (7) è così dimostrata. In forza delle prime relazioni (3), (4), (5), (6) e della (7), le trasformazioni (P'_n, Q), (P''_n, Q), la seconda retrazione della prima rispetto ad R'_n, verificano il Lemma II. Se $L(T) = + \infty$, allora si definisca P^*_n come sopra e si noti che $+ \infty = L(T) = \lim a(P^*_n)$. D'altra parte P''_{n0} è la retrazione di P^*_n rispetto ad R'_n e di più, come si è visto avanti, $L(T_0) = \lim a(P''_{n0})$. Pertanto il Lemma II è dimostrato anche per $L(T) = + \infty$.

16. – La seguente proposizione è una immediata conseguenza del Lemma II: Se (T_0, J) è una qualunque retrazione di (T, J) e S_0: (T_0, J), S: (T, J), allora $L(S_0) \leqslant L(S)$.

Notiamo qui che i ragionamenti dei nn. 14, 15 sono simili a quelli usati in [**1**, b].

17. – Dimostriamo il Teorema III. Allo scopo ricordiamo che la funzione $f(x, p)$ che compare nell'integrale $\mathcal{J}(S) = \iint_S f(x, p)\, du$ si suppone soddisfacente alle seguenti sole condizioni [**1**, c]:

1) $f(x, p)$, $x = (x^1, x^2, x^3)$, $p = (p^1, p^2, p^3)$, è continua in (x, p) per ogni x appartenente ad un dato insieme chiuso $A \in E$ e per ogni $|p| \neq 0$.

2) $f(x, tp) = tf(x, p)$ per ogni $x \in A$, $|p| \neq 0$, $t > 0$.

Inoltre $\mathcal{J}$ è supposto semidefinito positivo, ossia $f \geqslant 0$ per ogni $x \in A$, $|p| \neq 0$. Si deve anche intendere, nell'enunciato del Teorema III, che la superficie S sia contenuta in A, ossia $[S] = T(J) \in A$.

Notiamo che se (T_0, J) è la retrazione di (T, J) rispetto ad un continuo $K \subset A$ e soddisfacente alla condizione $\mathcal{D}$ (rispetto a T), se trasformiamo J in un'altra regione J' mediante un omeomorfismo H, e se $T' = TH^{-1}$, $T_0' = T_0 H^{-1}$, $K' = H(K)$, allora anche $K' \subset J'$ è un continuo, K' soddisfa la condizione $\mathcal{D}$ (rispetto a T') e T_0' è la retrazione di T rispetto a K'. Inoltre T, T', nonchè T_0, T_0' rappresentano le stesse superficie S, S_0 e sappiamo [**1**, c, § 3] che $\mathcal{J}$ dipende solo da S e S' e non dalla loro rappresentazione. Ciò assicura che possiamo supporre $J = Q$, quadrato fondamentale in π.

Supponiamo dapprima che S sia tutta costituita di punti interni di A. Allora se (P_n, Q), (P_{n0}, Q), $(n = 1, 2, \ldots)$, sono le trasformazioni quasi lineari del Lemma II, esiste un $\bar{n}$ tale che per ogni $n \geqslant \bar{n}$, è pure $P_n(Q) \subset A$, $P_{n0}(Q) \subset A$. D'altra parte le trasformazioni P_n, P_{n0} sono quasi lineari, l'integrale $\mathcal{J}$ è semidefinito positivo e perciò, elementarmente, $\mathcal{J}(P_{n0}) \leqslant \mathcal{J}(P_n)$ (cfr. [**1**, c, § 5]). Valendo la tesi del Lemma II, in forza di un precedente teorema [**1**, c, § 4] si ha

$$\mathcal{J}(S) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(P_n)\,, \qquad \mathcal{J}(S_0) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(P_{n0})$$

e quindi $\mathcal{J}(S_0) \leqslant \mathcal{J}(S)$.

Supponiamo ora che S non sia interamente costituita di punti interni ad A. Intanto diciamo A', $T(J) \subset A' \subset A$, una parte limitata e chiusa di A contenente $T(J)$ (eventualmente $A' = A$). Allora $f(x, p)$ è continua nell'insieme chiuso e limitato dei punti (x, p) con $x \in A'$, $|p| = 1$. Per un teorema di E. J. McShane [**3**] esiste una funzione $f_0(x, p)$ continua per ogni $x \in E$, $|p| = 1$, coincidente con $f(x, p)$ per ogni $x \in A'$, $|p| = 1$. Si può inoltre assumere $f_0(x, p) \geqslant 0$ per ogni $x \in E$, $|p| = 1$, dato che $f(x, p)$ ha già tale proprietà per ogni $x \in A'$, $|p| = 1$. Porremo ora $f_0(x, p) = |p| f_0(x, p/|p|)$ per ogni $x \in E$, $|p| \neq 0$, cosicchè $f_0(x, p)$ soddisfa le condizioni 1), 2) viste sopra per ogni $x \in E$, $|p| \neq 0$ e coincide con $f(x, p)$ per ogni $x \in A'$, $|p| \neq 0$. Di più $f_0(x, p) \geqslant 0$, per ogni $x \in E$, $|p| \neq 0$. Diremo ora $\mathcal{J}_0(S)$ l'integrale $\iint\limits_S f_0(x, p)\, du$ e per questo integrale l'insieme A coincide con E. Allora valgono le precedenti considerazioni e si ha $\mathcal{J}_0(S_0) \leqslant \mathcal{J}_0(S)$. D'altra parte $[S_0] \subset [S] \subset A'$ e perciò $\mathcal{J}_0(S_0) = \mathcal{J}(S_0)$, $\mathcal{J}_0(S) = \mathcal{J}(S)$ e perciò $\mathcal{J}(S_0) \leqslant \mathcal{J}(S)$.

Osservazioni.

18. – Diremo che un continuo $K \subset J$ soddisfa la condizione $\mathcal{D}'$ rispetto ad una trasformazione (P, J) se per ogni $g \in G(T, J)$ con $gK \neq 0$ risulta $g \subset K$. Si può vedere con esempi che un continuo K pur soddisfacendo la condizione $\mathcal{D}$ può non soddisfare la condizione $\mathcal{D}'$ e viceversa. Mostriamo qui che dato un continuo $K \subset J$ soddisfacente $\mathcal{D}$ si può sempre definire un continuo K', $K \subset K' \subset J$, soddisfacente $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ e tale che, se (T_0, J) e (T_0', J) sono le retrazioni di (T, J) rispetto a K e K', T_0 e T_0' sono identiche, ossia $T_0(u) = T_0'(u)$ per ogni $u \in J$.

Poniamo $K' = K + \sum g$, ove la somma è estesa a tutti i continui $g \in G(T, J)$ con $gK \neq 0$ o, il che è lo stesso, a tutti i $g \in G$ con $gK \neq 0$, $g(J - K) \neq 0$. Dimostriamo che l'insieme K' è chiuso, $K \subset K' \subset J$. Sia u_0 un punto di accumulazione di K'. Se u_0 è punto di accumulazione di K, oppure di un qualche g con $gK \neq 0$, allora $u_0 \in K$, o $u_0 \in g$ e quindi $u_0 \in K'$. Altrimenti esiste una successione $[u_n]$ con $u_n \to u_0$, $u_n \in g_n$, $g_nK \neq 0$, $g_n \in G$. Se $v_n \in g_nK$, allora tutti i punti, diciamoli v, di accumulazione per la successione $[v_n]$ appartengono a K. Per il teorema di ZORETTI [2, pag. 38] l'insieme $k = \limsup g_n$ è un continuo, ed essendo G semicontinuo superiormente è $k \subset g$, $g \subset G$. Di più $u_0 \in g$, $v \in g$, e quindi $gK \neq 0$, onde $u_0 \subset K'$. È così dimostrato che K' è chiuso. L'insieme K' è evidentemente connesso e perciò, essendo chiuso, è un continuo. K' soddisfa evidentemente $\mathcal{D}'$.

Dimostriamo che K' soddisfa $\mathcal{D}$. Sia infatti γ' un qualunque componente di $J - K'$. Allora $\gamma' \subset \gamma$ ove $\gamma = \{\gamma\}_K$ e i punti di $F(\gamma')$ che non sono su $F(\gamma)$ sono interni a γ ed essendo $F(\gamma') \subset K'$, tali punti appartengono a continui g con $g\gamma \neq 0$, $gK \neq 0$, onde anche $gF(\gamma) \neq 0$. Ora $F(\gamma) \subset g_0$, $g_0 \in G$ e perciò $gg_0 \neq 0$ onde $g = g_0$. Perciò $F(\gamma') \subset g_0$ e T è costante su $F(\gamma')$, cioè K' soddisfa $\mathcal{D}$.

Dimostriamo che T_0 e T_0' sono identiche. Intanto $T_0'(u) = T_0(u) = T(u)$ per ogni $u \subset K$. Sia ora $u \subset J - K$ onde $u \subset \gamma$, $\gamma \in \{\gamma\}_K$. Allora $T_0(u) =$

$= T[F(\gamma)] = T(g_0)$, ove $F(\gamma) \subset g_0$. D'altra parte, se $u \in K' - K$, allora $u \in g$ con $g\gamma \neq 0$, $gK \neq 0$, onde, come sopra, $gg_0 \neq 0$, $g = g_0$, $T_0'(u) = T(u) = T(g_0)$; se $u \in J - K'$, allora $u \in \gamma'$, $\gamma' \subset \gamma$, $T_0'(u) = T[F(\gamma')] = T(g_0)$. In ogni caso $T_0'(u) = T_0(u)$ per ogni $u \in J$.

19. – Le dimostrazioni note del Teorema I come la presente del Teorema II valgono senza alcuna modificazione anche se si suppone che i punti $x = T(u)$ appartengano ad uno spazio E molto più generale dello spazio euclideo ordinario, precisamente per ogni spazio topologico perfettamente separabile e regolare e pertanto metrizzabile ed effettivamente metrizzato [**7**, I, 5.3].

20. – In Topologia analitica si prova [cfr. **7**, VIII, 4.2] che ogni trasformazione continua $T = (T, J)$ ammette una fattorizzazione $T = LM$ in due fattori M ed L, ove M è una trasformazione monotona ed L una trasformazione mai stazionaria (in inglese *light*), ed ove l'insieme $\mathcal{M} = M(J)$ è un conveniente *insieme intermedio* (middle space in [**6**]) in uno spazio ausiliario (potendo esso stesso essere considerato uno spazio). Essendo J una 2-cella chiusa, gli elementi ciclici non degeneri di $\mathcal{M}$ sono tutti 2-celle $\mathcal{C}$ e 2-sfere $\mathcal{S}$ [**7**, IX, 2]. Poniamo $\Gamma = M(J^*)$, $\mathcal{B} = \Gamma + \sum \mathcal{C}$, ove la somma è estesa a tutte le 2-celle $\mathcal{C}$ di $\mathcal{M}$. Allora $\mathcal{B}$ è un insieme base, $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. La seguente ben nota proposizione è conseguenza delle varie definizioni [cfr. **7**, IX, 2]: Condizione necessaria e sufficiente affinchè (T, J) sia aperta non degenere, o chiusa non degenere, o di tipo A, è che sia $\mathcal{M} = \mathcal{C}$, $\mathcal{M} = \mathcal{S}$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}$ rispettivamente.

Sia ora K un insieme continuo $K \subset J$ soddisfacente alle condizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ (in forza del n. 18 possiamo sempre ridurci a questo caso). Allora l'insieme $\mathcal{H} = M(K)$ è un insieme A [**7**, IV, 3] contenuto in $\mathcal{M}$. Se diciamo μ la *retrazione* di $\mathcal{M}$ in $\mathcal{H}$ definita in [**7**; IV, 3.9; VII, 5.1] allora è facile riconoscere che $(T_0, J) = L\mu M$. Pertanto l'operazione di retrazione definita elementarmente nel n. 1 rientra nell'operazione generale di retrazione della Topologia analitica (cfr. anche [**6**]). Il Teorema I fu già provato da C. B. Morrey [**5**] da proposizioni di Topologia analitica ed è infatti conseguenza di ([7]; IX, 2 (Def.); IX, 2.4; IV, 3.9). Facendo uso di tali generali considerazioni e nell'ipotesi che K soddisfi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, l'attuale dimostrazione elementare del Teorema II (nn. 4-13) può essere così modificata. Si lascino inalterati i nn. 4-10 e si sostituiscano ai nn. 11-12 le seguenti considerazioni. Definiti gli archi $\lambda_n = a_n b_n = \lambda(g_n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, l'insieme $\mathcal{F}_n = M(g_n + \tilde{\gamma}_n)$ è un insieme A contenuto in $\mathcal{M}$, nonchè un insieme H [**7**, IV, 6] e $\mathcal{H} = M(K) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Pertanto $M(K)$, come prodotto di insiemi H è un insieme H [**7**, IV, 6.7] ed essendo chiuso, è un insieme A [**7**, IV, 6.81], $\mathcal{H} = M(K) \subset \mathcal{M}$. Di più $\mathcal{H}$, contenendo i punti $M(a_n) = M(b_n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, è non vuoto. Pertanto

[**7**, IV, 3.8] esiste una retrazione μ di $\mathcal{M}$ in $\mathcal{H}$ e quindi $T_0 = L\mu M$. Si dimostra poi che $M(K)$ non ha punti taglio (cut point) con lo stesso ragionamento usato nel n. 12 per dimostrare che per ogni $g \subset K$, $g \in G$, g non appartiene a G'. Finalmente il ragionamento alla fine del n. 12 assicura che μM è non costante su J^*. Pertanto $\mathcal{H} = \mu M(J) = M(K)$ è una 2-cella [**7**, IX, 2.41] ed essendo $\mathcal{H}$ lo spazio intermedio della trasformazione $T_0 = L(\mu M)$, risulta che T_0 è aperta non degenere. Il n. 13 della attuale dimostrazione del Teorema II rimane inalterato.

21. – L'enunciato del n. 16 può essere dedotto anche dal teorema di additività ciclica per l'area di LEBESGUE [**6**] in quanto che la collezione degli elementi ciclici relativa alla trasformazione (T_0, J) è contenuta nella collezione degli elementi ciclici relativa alla trasformazione (T, J) e le corrispondenti superficie non degeneri aperte o chiuse, σ, sono le stesse. Perciò se $\{\sigma\}_0$, $\{\sigma\}$ sono le collezioni di tutte le superficie di tale tipo relative a T_0 e a T si ha $\{\sigma\}_0 \subset \{\sigma\}$ e, per il teorema ricordato [**6**],

$$L(S_0) = \sum_{\sigma \in \{\sigma\}_0} L(\sigma), \qquad L(S) = \sum_{\sigma \in \{\sigma\}} L(\sigma)$$

e quindi $L(S_0) \leqslant L(S)$.

Bibliografia.

[1]. L. CESARI: a) *Sulle superficie di Fréchet,* Riv. Mat. Univ. Parma **1**, 19-44 (1950);

b) *Una uguaglianza fondamentale per l'area delle superficie,* Mem. Acc. Italia **14**, 891-951 (1944);

c) *La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica,* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **12**, 61-84 (1943);

d) *Condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica,* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **14**, 47-79 (1948);

e) *Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **29**, 199-224 (1950);

f) *An existence theorem of Calculus of Variations for integrals on parametric surfaces,* Am. J. Math. **74**, 265-295 (1952).

[2]. B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie.* Springer, Berlin 1923.

[3]. E. J. MCSHANE, *Extension of range of functions,* Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 837-842 (1934).

[4]. R. L. MOORE, *Foundations of point set theory,* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol 13, 1932.

[5]. C. B. MORREY, *The topology of (path) surfaces,* Amer. J. Math. **57**, 17-50 (1935).

[6]. T. RADÓ, *Length and area,* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 30, 1948.

[7]. G. T. WHYBURN, *Analytic topology,* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 28, 1942.