Luigi Muracchini (*)

Le varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore alla ordinaria. (**)

Parte I.

§ 1. - Introduzione.

1. - Una varietà a k dimensioni, V_k, immersa in uno spazio proiettivo S_r, $r > 2k$, possiede in generale ∞^k spazi S_k tangenti che ricoprono una varietà W di dimensione $2k$. Può accadere, per particolari V_k, che la relativa W abbia dimensione inferiore a $2k$. Il problema della determinazione di quelle particolari varietà ha interesse anche per altre questioni di Geometria proiettivo-differenziale; ciò è stato posto in rilievo da M. Villa nel corso di ricerche sulle curve quasi-asintotiche delle varietà (¹). Il Villa appunto mi ha consigliato di occuparmi di quel problema e nella presente Memoria espongo i risultati che ho ottenuto.

Il Terracini (²) ha iniziato la predetta ricerca stabilendo alcune proposizioni di fondamentale importanza ed ha risolto completamente la questione per $k = 3, 4$. Richiamerò succintamente i risultati ottenuti dal Terracini per poter precisare meglio i contributi che io stesso apporto nel presente lavoro.

Il Terracini ha dimostrato che:

Se la varietà W, relativa ad una V_k, ha dimensione $2k - l$, allora la V_k soddisfa a $d = \frac{1}{2} k(k-1) + l$ equazioni di Laplace *linearmente indipendenti*

(*) Indirizzo: Istituto Matematico S. Pincherle, Università, Bologna (Italia).

(**) Ricevuto il 30-VI-1951.

(¹) M. Villa, *Nuove ricerche sulla teoria delle curve quasi-asintotiche.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **18**, 275-308 (1939); M. Villa, *Ricerche sulle varietà V_k che posseggono ∞^δ E_2 di $\gamma_{1,3}$ con particolare riguardo al caso $k = 4$, $\delta = 8$.* Atti Accad. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **7**, 373-427 (1939).

(²) A. Terracini, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà.* Atti R. Accad. Sci. Torino: Nota I, **49**, 214-247 (1913-14); Nota II, **51**, 695-716 (1916); Nota III, **55**, 3-23 (1919-20).

oppure soddisfa ad un sistema di equazioni di LAPLACE *fra le quali meno di d sono linearmente dindipendenti, e però tale che il sistema delle forme quadratiche associate* (³) *ha un sistema apolare con matrice jacobiana nulla, di caratteristica $k-l$, e viceversa.*

Per ciò che riguarda le V_k, che rappresentano $\frac{1}{2}k(k-1)+l$ equazioni di LAPLACE l.i. (cioè linearmente indipendenti), il TERRACINI (⁴) ha dimostrato che:

Una V_k che soddisfi ad $\frac{1}{2}k(k-1)+l$ equazioni di LAPLACE *l.i. sta su di una varietà U_q, luogo di $\infty^h S_p$, con S_{2k-h-l}* (⁵) *tangente fisso lungo ogni S_p, essendo $0 \leqslant h \leqslant k-l$.*

Il problema di cui abbiamo detto in principio è così ridotto alla ricerca delle varietà V_k che rappresentano un sistena contenente $d<\frac{1}{2}k(k-1)+l$ equazioni di LAPLACE l.i. ed avente un sistema di forme quadratiche associate con sistema apolare a matrice jacobiana di caratteristica $k-l$. Si presentano pertanto le due questioni:

(a) determinare tutti i sistemi lineari di forme quadratiche, in k variabili (ossia sistemi lineari di quadriche di uno S_{k-1}), la cui matrice jacobiana è identicamente nulla di caratteristica $k-l$.

(b) determinare le V_k che rappresentano quei sistemi di equazioni di LAPLACE, che si deducono da (a) in base alla proposizione del TERRACINI (o, come si suol dire, integrare quei sistemi).

A queste due questioni il TERRACINI ha apportato, nei lavori citati in (²), i seguenti contributi:

1) Ha dimostrato che il numero d delle equazioni di LAPLACE, linearmente indipendenti, a cui deve soddisfare la V_k è tale che

$$lk-\frac{l(l-1)}{2} \leqslant d \leqslant \frac{k(k-1)}{2}+l-1\,, \tag{1}$$

sicchè, riguardo alla questione (a) è sufficiente determinare quei sistemi lineari

---

(³) Alla equazione alle derivate parziali, del secondo ordine, lineare ed omogenea (equazione di LAPLACE) $\sum_{i,j} a_{ij}x^{(ij)}+\sum_{r} a_r x^{(r)}+ax=0$ $(i, j, r=1, \dots, k)$ si associa [cfr. TERRACINI, op. cit. in (²)] la forma quadratica $\sum_{i,j} a_{ij}\theta_i\theta_j=0$, nelle variabili $\theta_1, \dots, \theta_k$.

(⁴) A. TERRACINI, *Sulle V_5 che rappresentano più di $(1/2)k(k-1)$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti.* Rend. Circ. Mat. Palermo **33**, 176-186 (1912).

(⁵) Ossia: Gli S_q sangenti nei punti di uno S_p stanno in uno S_{2k-h-l}.

di quadriche la cui dimensione δ soddisfa a

$$(2) \qquad k - l \leqslant \delta \leqslant \frac{(k-l-1)(k-l+2)}{2} .$$

2) Ha dimostrato poi che la sezione, con un generico iperpiano di S_{k-1}, di un sistema lineare di quadriche [di dimensione δ soddisfacente a (2)] a matrice jacobiana identicamente nulla di caratteristica $k-l$, è un sistema lineare (ancora di dimensione δ) di quadriche dello S_{k-2} segante, anch'esso a matrice jacobiana identicamente nulla di caratteristica $k-l$. Ne risulta che la questione (a) si riduce alla ricerca dei sistemi lineari di quadriche dello S_{k-1} di dimensione δ, con

$$(3) \qquad k - 1 \leqslant \delta \leqslant \frac{(k-2)(k+1)}{2}$$

a matrice jacobiana identicamente nulla di caratteristica $k-1$. Per il caso $l > 1$ basterà procedere per ricorrenza dallo S_{k-2} allo S_{k-1}.

3) Infine ha dimostrato che, per $\delta = \frac{(k-l-1)(k-l-2)}{2}$ [valore estremo superiore per δ, secondo la (2)], il sistema di quadriche è la totalità degli S_{l-1}-coni di dato S_{l-1}-vertice nello S_{k-1} Il sistema apolare duale è la totalità delle quadriche di S_{k-1} che passano per uno S_{k-l-1} (di dimensione $lk - \frac{l(l-1)}{2} - 1$).

Nel caso $k = 4$, il Terracini si serve di un lavoro del Bonferroni nel quale sono determinati i sistemi lineari di quadriche dello S_3 a matrice jacobiana identicamente nulla di caratteristica 3.

Il Terracini ha poi integrato i sistemi di equazioni di Laplace, ottenuti per il caso $k = 4$, ed anche alcuni sistemi con k qualunque (che verranno menzionati di volta in volta nel seguito). Egli si è servito di considerazioni di varia natura, poggiando essenzialmente sul fatto che dalle equazioni del sistema non se ne possono dedurre altre indipendenti da quelle del sistema stesso. In questo lavoro sfrutteremo in sostanza le stesse considerazioni (opportunamente modificate) che, del resto, sono state sfruttate anche da altri per risolvere questioni di integrazione di sistemi di equazioni alle derivate parziali, lineari ed omogenee.

Sono ora in grado di precisare meglio ciò che faccio nel presente lavoro. Nel § 2 si dimostrano alcune proposizioni sui sistemi lineari di quadriche di S_{k-1}. Si determinano poi i sistemi lineari di quadriche di S_3 [la cui dimensione soddisfa la (2)] a matrice jacobiana identicamente nulla di caratteristica 4 oppure 3. Nei §§ 3, 4 si integrano diversi sistemi di equazioni di LAPLACE, determinando tutte le V_5, per cui la W ha dimensione inferiore a 10, che soddisfano a meno di 12 o di 11 (a seconda che la W ha dimensione 8 oppure 9) equazioni di LAPLACE. Si determinano poi diverse classi di V_k del tipo di cui s'è detto, dando risposta, fra l'altro, ad una questione segnalata dal TERRACINI (6). Il § 4 costituirà la Parte II del presente lavoro.

§ 2. – Alcune proposizioni sui sistemi lineari di quadriche.

2. – In uno spazio S_{k-1} consideriamo un sistema lineare Σ_δ, ∞^δ, di quadriche con $k-1 \leqslant \delta \leqslant \frac{(k-2)(+1)k}{2}$, a matrice jacobiana identicamente nulla di caratteristica $k-1$ (7) Gli S_{k-2} polari di un punto generico P dello S_{k-1} passano allora tutti per un punto P' (e non per uno spazio S_l con $l>0$) ed uno solo (8); si ha così in S_{k-1} una corrispondenza T (nella quale a P corrisponde P' involutoriamente per la legge di reciprocità delle polari) la quale potrà essere non degenere (e generalmente biunivoca) oppure potrà essere tale che ai punti dello S_{k-1} corrispondano soltanto i punti di una V_h, $h \leqslant k-2$, mentre ad un punto della V_h corrispondono tutti i punti di uno spazio lineare (9), Ciò premesso, osserviamo in primo luogo che:

Se il sistema Σ_δ di S_{k-1}, a $J \equiv 0$ di caratteristica $k-1$, non è costituito da coni (S_0-coni) col vertice in comune (10), *il sistema lineare Σ' ottenuto segando Σ_δ con generico S'_{k-2} è tale che la relativa jacobiana J' è una V'_{k-3}* (11).

Intanto la dimensione di Σ' è ancora δ, perchè [cfr. TERRACINI, op. cit. in (2)] un generico S'_{k-2} dello S_{k-1} non fa parte di nessuna quadrica di Σ_δ. Si consideri poi la corrispondenza T, nello S_{k-1}, determinata come s'è detto prima da Σ_δ; se quella non è degenere allo S'_{k-2} secante farà corrispondere

(6) Vedasi Nota II citata in (2), a pag. 707 nota (8).

(7) Indicheremo d'ora in poi con J la matrice jacobiana di un sistema lineare di quadriche. Scriveremo $J \equiv 0$, di caratteristica $k-l$, per indicare che la matrice jacobiana è identicamente nulla e di caratteristica $k-l$. Così pure, nella seconda parte, scriveremo e.d.L.l.i. per indicare «equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti».

(8) E viceversa, come si vede facilmente.

(9) Di dimensione $k-h-1$, com'è subito visto, se ha da essere $J \equiv 0$.

(10) È subito visto che un sistema lineare di S_0-coni col vertice in comune è a matrice jacobiana identicamente nulla di caratteristica $k-1$.

(11) La jacobiana di un sistema lineare di quadriche [cfr. anche BONFERRONI, op. cit. in (13)] è quella varietà i cui punti annullano i minori d'ordine massimo estratti dalla matrice jacobiana del sistema. Per un sistema lineare dello S'_{k-2}, di dimensione $\delta \geqslant k-1$, quella varietà non è, in generale, di dimensione $k-3$.

una V_{k-2}, segata dallo S'_{k-2} stesso secondo una V'_{k-3} ([12]). È chiaro (per la legge della sezione delle polari) che quella V'_{k-3} è la varietà jacobiana del sistema Σ'_δ di S'_{k-2}. Se poi T è degenere, dovranno corrispondere ai punti dello S_{k-1} i punti di una V_h e, per ipotesi, è $k > 0$. L'S'_{k-2} sega V_h secondo una V'_{h-1} ai punti della quale corrispondono, entro l'S'_{k-2}, spazi S_{k-h-2} la cui totalità costituisce una varietà di dimensione $k-h-2+h-1$, ossia una V'_{k-3}, manifestamente jacobiana di Σ'.

La precedente osservazione ci permetterà di ottenere tutti i sistemi lineari di quadriche di S_4, di dimensione compresa fra 4 e 9 ed a $J \equiv 0$ di caratteristica 4, deducendoli dai sistemi lineari di quadriche di S_3 la cui jacobiana è una superficie. Questi ultimi sistemi trovansi già determinati in un lavoro di BONFERRONI ([13]).

Dimostreremo prima la seguente proposizione (non necessaria per lo scopo detto prima, ma relativa a valori qualsiasi di k):

Un sistema lineare Σ_δ di quadriche dello S_{k-1}, a $J \equiv 0$ di caratteristica $k-1$, per cui sia

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2} + 1 \leqslant \delta \leqslant \frac{(k-2)(k+1)}{2}, \tag{4}$$

è necessariamente costituito da coni (S_0-coni) col vertice in comune.

Dimostreremo questa proposizione per induzione da S_{k-2} ad S_{k-1}, il risultato essendo acquisito per $k=4$ [cfr. BONFERRONI, op. cit. in ([13])]. Osserviamo intanto che di Σ_δ fanno certamente parte quadriche spezzate in due S_{k-2}. Infatti la totalità delle quadriche spezzate di S_{k-1} è ∞^{2k-2} e poichè

$$\delta + 2k - 2 \geqslant \frac{(k-1)(k-2)}{2} + 2k - 1 = \frac{(k-1)(k+2)}{2} + 1$$

e la totalità delle quadriche di S_{k-1} ha dimensioni $\frac{(k-1)(k+2)}{2}$, si conclude che Σ_δ contiene quadriche spezzate. Sia S'_{k-2} un iperpiano di S_{k-1} per cui passi qualche quadrica di Σ_δ; supponiamo, in primo luogo, che per quello S'_{k-2} non passino più di ∞^{k-3} quadriche di Σ_δ. Segando Σ_δ con l'S'_{k-2} si otterrà in questo un sistema lineare $\Sigma'_{\delta'}$ con

$$\delta' \geqslant \delta - (k-3) - 1 \geqslant \frac{(k-1)(k-2)}{2} + 1 - k + 2 = \frac{(k-2)(k-3)}{2} + 1 . \tag{5}$$

([12]) È chiaro che la V_{k-2} non può sempre coincidere con l'S'_{k-2}, nel qual caso la sezione sarebbe l'S'_{k-2} stesso e non una V'_{k-3}.

([13]) C. E. BONFERRONI, *Sui sistemi lineari di quadriche la cui jacobiana ha dimensione irregolare*, Atti Accad. Sci. Torino **50**, 423-438 (1915).

Il sistema $\Sigma'_{\delta'}$ deve essere, com'è subito visto, a $J' \equiv 0$ di caratteristica $k-2$ ([14]) e quindi, in virtù della (5) e ammesso vero il teorema enunciato per l'S'_{k-2}, costituito di coni col vertice O in comune. Ne segue che le quadriche di Σ_δ sono tutte tangenti in O allo S'_{k-2}; vi sono dunque, in Σ_δ, $\infty^{\delta-1}$ coni di vertice O, avendosi

$$\delta + \frac{(k-2)(k+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = \delta - 1.$$

ed essendo $\frac{k(k-1)}{2}$ la dimensione del sistema di tutte le quadriche di S_{k-1} tangenti in O ad S'_{k-2} e $\frac{(k-2)(k+1)}{2}$ quella del sistema di tutti i coni di S_{k-1} di vertice O. Gli $\infty^{\delta-1}$ coni di vertice O di Σ_δ non possono essere S_i-coni con l'S_i-vertice comune (passante per O) e con $i > 0$, perchè la totalità degli S_i-coni di dato S_i-vertice in S_{k-1} ha dimensione inferiore a $\delta - 1$. Dunque gli iperpiani polari di un punto generico dello S_{k-1} rispetto agli $\infty^{\delta-1}$ coni di Σ_δ passano per O, avendo, in generale, solo quel punto in comune e pertanto dovranno passare per O anche gli iperpiani polari di P rispetto a tutte le altre quadriche di Σ_δ; ciò implica che tutte quelle quadriche sono coni di vertice O.

In secondo luogo, supponiamo che per l'S'_{k-2} passino più di ∞^{k-3} quadriche di Σ_δ; ne passeranno allora ∞^{k-2} e non più (altrimenti uno S_{k-2} generico di S_{k-1} farebbe parte di qualche quadrica di Σ_δ). Gli ∞^{k-2} S_{k-2}, diversi dallo S'_{k-2}, che insieme a questo formano le ∞^{k-2} quadriche di Σ_δ, passeranno tutti per un punto O ([15]). Gli ∞^{k-3} fra quegli S_{k-2}, che passano per un generico punto P di S_{k-1} dovranno dunque passare tutti per la retta OP. Ne discende che nella corrispondenza T, considerata in principio, ad un punto generico P di S_{k-1} corrisponde un punto P' della retta OP, sulla quale, se T non è degenere, rimane subordinata una involuzione di cui O è punto doppio. Il luogo dei punti doppi, diversi da O, delle involuzioni subordinate nel modo anzidetto sulle rette uscenti da O è allora una V_{k-2} che deve essere base per Σ_δ; ma, dato il valore di δ è impossibile che vi sia una V_{k-2} base. Deve dunque

([14]) Se la caratteristica fosse $< k-2$, ad es. $k-3$, segando il sistema $\Sigma'_{\delta'}$ con un generico S_{k-3} dello S'_{k-2} si otterrebbe un sistema Σ'' nello S_{k-3} di dimensione δ' a $J \equiv 0$ di caratteristica $k-3$, costituito perciò (in virtù del teorema enunciato, supposto vero in S_{k-3}) da S_0 - coni col vertice in comune. Allora $\Sigma'_{\delta'}$ dovrebbe essere costituito da S_1 - coni con l'S_1 - vertice in comune; ma la totalità degli S_1 - coni di S'_{k-2} con dato S_1 vertice ha dimensione inferiore a δ'. Non può dunque essere la caratteristica di J' inferiore a $k-2$.

([15]) Perchè imporre alla generica quadrica di Σ_δ di passare per l'S'_{k-2} comporta sole condizioni lineari nei parametri del sistema.

essere T degenere ed al punto P, generico di S_{k-1}, deve corrispondere il punto fisso O, da ciò segue che Σ_δ è costituita da coni di vertice O. La proposizione è così dimostrata.

Nel caso $k=5$, dalla precedente proposizione segue che i sistemi lineari di quadriche dello S_4, di dimensione 7, 8, 9, a $J\equiv 0$ di caratteristica 4, sono necessariamente costituiti da S_0-coni col vertice in comune.

Passiamo ora a determinare i sistemi lineari di quadriche dello S_4, di dimensioni $\delta=4, 5, 6$, a $J\equiv 0$ di caratteristica 4 ([16]). All'uopo ci serviamo della prima osservazione di questo paragrafo. Dal lavoro di Bonferroni citato in ([13]), sappiamo che i sistemi lineari di quadriche dello S_3, di dimensione $\delta=4, 5, 6$ per i quali la jacobiana è una superficie, sono:

(a) sistemi con conica base,
(b) sistemi con quattro punti base complanari (tre dei quali mai allineati) ([17]),
(c) sistemi con punto e piano polare fissi (cioè sistemi ∞^δ contenenti $\infty^{\delta-1}$ coni col vertice comune),
(d) sistemi contenenti tutte le coppie di piani di un fascio,
(e) sistemi contenenti tutte le quadriche per due rette sghembe,
(f) sistemi di quadriche per un punto ed una retta.

Si vede intanto facilmente che un sistema lineare di quadriche dell'S_4 la cui sezione con uno S_3 generico è un sistema dei tipi a) e b) non è mai a $J\equiv 0$. Invece i sistemi dei tipi c), d), e), f) possono essere sezioni, con S_3 generico, di un sistema lineare di quadriche di S_3 a $J\equiv 0$ di caratteristica 4. Omettendo i semplici ragionamenti, concludiamo dall'esame dei tipi anzidetti che i sistemi cercati sono i seguenti:

1) sistemi di dimensione 4, 5, 6 contenenti rispettivamente ∞^3, ∞^4, ∞^5 S_1-coni di dato S_1-vertice;
2) sistemi di dimensione 4 contenenti le ∞^2 coppie di S_3 di un fascio;
3) sistemi di dimensione 4 contenenti il sistema ∞^3 di quadriche (coni) passanti per due dati S_2;
4) sistemi di dimensione 4 e 5 di quadriche passanti per una retta ed un S_2 dell'S_4.

Ai precedenti sistemi vanno poi aggiunti:

5) sistemi di dimensione δ (con $4\leqslant\delta\leqslant 9$) di S_0-coni col vertice in comune.

([16]) Che non siano costituiti da coni col vertice in comune.

([17]) Se tre dei quattro punti fossero allineati si avrebbe il tipo (f).

I precedenti cinque tipi esauriscono tutti i sistemi lineari Σ_δ con $4 \leqslant \delta \leqslant 9$ dell'S_4, per cui $J \equiv 0$, di caratteristica 4.

3. – Come già s'è detto nel n. 1 il TERRACINI ha dimostrato, nel lavoro citato in (4), che i sistemi lineari di quadriche dello S_{k-1}, di dimensione δ, con

$$k-l \leqslant \delta \leqslant \frac{(k-l-1)(k-l+2)}{2}, \quad (l>1),$$

a $J \equiv 0$ di caratteristica $k-l$, sono quelli la cui sezione con un generico S_{k-l} dello S_{k-1} è un sistema lineare di quadriche di quello spazio, a $J \equiv 0$ sempre di caratteristica $k-l$. Tenendo conto dei risultati del n. 2 si ha così subito:

Un sistema Σ_δ, con

$$\frac{(k-l)(k-l-1)}{2}+1 \leqslant \delta \leqslant \frac{(k-l-1)(k-l+2)}{2},$$

di quadriche dello S_{k-1}, a $J \equiv$ di caratteristica $k-l$ è necessariamente costituito da S_{l-1}-coni con l'S_{l-1}-vertice in comune.

Inoltre, riguardo al caso $k=5$, e ricordando quali sono i sistemi lineari di quadriche di S_3, di dimensione 3, 4, 5, a $J \equiv 0$ di caratteristica 3 [cfr. BONFERRONI, op. cit. in (13)] si hanno i seguenti sistemi lineari di quadriche dello S_4, a $J \equiv 0$ di caratteristica 3:

1) sistemi, di dimensione 3, 4 e 5, di S_1-coni, con l'S_1-vertice in comune;
2) sistema, di dimensione 3, di coni passanti per due S_2;
3) sistema, di dimensione 3, contenente le ∞^2 coppie di S_3 di un fascio.

Infine l'unico sistema ∞^2 di quadriche dello S_3, a $J \equiv 0$ e di caratteristica 2, è costituito dalle coppie di S_3 di un fascio.

Aggiungiamo ancora una proposizione sui sistemi Σ_δ di S_{k-1}, a $J \equiv 0$ di caratteristica $k-1$:

Un sistema lineare Σ_δ di quadriche dello S_{k-1}, a $J \equiv 0$ di caratteristica $k-1$ e dimensione

$$\delta = \frac{(k-1)(k-2)}{2},$$

se non è costituito di S_0-coni col vertice in comune, contiene $\infty^{\delta-1}$ coni con l'S_1-vertice in comune.

Intanto osserviamo che, in base al n. 2, la proprietà è vera per $k=5$. Inoltre, essendo $\delta + 2k - 2 = \dfrac{(k-2)(k-3)}{2}$, Σ_δ contiene certo coppie di S_{k-2}.

Consideriamo dunque uno S'_{k-2} per cui passi qualche quadrica di Σ_δ e supponiamo in primo luogo che di tali quadriche non ve ne passino più di ∞^{k-3}. Allora la sezione è un sistema $\Sigma'_{\delta'}$ con

$$\delta' \geqslant \delta - (k-3) - 1 = \frac{(k-1)(k+2)}{2}$$

ed a $J' \equiv 0$ di caratteristica $k-2$ [18] e, in virtù del teorema dimostrato nel n. 2 e del teorema presente, supposto vero per l'S'_{k-2}, $\Sigma'_{\delta'}$ è costituito da coni col vertice O in comune oppure contiene $\infty^{\delta'-1}$ S_1-coni con l'S_1-vertice in comune. Nel primo caso tutte le quadriche di Σ_δ toccano S'_{k-2} in O, nel secondo in Σ_δ vi sono $\infty^{\delta-1}$ quadriche che toccano S'_{k-2} lungo uno stesso S_1. Ragionando allora in modo analogo a quello usato per il teorema del n. 2, si conclude che Σ_δ è costituito da coni col vertice in O oppure contiene $\infty^{\delta-1}$ S_1-coni coll'S_1-vertice comune [19]. Lo stesso dicasi se per l'S_{k-2} passano più che ∞^{k-3} quadriche di Σ_δ.

Non ci soffermiamo ad enunciare la proposizione che si deduce dalla precedente per mezzo della proposizione del TERRACINI menzionata in principio di questo n. 3 e riguardante i sistemi a $J \equiv 0$ di caratteristica $k-l$.

Osserviamo infine che i sistemi lineari di quadriche dell'S_4 elencati nel n. 2 si possono estendere immediatamente, in vari modi, sì da fornire sistemi lineari di quadriche dello S_{k-1} a $J \equiv 0$ di caratteristica $k-1$; non sappiamo però se quei sistemi esauriscano tutti i sistemi di quel tipo, di dimensione δ soddisfacente alle limitazioni (4) [20].

§ 3. – Varietà rigate i cui spazi tangenti ricoprono una *W* di dimensione inferiore alla ordinaria.

4. – In questo paragrafo e nel successivo § 4 dovremo integrare i sistemi di equazioni di LAPLACE la cui forma ci sarà fornita, come è stato spiegato nella Introduzione, dai risultati della parte precedente. Ci riferiremo per lo più al caso $k = 5$, limitandoci ad enunciare le estensioni a valori qualsiansi di k quando queste non presentino difficoltà. Non ritorneremo sui risultati già acquisiti dal TERRACINI e ci limiteremo a citarli ove occorre.

Incominciamo a considerare quei sistemi di equazioni di LAPLACE tali che il sistema di quadriche associate abbia per sistema apolare duale un sistema

(18) Vedi annotazione (14).

(19) Per la seconda eventualità si dovrà tener conto che è $k > 5$.

(20) Si veda anche: L. MURACCHINI, *Le varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore alla ordinaria*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 2, 97-114 (1951).

di S_0-coni col vertice in comune. Di questi ultimi sistemi, in S_{k-1}, ve ne sono di tutte le dimensioni δ con

$$k-1 \leqslant \delta \leqslant \frac{(k-2)(k+1)}{2}$$

e si tratta di sistemi a $J \equiv 0$ di caratteristica $k-1$. I sistemi di equazioni di LAPLACE che se ne deducono contengono dunque d equazioni linearmente indipendenti con

$$k \leqslant d \leqslant \frac{k(k-1)}{2}\,. \tag{5}$$

Le V_k che soddisfano ai sistemi di equazioni del tipo suindicato sono tali che la relativa W (varietà ricoperta dai relativi spazi tangenti) ha dimensione $2k-1$. Di queste varietà ci occuperemo in primo luogo, e solo in seguito ci occuperemo di quelle per cui la W ha dimensione $2k-l$ con $l>1$.

Si vede facilmente [cfr. anche TERRACINI, op. cit. in (2)] che, nel caso che stiamo considerando, fra le d equazioni di LAPLACE, linearmente indipendenti, del sistema ve ne sono k che, con una opportuna scelta dei parametri τ si scrivono

$$\begin{cases} x^{(kk)} = 0\,, \\ x^{(ki)} = \sum a_{ir}x^{(r)} + a_{ik}x^{(k)} + a_i x\,, \qquad (i=1,\ldots,k-1). \end{cases} \tag{6}$$

Ora il TERRACINI (21) ha dimostrato che se il numero d delle equazioni di LAPLACE del sistema considerato è

$$k \leqslant d \leqslant 2k-3\,,$$

allora la V_k è un cono (S_0-cono) proiettante una V_{k-1} che soddisfa a $d-k$ e.d.L.l.i.. Questo risultato insieme con la proposizione dimostrata nel n. 2 ci permette di enunciare la seguente proposizione che ne estende una dovuta al BOMPIANI (22):

Le varietà V_k ($k \geqslant 3$) per le quali la varietà W degli spazi tangenti ha dimensione $2k-1$ e che rappresentano d (con $k \leqslant d \leqslant 2k-3$) equazioni di LAPLACE *linearmente indipendenti, sono coni di prima specie, che proiettano una V_{k-2} soddisfacente a $d-k$* e.d.L.l.i..

Se poi è

$$2k-2 \leqslant d \leqslant 3k-7$$

(21) Nota I citata in (2).

(22) E. BOMPIANI, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*, Atti R. Accad. Sci. Torino, **49**, 83-131 (1913-1914).

con $k \geqslant 5$, sussiste un altro risultato del TERRACINI ([23]) secondo il quale la V_k è ancora un cono proiettante una V_{k-1} che soddisfa a $d-k$ e.d.L.l.i. oppure è una sviluppabile con curva direttrice. Nel caso $k=5$, in base a quanto s'è detto nel n. 2, rimangono ancora da esaminare i sistemi di equazioni di LAPLACE con $d=9$ oppure $d=10$, i casi $d=4, 5, 6, 7, 8$, rientrando in quei risultati ora menzionati. Esamineremo ora i casi anzidetti $d=9$ oppure $d=10$ relativi a $k=5$ e vedremo poi come i risultati si possano estendere a valori qualsiansi di k.

Abbiamo dunque un sistema di $d=9$ oppure $d=10$ equazioni di LAPLACE fra le quali ve ne sono cinque che si possono scrivere:

$$\left\{\begin{aligned} & x^{(55)} = 0 , \\ & x^{(5i)} = \sum_1^4 a_{ir} x^{(r)} + a_{i5} x^{(5)} + a_i x , \qquad (i=1, 2, 3, 4). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Seguiremo un procedimento analogo a quello adoperato dal TERRACINI nel suo lavoro più volte citato. Eguagliando le derivate terze $x^{(ij5)}$ e $x^{(ji5)}$ ricavate dalle (7), si vede subito che la V_k deve soddisfare le equazioni

$$\sum_1^4 (a_{ir} x^{(jr)} - a_{jr} x^{(ir)}) \sim 0 , \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4; \ i \neq j), \tag{8}$$

il segno $\sim$ indicando che il primo membro differisce dal secondo per una espressione lineare e omogenea in x e le sue derivate prime. Le (8) debbono essere combinazioni lineari delle d equazioni del sistema considerato e poichè in esse non figurano le derivate seconde $x^{(i5)}$, dovranno essere combinazioni lineari delle 4 oppure 5 equazioni del sistema, diverse dalle (7). Le quadriche associate alle equazioni (8), ossia le quadriche

$$\begin{vmatrix} \theta_i & \theta_j \\ \sum_1^4 a_{ir}\theta_r & \sum_1^4 a_{jr}\theta_r \end{vmatrix} = 0 , \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4; \ i \neq j), \tag{9}$$

dove le θ_i sono coordinate omogenee di un S_4, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, dovranno appartenere ad un sistema ∞^3 o ∞^4. Nelle (9) non figura θ_5; consideriamo allora l'omografia dello S_3 in sè di equazioni

$$\theta'_i = \sum_1^4 a_{ir}\theta_r , \qquad (i = 1, 2, 3, 4); \tag{10}$$

([23]) Nota II citata in ([2]).

se non è degenere, un teorema del TERRACINI [24], assicura che l'omografia (10) è identica, o è una omologia, o è una omografia assiale o biassiale; in ogni caso possiede almeno una retta di punti uniti. Se la (10) fosse degenere considereremmo in suo luogo la

$$\theta'_i = \sum_1^4 a_{ir}\theta_r + \alpha\theta_i\,, \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{10'}$$

scegliendo α in modo che quest'ultima omografia non sia degenere, il che è palesemente sempre possibile. Si noti che le quadriche

$$\begin{vmatrix} \theta_i & \theta_j \\ \sum_1^4 a_{ir}\theta_r + \alpha\theta_i & \sum_1^4 a_{jr}\theta_r + \alpha\theta_j \end{vmatrix} = 0\,, \tag{9'}$$

coincidono con le quadriche (9). Ora, se l'omografia (10) o (10′) è identica oppure una omologia, si ha un caso già trattato dal TERRACINI [25] e risulta che la V_5 è, nel caso attuale, una sviluppabile [26] con curva direttrice non generica però, ma tale che le sue ulteriori direttrici (se ne possiede) o varietà focali soddisfano ad una o due equazioni di LAPLACE, come si verifica facilmente. Supporremo dunque che l'omografia (10) o (10′) possegga al più una semplice infinità di punti uniti; com'è noto, esiste allora una ϱ (funzione evidentemente delle τ) tale che la matrice

$$\left\Vert \begin{matrix} a_{11} - \delta & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \varrho \end{matrix} \right\Vert, \tag{11}$$

(oppure quella che si ottiene sostituendo $a_{ii} + \alpha$ ad a_{ii}) si annulla con caratteristica 2. Si può dunque porre:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lambda_i\varphi_j + \mu_i\psi_j\,, \\ a_{ii} &= \lambda_i\varphi_i + \mu_i\psi_i + \varrho \quad (^{27})\,, \end{aligned} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

[24] A. TERRACINI, *Su una questione che si presenta nello studio delle omografie tra spazii sovrapposti*, Giorn. Mat. Battaglini **53**, 178-185 (1915).

[25] Nota II citata in [2].

[26] O addirittura un cono, proiettante però una V_4 che soddisfa a 4 oppure a 5 equazioni di LAPLACE.

[27] Oppure $\varrho + \alpha$ in luogo di ϱ e così pure nel seguito. Scriveremo sempre ϱ anche se vi dovesse essere $\varrho + \alpha$.

le λ, μ, φ, ψ essendo funzioni delle τ, tali che non s'annullano le matrici

$$\left\|\begin{matrix}\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\|, \qquad \left\|\begin{matrix}\varphi\\ \psi\end{matrix}\right\|.$$

Posto

$$\begin{aligned}\Phi x &= \varphi_1 x^{(1)} + \varphi_2 x^{(2)} + \varphi_3 x^{(3)} + \varphi_4 x^{(4)},\\ \Psi x &= \psi_1 x^{(1)} + \psi_2 x^{(2)} + \psi_3 x^{(3)} + \psi_4 x^{(4)},\end{aligned}$$

le equazioni (7) si scrivono ora:

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} x^{(55)} = 0, \\ x^{(5i)} = \lambda_i \Phi x + \mu_i \Psi x + a_{i5} x^{(5)} + \varrho x^{(i)} + a_i x, \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

La prima delle (12) fornisce $x^{(55i)} = 0$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, ricavando la stessa derivata terza dalle altre quattro equazioni e sostituendo nelle espressioni trovate, in luogo delle $x^{(i5)}$, i secondi membri delle (12) stesse, si perviene finalmente ad espressioni lineari ed omogenee nella x e le sue derivate prime. Ma poichè la V_5 che stiamo considerando non può soddisfare ad alcuna equazione del primo ordine, dovranno annullarsi i coefficienti delle derivate della x e della x medesima in quelle espressioni. Si trovano così le seguenti relazioni

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned}&\lambda_i(\varphi_r^{(5)} + 2\varrho\varphi_r + \varphi_r \sum_1^4 \lambda_s\varphi_s) + \varphi_r\lambda_i^{(5)} + \\ &\quad + \mu_i(\psi_r^{(5)} + 2\varrho\psi_r + \psi_r \sum_1^4 \mu_s\psi_s) + \psi_r\mu_i^{(5)} = 0, \quad (i \neq r;\ i, r = 1, 2, 3, 4),\end{aligned}$$

$$\text{(14)} \qquad \begin{aligned}&\varrho^2 + \varrho^{(5)} + \lambda_i(\varphi_i^{(5)} + 2\varrho\varphi_i + \varphi_i \sum_1^4 \lambda_s\varphi_s) + \varphi_i\lambda_i^{(5)} + \\ &\quad + \mu_i(\psi_i^{(5)} + 2\varrho\psi_i + \psi_i \sum_1^4 \mu_s\psi_s) + \psi_i\mu_i^{(5)} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).\end{aligned}$$

Dalle relazioni scritte si può dedurre che deve essere $\varrho^2 + \varrho^{(5)} = 0$; tuttavia non svilupperemo i calcoli necessari a dimostrare tale fatto poichè esso risulterà da una proposizione più generale che dimostreremo in seguito (pag. 445).

Poichè $\varrho^2 + \varrho^{(5)} = 0$, risulta dalle (13) e (14) che le matrici

$$\text{(15)} \qquad \left\| \lambda_i \quad \mu_i \quad \lambda_i^{(5)} \quad \mu_i^{(5)} \right\|, \qquad \left\| \varphi_i \quad \psi_i \quad \varphi_i^{(5)} \quad \psi_i^{(5)} \right\|$$

si annullano, con caratteristica 2.

Di ciò ci serviremo in seguito. Consideriamo ora nuovamente le equazioni (12) dalle quali ricaviamo ora le derivate terze $x^{(ij5)}$ $(i,\ j=1,2,3,4;\ i\neq j)$, in due modi; eguagliando le due espressioni trovate e sostituendo ancora alle $x^{(i5)}$ i secondi membri delle (12) stesse si trovano le nuove equazioni:

$$(16)\quad \lambda_i(\Phi x)^{(j)}+\mu_i(\Psi x)^{(j)}-\lambda_j(\Phi x)^{(i)}-\mu_j(\Psi x)^{(i)}+$$
$$+(\lambda_i^{(j)}-\lambda_j^{(i)}+\lambda_j a_{i5}-\lambda_i a_{j5})\Phi x+(\mu_i^{(j)}-\mu_j^{(i)}+\mu_j a_{i5}-\mu_i a_{j5})\Psi x+$$
$$+(\varrho^{(j)}-a_{j5}\varrho-a_j)x^{(i)}-(\varrho^{(i)}-a_{i5}\varrho-a_i)x^{(j)}+$$
$$+(\ldots)x^{(5)}+(\ldots)x=0\,,\qquad (i,\ j=1,2,3,4;\ i\neq j);$$

non abbiamo scritto i coefficienti di $x^{(5)}$ ed x perchè non interessano per il seguito. Moltiplichiamo la (16) per $\lambda_k\mu_l-\lambda_l\mu_k$ e sommiamo poi le sei equazioni ottenute dando ad i e j tutti i valori che possono assumere, e prendendo i primi membri con l'opportuno segno [28]; ciò che rimane è l'espressione:

$$(17)\quad \Big[\sum_{k,l,i,j}\pm(\lambda_k\mu_l-\lambda_l\mu_k)(\lambda_i^{(j)}-\lambda_j^{(i)})\Big]\Phi x+\Big[\sum_{k,l,i,l}\pm(\lambda_k\mu_l-\lambda_l\mu_k)(\mu_i^{(j)}-\mu_j^{(i)})\Big]\Psi x+$$
$$+\begin{vmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & x^{(3)} & x^{(4)}\\ \varrho^{(1)}-a_{15}\varrho-a_1 & \varrho^{(2)}-a_{25}\varrho-a_2 & \varrho^{(3)}-a_{35}\varrho-a_3 & \varrho^{(4)}-a_{45}\varrho-a_4\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4\end{vmatrix}+$$
$$+(\ldots)x^{(5)}+(\ldots)x=0\,,\qquad (i\ j,\ k,\ l=1,2,3,4;\ i\neq j\neq k\neq l).$$

Poichè l'espressione scritta è lineare e omogenea nella x e le sue derivate prime soltanto, dovranno annullarsi i coefficienti di quelle, per il motivo già addotto per le (13) e (14); si trovano così le relazioni:

$$(18)\quad \mathbf{\Delta}_{1234}\varphi_i+\mathbf{\Gamma}_{1234}\psi_i+\begin{vmatrix}\varrho^{(j)}-a_{5i}\varrho-a_j & \varrho^{(k)}-a_{5k}\varrho-a_k & \varrho^{(l)}-a_{5l}\varrho-a_l\\ \lambda_j & \lambda_k & \lambda_l\\ \mu_j & \mu_k & \mu_l\end{vmatrix}=0\,,$$

$$(i,\ j,\ k,\ l=1,2,3,4;\ i\neq j\neq k\neq l),$$

---

[28] In modo da ottenere lo sviluppo di un determinante secondo la nota regola di LAPLACE.

avendo posto

$$(19)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{\Delta}_{1234} = \sum\limits_{k,l,i,j} \pm (\lambda_k\mu_l - \lambda_l\mu_k)(\lambda_i^{(j)} - \lambda_j^{(i)})\,, \\ \boldsymbol{\Gamma}_{1234} = \sum\limits_{k,l,i,j} \pm (\lambda_k\mu_l - \lambda_l\mu_k)(\mu_i^{(j)} - \mu_j^{(i)})\,. \end{cases}$$

Distingueremo ora due casi:

a) $\boldsymbol{\Delta}_{1234} = \boldsymbol{\Gamma}_{1234} = 0$,

b) non entrambe le due espressioni si annullano.

Nel caso a) l'annullarsi delle (19) esprime che il sistema ai differenziali totali

$$(20)\qquad \begin{cases} \lambda_1\, \mathrm{d}\tau_1 + \lambda_2 \mathrm{d}\tau_2 + \lambda_3\, \mathrm{d}\tau_3 + \lambda_4\, \mathrm{d}\tau_4 = 0\,, \\ \mu_1\, \mathrm{d}\tau_1 + \mu_2\, \mathrm{d}\tau_2 + \mu_3\, \mathrm{d}\tau_3 + \mu_4\, \mathrm{d}\tau_4 = 0\,, \end{cases}$$

è completamente integrabile; esistono cioè due funzioni $f(\tau)$ e $g(\tau)$ (funzioni delle sole τ_1, τ_2, τ_3, τ_4) [29] tali che:

$$(21)\qquad \begin{cases} f^{(i)} = \alpha'\lambda_i + \alpha''\mu_i\,, \\ g^{(i)} = \beta'\lambda_i + \beta''\mu_i\,, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

con $\alpha'\beta'' - \alpha''\beta' \neq 0$.

Operiamo ora nelle nostre equazioni (12) il cambiamento di parametri:

$$\sigma_1 = \tau_1\,, \qquad \sigma_2 = \tau_2\,, \qquad \sigma_3 = f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)\,, \qquad \sigma_4 = g(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)\,, \qquad \sigma_5 = \tau_5\,;$$

quelle equazicni diventano allora:

$$(22)\qquad \begin{cases} x^{(55)} = 0\,, \\ x^{(5i)} + f^{(i)}x^{(35)} + g^{(i)}x^{(45)} = (\lambda_i\varphi_1 + \mu_i\psi_1)x^{(1)} + (\lambda_i\varphi_2 + \mu_i\psi_2)x^{(2)} + \\ \qquad + (\lambda_i\Phi f + \mu_i\Psi f)x^{(3)} + (\lambda_i\Phi g + \mu_i\Psi g)x^{(4)} + \varrho x^{(i)} + \varrho f^{(i)}x^{(3)} + \\ \qquad + \varrho g^{(i)}x^{(4)} + a_{i5}x^{(5)} + a_i x\,, \qquad (i = 1, 2)\,, \\ f^{(j)}x^{(35)} + g^{(j)}x^{(45)} = (\lambda_j\varphi_1 + \mu_j\psi_1)x^{(1)} + (\lambda_j\varphi_2 + \mu_j\psi_2)x^{(2)} + \\ \qquad + (\lambda_j\Phi f + \mu_j\Psi f)x^{(3)} + \lambda_j\Phi g + \mu_j\Psi g)^{(4)} + \varrho f^{(j)}x^{(3)} + \\ \qquad + \varrho g^{(j)}x^{(4)} + a_{j5}x^{(5)} + a_j x\,, \qquad (j = 3, 4). \end{cases}$$

Risolvendo rispetto ad $x^{(51)}$ e $x^{(52)}$, e tenendo conto delle (21), si trovano

[29] Si tenga presente che s'annulla, con caratteristica 2, la $\|\lambda_i\, \mu_i\, \lambda_i^{(5)}\, \mu_i^{(5)}\|$.

per quelle derivate seconde espressioni della forma:

$$(23) \qquad \begin{cases} x^{(15)} = \varrho x^{(1)} + A_1 x^{(5)} + Ax\,, \\ x^{(25)} = \varrho x^{(2)} + A_2 x^{(5)} + Bx\,, \end{cases}$$

dove le A_1, A_2, A, B sono espressioni che non occorre esplicitare.

Le (23), insieme con la $x^{(55)} = 0$, mostrano che le varietà V_3, $\sigma_4 =$ cost., $\sigma_3 =$ cost. situate sulla nostra V_5 sono coni; la V_5 stessa è dunque una sviluppabile con V_2 direttrice. Si verifica poi facilmente che, viceversa, una V_5 sviluppabile con V_2 direttrice (situata in uno spazio di dimensione sufficientemente elevata) verifica, in generale, 9 oppure 10 equazioni di LAPLACE l.i..

Veniamo ora al caso b), cioè al caso in cui non s'annullano le due espressioni $\boldsymbol{\Delta}_{1234}$ e $\boldsymbol{\Gamma}_{1234}$. Consideriamo le equazioni (16); se ne deducono subito le altre:

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} (\Phi x)^{(i)} & (\Phi x)^{(j)} & (\Phi x)^{(l)} \\ \lambda_i & \lambda_j & \lambda_l \\ \mu_i & \mu_j & \mu_l \end{vmatrix} + H_{ijl}x + a_{ijl}x = 0\,,$$

$$(i,\ j,\ l = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$(24') \qquad \begin{vmatrix} (\Psi x)^{(i)} & (\Psi x)^{(j)} & (\Psi x)^{(l)} \\ \lambda_i & \lambda_j & \lambda_l \\ \mu_i & \mu_j & \mu_l \end{vmatrix} + K_{ijl}x + b_{ijl}x = 0\,,$$

dove H_{ijl} e K_{ijl} sono operatori differenziali del primo ordine $\left(\text{del tipo cioè } \sum_1^5 \alpha_i \dfrac{\partial}{\partial \tau_i}\right)$ ed a_{ijl}, b_{ijl} funzioni, che non occorre esplicitare maggiormente.

Le equazioni (24) e (24′), ora scritte, possono anche scriversi nell'altra forma:

$$(25) \qquad \Phi \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \tau_i} & \dfrac{\partial}{\partial \tau_j} & \dfrac{\partial}{\partial \tau_l} \\ \lambda_i & \lambda_j & \lambda_l \\ \mu_i & \mu_j & \mu_l \end{vmatrix} x + H'_{ijl}x + a_{ijl}x = 0\,,$$

$$(i,\ j,\ l = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

$$(25') \qquad \Psi \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \tau_i} & \dfrac{\partial}{\partial \tau_j} & \dfrac{\partial}{\partial \tau_l} \\ \lambda_i & \lambda_j & \lambda_l \\ \mu_i & \mu_j & \mu_l \end{vmatrix} x + K'_{ijl}x + b_{ijl}x = 0\,,$$

dove H'_{ijl}, K'_{ijl} sono nuovi operatori, sempre del tipo indicato sopra. Ora operiamo sulla (25) con l'operatore Ψ e sulla (25′) con l'operatore Φ; sottraendo membro a membro le derivate terze si elidono e si trova una nuova equazione di LAPLACE che deve essere conseguenza di quelle 9 oppure 10 alle quali soddisfa la V_5. Si vede poi facilmente che la quadrica associata alla nuova equazione ottenuta è:

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} \theta_i & \theta_j & \theta_l \\ \lambda_i & \lambda_j & \lambda_l \\ \mu_i & \mu_i & \mu_i \end{vmatrix} f(\theta) + \Psi(\theta)H'_{jjl}(\theta) - \Phi(\theta)K'_{ijl}(\theta) = 0\,, \quad (i,\, j,\, l = 1,\, 2,\, 3,\, 4),$$

dove $\Psi(\theta)$ indica il polinomio lineare che si ottiene sostituendo, nell'operatore Ψ, θ_i ad $\dfrac{\partial}{\partial\tau_i}$ e analogamente per gli altri simboli. Il polinomio $f(\theta)$ è poi quello che si ottiene in modo analogo a partire dall'operatore lineare $\Psi\Phi - \Phi\Psi$. Le (26) mostrano che, nell'S_4 in cui le θ sono coordinate proiettive, si annullano i prodotti:

$$\begin{vmatrix} \theta_i & \theta_j & \theta_l \\ \lambda_i & \lambda_j & \lambda_l \\ \mu_i & \mu_j & \mu_l \end{vmatrix} f(\theta)\,, \qquad (i,\, j,\, l = 1,\, 2,\, 3,\, 4),$$

sull'S_2 di equazioni $\Psi(\theta) = \Phi(\theta) = 0$; e poichè la matrice $\|\lambda_i,\ \mu_i\|$ non si annulla, per ipotesi, segue che $f(\theta) = 0$ è combinazione lineare delle $\Psi(\theta) = \Phi(\theta) = 0$. Com'è noto, ciò significa che il sistema di equazioni differenziali lineari (ed omogenee), nella funzione incognita σ,

$$(27)\qquad \Phi\sigma = \Psi\sigma = 0$$

è completo. Essendo poi nulla, di caratteristica 2, la matrice $\|\ \varphi_i\ \psi_i\ \varphi_i^{(5)}\ \psi_i^{(5)}\ \|$ è completo anche il sistema:

$$(27')\qquad \Phi\sigma = \Psi\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial\tau_5} = 0\,.$$

Tale sistema possiede dunque due integrali σ_1, σ_2 indipendenti, funzioni solo di τ_1, τ_2, τ_3, τ_4. Si potrà allora effettuare il cambiamento di parametri.

$$\sigma_1 = \sigma_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)\,, \quad \sigma_2 = \sigma_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)\,, \quad \sigma_3 = \tau_3\,, \quad \sigma_4 = \tau_4\,, \quad \sigma_5 = \tau_5\,,$$

nelle equazioni (12). Si ottengono così le nuove equazioni:

$$\tag{28} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial \sigma_5^2} = 0, \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{4} \sigma_r^{(5)} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \sigma_r \, \partial \sigma_5} - \varrho \frac{\partial x}{\partial \sigma_r} \right) = (\lambda_i \varphi_3 + \mu_i \psi_3) x^{(3)} + \\ \qquad + (\lambda_i \varphi_4 + \mu_i \psi_4) x^{(4)} + a_{i5} x^{(5)} + a_i x, \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Indicando ancora con $x^{(ij)}$ le derivate seconde di x, ecc., rispetto alle σ_i ora le (28) risolte forniscono il sistema:

$$\tag{29} \begin{cases} x^{(55)} = 0, \\ x^{(5i)} = \varrho x^{(i)} + A_{i3} x^{(3)} + A_{i4} x^{(4)} + A_{i5} x^{(5)} + A_i x, \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \end{cases}$$

dove le A sono espressioni che non occorre scrivere esplicitamente. Possiamo ancora porre (adoperando le stesse lettere di prima senza che ciò porti ad alcuna ambiguità):

$$\tag{29'} A_{ij} = \lambda_i \varphi_j + \mu_i \psi_j,$$

dove presentemente $i = 1, 2, 3, 4$ ed $j = 3, 4$ soltanto. È facile verificare che, dalle ipotesi che avevamo ammesse per le primitive λ, μ e φ, ψ, segue che è diversa da zero la matrice delle nuove λ, μ e così pure è:

$$\tag{30} \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_4 \\ \psi_3 & \psi_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si può poi operare sulle (29) come avevamo operato sulle (12) per giungere alle relazioni (18), ed è subito visto che le nuove relazioni che si ottengono si ricavano formalmente dalle (18) ponendovi $\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_1 = \psi_2 = 0$ [beninteso nelle relazioni che si ottengono le λ, μ e φ, ψ sono le nuove quantità che figurano nelle (29')]. Si ha così:

$$\tag{31} \begin{vmatrix} \varrho^{(i)} - A_{i5}\varrho - A_i & \varrho^{(j)} - A_{j5}\varrho - A_j & \varrho^{(l)} - A_{l5}\varrho - A_l \\ \lambda_i & \lambda_j & \lambda_l \\ \mu_i & \mu_i & \mu_i \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \\ j, l = 3, 4 \end{pmatrix},$$

$$\tag{32} \mathbf{\Delta}_{1234} \varphi_j + \mathbf{\Gamma}_{1234} \psi_j + \begin{vmatrix} \varrho^{(i)} - A_{i5}\varrho - A_i & \varrho^{(k)} - A_{k5}\varrho - A_k & \varrho^{(l)} - A_{l5}\varrho - A_l \\ \lambda_i & \lambda_k & \lambda_l \\ \mu_i & \mu_k & \mu_l \end{vmatrix} = 0,$$

$$(j = 3, 4;\ j \neq i \neq k \neq l = 1, 2, 3, 4).$$

Le quantità $\mathbf{\Delta}_{1234}$ e $\mathbf{\Gamma}_{1234}$ che figurano nella (32) sono le analoghe di quelle che figurano nelle (18). Se le nuove $\mathbf{\Delta}_{1234}$ e $\mathbf{\Gamma}_{1234}$ sono entrambe nulle, ragionando come s'era fatto prima si giunge alla stessa conclusione; supporremo dunque che una almeno di quelle quantità sia diversa dallo zero. Se lo sono entrambe, sommando le (31) e (32) moltiplicate rispettivamente per λ_k e λ_j, e poi per μ_k e μ_j, si ottengono relazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{\Delta}_{1234}(\lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4) + \mathbf{\Gamma}_{1234}(\lambda_3\psi_3 + \lambda_4\psi_4) = 0\,, \\ \mathbf{\Delta}_{1234}(\mu_3\varphi_3 + \mu_4\varphi_4) + \mathbf{\Gamma}_{1234}(\mu_3\varphi_3 + \mu_4\varphi) = 0\,. \end{cases}$$

Queste, tenendo conto che $\mathbf{\Delta}_{1234} \neq 0$ e $\mathbf{\Gamma}_{1234} \neq 0$, come pure $\begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_4 \\ \psi_3 & \psi_4 \end{vmatrix} \neq 0$, forniscono

$$\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 \\ \mu_3 & \mu_4 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{33}$$

Alla stessa conclusione si giunge se una sola delle $\mathbf{\Delta}_{1234}$, $\mathbf{\Gamma}_{1234}$ è nulla, come si vede facilmente. Le (31), tenuto conto della (33) forniscono poi:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} (\varrho^{(3)} - A_{35}\varrho - A_3) - \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix} (\varrho^{(4)} - A_{45}\varrho - A_4) = 0\,, \\ \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} (\varrho^{(3)} - A_{35}\varrho - A_3) - \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} (\varrho^{(4)} - A_{45}\varrho - A_4) = 0\,. \end{cases} \tag{34}$$

Formiamo ora le equazioni che si deducono delle (29) eguagliando le derivate terze:

$$\begin{cases} x^{(153)} = x^{(351)}\,, \quad x^{(253)} = x^{(352)}\,, \quad x^{(154)} = x^{(451)}\,, \\ x^{(254)} = x^{(452)}\,, \quad x^{(453)} = x^{(354)}\,. \end{cases} \tag{35}$$

Si vede facilmente che dalle due equazioni $x^{(153)} = x^{(351)}$, $x^{(154)} = x^{(451)}$ si possono eliminare $x^{(1)}$, $x^{(13)}$, $x^{(14)}$, tenendo conto di (33) e (34); così pure per le due equazioni $x^{(253)} = x^{(352)}$, $x^{(254)} = x^{(452)}$ si possono eliminare fra di esse $x^{(2)}$, $x^{(23)}$, $x^{(24)}$. In definitiva dalle (35) si deducono tre equazioni:

$$\begin{cases} x^{(33)} = \alpha_1 x^{(3)} + \beta_1 x^{(4)} + \gamma_1 x^{(5)} + \delta_1 x\,, \\ x^{(34)} = \alpha_2 x^{(3)} + \beta_2 x^{(4)} + \gamma_2 x^{(5)} + \delta_2 x\,, \\ x^{(44)} = \alpha_3 x^{(3)} + \beta_3 x^{(4)} + \gamma_3 x^{(5)} + \delta_3 x\,, \end{cases} \tag{36}$$

dove le α_i, β_i, γ_j, δ_i sono quantità che non occorre specificare. Le (36), insieme con la $x^{(55)} = 0$ e quelle delle (29) che si ottengono per $i = 3, 4$, mostrano che le V_3: $\sigma_1 = \text{cost.}$, $\sigma_2 = \text{cost.}$ della nostra V_5 sono S_3 [30]. Tutto ciò nell'ipotesi che le $x^{(ij5)} = x^{(ij5)}$ forniscano effettivamente equazioni indipendenti in $x^{(33)}$, $x^{(34)}$, $x^{(44)}$, quando si operi nel modo indicato. Una analisi dettagliata delle varie possibilità (che tralasciamo perchè non presenta nessuna difficoltà) mostra che, nelle ipotesi ammesse, si perviene sempre alle (36), tenendo conto delle (31), (32) e (34); a meno che non sia $\lambda_3 = \lambda_4 = \mu_3 = \mu_4 = 0$ ma allora le (29) mostrano che la V_5 possiede una superficie direttrice. Ritornando al caso in cui la V_5 è luogo di $\infty^2 S_3$, $\sigma_1 = \text{cost.}$, $\sigma_2 = \text{cost.}$ è facile vedere [procedendo in modo analogo a quello seguito dal TERRACINI nel suo lavoro citato in [2]] che uno di quegli S_3 è incontrato da tutti quelli ad esso infinitamente vicini in uno stesso punto. Basta considerare l'S_3, definito dai punti x, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, $x^{(5)}$ e quello infinitamente vicino corrispondente ad incrementi generici $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ di σ_1 e σ_2, che è definito dai punti:

$$x + x^{(1)}\,d\sigma_1 + x^{(2)}\,d\sigma_2\,, \qquad x^{(3)} + x^{(31)}\,d\sigma_1 + x^{(32)}\,d\sigma_2\,,$$
$$x^{(4)} + x^{(41)}\,d\sigma_1 + x^{(42)}\,d\sigma_2\,, \qquad x^{(5)} + x^{(51)}\,d\sigma_1 + x^{(52)}\,d\sigma_2\,.$$

Entrambi quegli S_3 contengono il punto:

$$x^{(5)} - \varrho x + x^{(3)}(A_{13}\,d\sigma_1 + A_{23}\,d\sigma_2) + x^{(4)}(A_{14}\,d\sigma_1 + A_{24}\,d\sigma_2) + $$
$$+ x^{(5)}(A_{15}\,d\sigma_1 + A_{25}\,d\sigma_2) + x(A_1\,d\sigma_1 + A_2\,d\sigma_2)\,,$$

che, col tendere a zero di $d\sigma_1$ e $d\sigma_2$ tende al punto $x^{(5)} - \varrho x$. Concludiamo che nel caso attuale la nostra V_5 è una ∞^2 di σ_3 tangenti ad una superficie. Si verifica poi facilmente che una V_5 di quel tipo soddisfa a 9 equazioni di LAPLACE l.i., fra le quali ve ne sono cinque del tipo (29).

In conclusione possiamo affermare:

Le V_5 che rappresentano un sistema di 9 *oppure* 10 *equazioni di* LAPLACE *l.i., cinque delle quali sono della forma* (7), *sono coni proiettanti da un punto una V_4 che soddisfa a* 4 *oppure* 5 *equazioni di* LAPLACE *l.i., o sono V_5 sviluppabili con curva direttrice o superficie direttrice o infine sono costituite da ∞^2 S_3 tangenti ad una superficie.*

5. – Siamo ora in grado di estendere i risultati, conseguiti per $k = 5$ nel precedente paragrafo, al caso di k qualsivoglia, dando così risposta anche ad

(30) Si veda la Nota II citata in (2).

una questione che il TERRACINI segnala a piè di pagina nel suo lavoro più volte citato ([31]). Incominciamo collo stabilire una proposizione di cui già abbiamo detto a pag. 447. Consideriamo una ∞^{k-1} di rette V_k, con S_k tangente fisso, lungo ciascuna retta; è noto che, per una opportuna scelta dei parametri la V_k soddisfa alle k equazioni di LAPLACE:

$$\left\{\begin{aligned} &x^{(k,k)} = 0\,, \\ &x^{(k,i)} = \sum_{r=1}^{k-1} a_{ir}x^{(r)} + a_{ik}x^{(k)} + a_i x\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1). \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Orbene: *le radici dell'equazione in* ϱ:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & \ldots & a_{1k,-1} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho & \ldots & a_{2,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,k-1}-\varrho \end{vmatrix} = 0, \tag{38}$$

[indicate con ϱ_i, $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$] *soddisfano alla relazione*

$$\varrho_i^{(k)} + \varrho_i^2 = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{39}$$

Scriviamo l'equazione (38) in forma sviluppata:

$$(-1)^{k-1}\varrho^{k-1} + A_{k-1}\varrho^{k-2} + \ldots + A_{k-h}\varrho^{k-h-1} + \ldots + A_0 = 0\,; \tag{40}$$

com'è noto $(-1)^l A_l$ è la somma dei minori principali della matrice $\|a_{ij}\|$, d'ordine $k-l-1$. Per dimostrare la proposizione enunciata considereremo, invece della (40), l'equazione in $\sigma = \dfrac{1}{\varrho}$:

$$A_0\sigma^{k-1} + A_1\sigma^{k-2} + \ldots + A_h\sigma^{k-h-1} + \ldots + (-1)^{k-1} = 0 \tag{41}$$

e dimostreremo che le radici di questa soddisfano alla

$$\sigma_i^{(k)} = 1\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{42}$$

([31]) Nella Nota II citata in ([2]), pag. 707, annotazione ([8]).

Per questo basterà dimostrare che sussistono le relazioni:

$$\{ \sum \sigma_i \}^{(k)} = k-1, \tag{43}$$

$$\{ \sum (\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_h) \}^{(k)} = (k-h) \sum (\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{h-1}), \qquad (h = 2, 3, \ldots, k-1), \tag{43'}$$

dove abbiamo indicato con $\sum (\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_h)$ la somma dei prodotti delle σ_i ad h ad h. Si vede subito infatti che dalle (43) e (43′) seguono le (42). Posto $A_{k-1} = (-1)^{k-1}$, le (43) e (43′) si scrivono

$$-\left\{ \frac{A_1}{A_0} \right\}^{(k)} = k-1, \tag{44}$$

$$-\left\{ \frac{A_h}{A_0} \right\}^{(k)} = (k-h) \frac{A_{h-1}}{A_0}, \qquad (h = 2, 3, \ldots, k-1). \tag{44'}$$

Ora consideriamo le equazioni (37), derivando rispetto a τ_k quelle che seguono la prima, tenendo conto delle (37) stesse e del fatto che V_k non può soddisfare ad alcuna equazione alle derivate parziali omogenee del primo ordine. si trovano le relazioni:

$$a_{ij}^{(k)} = -\sum_{r=1}^{k-1} a_{ir}a_{rj}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k-1), \tag{45}$$

e queste forniscono intanto la:

$$\{ |a_{ij}| \}^{(k)} = -(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{k-1,\,k-1}) |a_{ij}|,$$

e da queste segue subito la (44′) per $h = k-1$. La (44′) si può poi scrivere

$$A_h^{(k)} = (-1)^{k-1} A_h A_{k-2} - (k-h) A_{h-1} \tag{46}$$

e ricordando il significato delle A_l, tenendo conto delle (45), si dimostra la (46) per tutti i valori possibili di h con calcoli che non presentano difficoltà e che perciò tralasciamo di riportare.

Consideriamo ora il sistema di equazioni di LAPLACE (37) e supponiamo che l'equazione (38) abbia una radice ϱ_1 per la quale il determinante (38) si annulli, di caratteristica $k-l-1$ (e quindi, com'è noto, che ϱ_1 abbia molteplicità l almeno). Si potrà allora scrivere:

$$\begin{cases} a_{ij} = u_{1i}v_{1j} + \ldots + u_{k-l-1,\,i}v_{k-l-1,\,i}, & (i \neq j = 1, \ldots, k-1), \\ a_{ii} = u_{1i}v_{1i} + \ldots + u_{k-l-1,\,i}v_{k-l-1,\,i} + \varrho_1, & (i = 1, \ldots, k-1), \end{cases} \tag{47}$$

le due matrici $\|u\|$, $\|v\|$ avranno caratteristica $k-l-1$. Posto

$$V_r x = \sum_1^{k-1} {}_s\, v_{rs} x^{(s)}\,, \qquad (r = 1, \ldots, k-l-1),$$

le equazioni (37) potranno scriversi:

$$(48) \qquad \begin{cases} x^{(kk)} = 0\,, \\ x^{(ki)} = u_{1i} V_1 x + u_{2i} V_2 x + \ldots + u_{k-l-1,\,i} V_{k-l-1} x + \varrho_1 x^{(i)} + a_{ik} x^{(k)} + a_i x\,. \end{cases}$$

Su queste equazioni opereremo ora come abbiamo fatto nel precedente paragrafo sulle (12). Derivando rispetto a τ_k si otterranno intanto relazioni del tipo:

$$(49) \qquad \sum_1^{k-l-1} {}_s\, u_{si}^{(k)} v_{sj} + \sum_1^{k-l-1} {}_s\, u_{si} v_{sj}^{(k)} + 2\varrho_1 \sum_1^{k-l-1} {}_s\, u_{si} v_{sj} +$$

$$+ \sum_1^{k-l-1} {}_s \Big\{ u_{si} v_{sj} \sum_1^{k-1} {}_r\, u_{sr} v_{sr} \Big\} = 0\,, \qquad (i \neq j = 1, \ldots, k-1),$$

queste relazioni sussistendo anche per $i = j$, quando si tenga presente che deve essere $\varrho_1^{(k)} + \varrho_1^2 = 0$. Dalle (49) si deduce che s'annullano le matrici:

$$(49') \qquad \begin{Vmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} & \ldots & u_{k-1,1} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & \ldots & u_{k-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{1,k-l-1} & u_{2\,k-l-1} & u_{3,k-l-1} & \ldots & u_{k-1,k-l-1} \\ u_{1i}^{(k)} & u_{2i}^{(k)} & u_{3i}^{(k)} & \ldots & u_{k-1,i}^{(k)} \end{Vmatrix}, \quad (i = 1, \ldots, k-l-1),$$

e le analoghe relative alle v_{ij}.

Formiamo poi le $\binom{k-1}{2}$ equazioni $x^{(kij)} = x^{(kji)}$, $(i \neq j = 1, \ldots, k-1)$, e prendiamole a $\binom{k-l+1}{2}$ a $\binom{k-l+1}{2}$ [32], facendo circolare gli indici i, j; moltiplichiamo ciascuna delle equazioni, di uno dei gruppi di $\binom{k-l+1}{2}$ equa-

[32] Considerando quelle delle $x^{(kij)} = x^{(kji)}$ che si ottengono relativamente a $k-l+1$ indici i e j fra i $k-1$ possibili.

zioni, opportunamente per altrettanti minori estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1,k-l-1} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2,k-l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{k-1,1} & u_{k-1,2} & \dots & u_{k-1,k-l-1} \end{array} \right\|$$

e poi sommiamo. Otterremo così equazioni dove non compaiono più le derivate del secondo ordine, che forniscono le relazioni (relativamente al gruppo G di $k-l+1$ indici $i_1, i_2, \dots, i_{k-l+1}$):

$$(50) \qquad v_{1,i_{k-l+1}}\Delta_G^{(1)} + \dots + v_{k-l-1,\, i_{k-l+1}}\Delta_G^{(k-l-1)} +$$

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \varrho_1^{(i_1)} - a_{i_1,k}\varrho - a_{i_1} & \dots & \varrho_1^{(i_{k-l})} - a_{i_{k-l},k}\varrho - a_{i_{k-l}} \\ u_{i_1,1} & \dots & u_{i_{k-l},1} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{i_1,k-l-1} & \dots & u_{i_{k-l},k-l-1} \end{array} \right| = 0\,,$$

$$(51) \qquad v_{1,r}\Delta_G^{(1)} + v_{2,r}\Delta_G^{(2)} + \dots + v_{k-l-1,r}\Delta^{(k-l-1)} = 0\,,$$

le (50) dovendosi prendere circolando in tutti i modi gli indici $i_1, i_2, \dots, i_{k-l+1}$ e le (51) valendo per tutti gli indici r che non appartengono al gruppo. Le quantità $\Delta_G^{(k)}$ a $k-l+1$ indici sono quelle il cui annullarsi [33] esprime le condizioni di integrabilità del sistema ai differenziali totali:

$$(52) \qquad u_{1,h}\,d\tau_1 + u_{2,h}\,d\tau_2 + \dots + u_{k-1,h}\,d\tau_{k-1} = 0\,, \qquad (h = 1, \dots, k-l-1),$$

cioè l'esistenza di $k-l-1$ funzioni f_s, indipendenti, e funzioni delle $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$ soltanto, tali che:

$$f_s^{(i)} = \alpha_{s1}u_{i,1} + \alpha_{s2}u_{i,2} + \dots + \alpha_{s,\,k-l-1}u_{i,\,k-l-1}\,,$$

$$(i = 1, \dots, k-1;\; s = 1, \dots, k-l-1).$$

Se tutte le Δ sono nulle, ragionando come nel paragrafo precedente, si vede che la V_k sviluppabile che soddisfa alle (48) possiede une varietà direttrice a

[33] Insieme con l'annullarsi delle matrici (49').

$k-l-1$ dimensioni, V_{k-l-1}. Ora osserviamo che dalle (50) e (51) segue, nell'ipotesi

$$k-1 \geqslant 2(k-l-1),$$

ossia se

$$l \geqslant \frac{k+1}{2},$$

e tenendo conto del fatto che la matrice $\|v\|$ ha caratteristica $k-l-1$, che le Δ sono tutte nulle. Se invece si ha $l < \frac{k+1}{2}$, può accadere che le Δ non siano tutte nulle; possiamo tuttavia dimostrare che:

Se la radice ϱ_1, della equazione (38), *che rende nullo e di caratteristica $k-l-1$ il determinante* (38), *ha molteplicità l esattamente per l'equazione detta, allora si possono scegliere nuovi parametri per la V_k, in modo che le Δ si annullino.*

Per dimostrare questa proposizione incominciamo coll'osservare che il sistema di equazioni alle derivate parziali, lineari ed omogenee,

$$V_r\sigma = 0, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial\tau_k} = 0, \qquad (r = 1, \dots, k-l-1), \tag{53}$$

è completo. Ciò si vede operando sulle equazioni del sistema (48) come abbiamo fatto, nel paragrafo precedente, sulle equazioni (12) per dimostrare che il sistema (27') era completo. Il sistema (53) possiede dunque l integrali indipendenti $\sigma_1, \dots, \sigma_l$, funzioni delle sole $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$. Si potrà dunque effettuare il cambiamento di parametri:

$$\begin{cases} \tau_i = \sigma_i(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}), & (i = 1, \dots, l), \\ \tau_j = \sigma_j, & (j = l+1, \dots, k-1), \end{cases} \tag{53'}$$

nelle equazioni (48) e si otterrà un sistema della forma:

$$\begin{cases} x^{(kk)} = 0, \\ x^{(ki)} = \varrho_1 x^{(i)} + \sum_{l+1}^{k-1}{}_r A_{ir}x^{(r)} + A_{ik}x^{(k)} + A_i x, & (i = 1, \dots, k-1), \end{cases} \tag{54}$$

con $A_{ir} = 0$ per $i \leqslant l$.

Scriviamo ancora:

$$A_{ij} = \sum_1^{k-1}{}_r u_{ri}v_{rj}, \qquad (i = l+1, \dots, k+1;\ j = 1, \dots, k-1),$$

con $v_{rs} = 0$ per $s \leqslant l$ senza che vi possa essere confusione fra le nuove u, v

e quelle che figurano nelle (47). Osserviamo poi, e ciò si verifica senza nessuna difficoltà, che una trasformazione dei soli parametri $\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}$ effettuata nelle (37) fornisce nuove equazioni tali che la relativa equazione (38) ha le stesse radici ϱ_i (in funzione naturalmente dei nuovi parametri) che l'equazione (38) primitiva. Pertanto se ϱ_1 è radice di multiplicità l esattamente della (38), lo è pure con la stessa multiplicità per la equazione associata alle (54). Se operiamo sulle (54), come abbiamo fatto sulle (48) per ottenere le (50) e (51), perverremo evidentemente a relazioni che si ottengono da quelle formalmente ponendovi eguali allo zero le v_{rs} con $s \leqslant l$. È facile allora vedere che moltiplicando opportunamente le relazioni ottenute per le u e sommando si perviene ad equazioni lineari ed omogenee nelle Δ, tali che la relativa matrice dei coefficienti è

$$(55) \qquad \left\| \begin{matrix} A_{l+1,l+1} & \ldots & A_{l+1,k-1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ A_{k-1,l+1} & \ldots & A_{k-1,k-1} \end{matrix} \right\| ,$$

e se le Δ non fossero tutte nulle dovrebbe annullarsi la (55) il che implicherebbe che ϱ_1 è radice di molteplicità $> l$, per l'equazione (38).

Per mettere in relazione la dimensione del sistema di equazioni di LAPLACE rappresentanti una V_k sviluppabile, con la minima dimensione delle direttrici esistenti sulla V_k stabiliremo ora alcune diseguaglianze. Consideriamo [col TERRACINI, op. cit. in (2)] l'omografia fra S_{k-2} sovrapposti:

$$(56) \qquad \theta'_i = \sum_r a_{ir}\theta_r , \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1),$$

dove le a_{ij} sono quelle che figurano nelle equazioni (37) (34). In una sua Nota [che abbiamo già citato in (24)] il TERRACINI ha dimostrato che il sistema lineare di quadriche dello S_{k-2}, (o coni di S_{k-1} col vertice in un opportuno punto fondamentale) definite dall'annullarsi dei singoli determinanti della matrice

$$(57) \qquad \left\| \begin{matrix} \theta_1 & \theta_2 & \ldots & \theta_{k-1} \\ \sum_1^{k-1}{}_r a_{1r}\theta_r & \sum_1^{k-1}{}_r a_{2r}\theta_r & \ldots & \sum_1^{k-1}{}_r a_{k-1\,r}\theta_r \end{matrix} \right\| ,$$

ha dimensione $\delta - 1 = \sum h_u^{(i)} h_v^{(j)} - 1$, la sommatoria essendo estesa a tutti i

(34) Supposta l'omografia non degenere. Altrimenti basterà considerare l'omografia $\theta'_i = \sum_{r=1}^{k-1} a_{ir}\theta_r + \alpha\theta_i$, α arbitraria [vedasi anche TERRACINI, op. cit. in (2)].

prodotti delle h (combinate a due a due, senza ripetizione) che compaiono nella caratteristica dell'omografia (56),

$$[(h'-1,\ h'_1-1, \dots,\ h'_p-1), \dots, (h^{(m)}-1,\ h_1^{(m)}-1, \dots,\ h_s^{(m)}-1)]$$

scritta colle notazioni di PREDELLA. D'altra parte le quadriché definite dalla (57), o meglio i coni quadrici di S_{k-1} che le proiettano dal punto fondamentale $\theta_i = 0$, $(i = 1, \dots, k-1)$, $\theta_k = 1$, sono quelle associate alle equazioni di LAPLACE che si deducono dalle (37) eguagliando le derivate terze $x^{(ijk)} = x^{(ijk)}$; sicchè se si suppone che la V_k sviluppabile soddisfi, oltre che alle (37), ad altre δ_0 equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti soltanto, ne risulterà che la dimensione $\delta - 1$ del sistema lineare delle quadriche (57) è tale che $\delta \leqslant \delta_0$. Vediamo ora come dalla limitazione $\delta \leqslant \delta_0$ si possa concludere circa l'esistenza, per l'omografia (56), di spazi di punti uniti di data dimensione, ossia di radici di data molteplicità per l'equazione (38) e quindi di varietà direttrici per la V_k, in base a quanto abbiamo svolto prima (almeno se la molteplicità della radice è abbastanza elevata).

Osserviamo in primo luogo che il massimo per $\delta = \sum h_u^{(i)} h_v^{(j)}$ è raggiunto quando le h sono tutte eguali; e poichè, com'è noto deve essere $\sum h = k - 1$, il massimo per δ è $\dfrac{(k-1)(k-2)}{2}$. Dimostriamo che:

Se il massimo valore per le h è l (cioè tutte le h sono $\leqslant l$) e tale massimo è effettivamente raggiunto, allora è:

$$\frac{(k-r-1)(k-l+r-1)}{2} \leqslant \delta \leqslant \frac{(k-l-1)(k+l-2)}{2}, \tag{58}$$

dove r è il resto della divisione di $k-1$ per l.

Infatti, se per tutte le h è $h \leqslant l$, è subito visto che il massimo valore per δ è raggiunto quando una sola delle h è eguale ad l, mentre tutte le altre sono eguali ad 1; in tale caso $\delta = \frac{1}{2}(k-l-1)(k+l-2)$. Si vede poi che il minimo valore di δ è raggiunto quando tutte le h sono eguali ad l, salvo una al più, se $k-1$ non è divisibile per l. In questo caso il valore di δ è quello indicato nella (58). Per dimostrare l'ultima proprietà enunciata consideriamo un qualsiasi gruppo $h_1, h_2, \dots, h_m$ di valori per le h, con $h_i \leqslant l$; sia in primo luogo $h_{m-1} + h_m > l$ e quindi $h_{m-1} + h_m = l + h'_{m-1}$ con $h'_{m-1} \leqslant l$, allora il gruppo $h_1, h_2, \dots, h'_{m-1}, l$ di valori per le h fornisce lo stesso valore per δ che quello precedente. Se invece $h_{m-1} + h_m < l$, $h_{m-1} + h_m = h'_{m-1}$, il gruppo di valori $h_1, h_2, \dots, h'_{m-1}$ fornisce un valore di δ minore di quello precedente.

Dalle due precedenti considerazioni si conclude appunto che il minimo valore per δ è raggiunto quando tutte le h sono eguali ad l, salvo una al più.

Dalla proposizione dimostrata che: *se δ è tale che per un certo l_0 si ha*

$$\delta < \frac{(k - r_0 - 1)(k - l_0 + r_0 - 1)}{2},$$

dove r_0 è il resto della divisione di $k - 1$ per l_0, allora vi è certo almeno una $h > l_0$.

Ora si osservi che è certo $\dfrac{(k - r_0 - 1)(k - l_0 + r_0 - 1)}{2} \geqslant \dfrac{(k - 1)(k - l_0 - 1)}{2}$; perciò possiamo affermare che:

Se $\delta < \delta_0$ vi è certo un h eguale ad $l_0 + 1$ almeno, essendo l_0 il massimo intero contenuto in $k - 1 - \dfrac{2\delta_0}{k - 1}$.

Questo risultato evidentemente non è il migliore possibile del suo tipo e le proposizioni che abbiamo stabilito permetterebbero di migliorarlo. Ma non ci tratteremo su ciò, come non ci soffermeremo ad enunciare le conclusioni che si traggono riunendo i vari risultati del presente paragrafo. Notiamo ancora che i metodi impiegati permetterebbero di approfondire maggiormente la conoscenza delle V_k sviluppabili, in relazione alle loro varietà focali e direttrici, e di assegnare forme canoniche alle equazioni (37) a cui soddisfano le V_k stesse. Andrebbe inoltre precisato il significato geometrico delle radici ϱ_i della equazione (38) e della omografia (56) ([35]).

([35]) Per lo studio delle V_k sviluppabili, in relazione alle loro varietà direttrici vedasi: A. TERRACINI, *Variedades focales directrices de absorcion anormal en las variedades desarrollables,* Univ. Nac. Tucuman. Revista A. **5**, 335-361 (1946).