EMILIO BAIADA (*)

L'area delle superficie armoniche quale funzione delle rappresentazioni del contorno. (**)

1. - Introduzione. In una Nota di M. MORSE e C. TOMPKINS [1], dal titolo analogo a quello del presente lavoro, è stato trattato il seguente problema:

Si consideri la classe delle superficie armoniche, cioè delle superficie di equazioni

$$x_i = x_i(u, v)\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

dove $x_i(u, v)$ sono delle funzioni armoniche definite per (u, v) in una regione B limitata da un numero finito di circonferenze senza punti a comune (e noi ci restringeremo, per semplicità, al caso in cui B sia il cerchio unitario) e tali inoltre che le $x_i(u, v)$ risultino continue sulla frontiera, e che, posto

$$x_i(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = p_i(\theta)\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

la curva

$$x_i = p_i(\theta)\,, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

sia chiusa, rettificabile, con lunghezza $\mathfrak{L}(p)$, dove con p indichiamo per brevità l'insieme delle coordinate $p_i(\theta)$. Studiare il comportamento dell'area $\Omega(p)$ della superficie armonica.

Gli Autori menzionati sopra, dopo un'indagine alquanto profonda, hanno dimostrato:

1º) Se p è considerato rappresentare un punto d'uno spazio metrico M,

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica LEONIDA TONELLI, Università Pisa (Italia).

(**) Ricevuto il 17 -VIII-1950.

[1] M. MORSE and C. TOMPKINS, *The continuity of the area of harmonic surfaces as a function of the boundary representations*. Amer. J. Math. **63**, 825-838 (1941).

dove per distanza tra i due punti p e q s'intenderà la quantità

$$(p, q) = \sum_i \{|v_i(p) - v_i(q)| + \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |p_i(\theta) - q_i(\theta)|\} , \tag{1.1}$$

l'area $\Omega(p)$ della superficie armonica definita dalle equazioni $x_i = x_i(u, v)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, è *una funzione continua delle coordinate* p.

2°) Se invece facciamo uso dello spazio M^*, con la distanza definita dalla relazione

$$(p, q) = \sum_i \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |p_i(\theta) - q_i(\theta)| , \tag{1.2}$$

la continuità di $\Omega(p)$ non sussiste più: esempi essendo forniti dove questa continuità manca.

Dagli stessi Autori è stato, però, osservato che, in tutti gli esempi forniti, dove tale continuità mancava, l'insieme formato con le lunghezze delle curve di contorno che approssimavano un dato contorno per il quale la continuità doveva poi mancare, non era limitato. Questo fatto ha condotto gli Autori a porre il problema della continuità dell'area delle superficie armoniche nello spazio delle curve di lunghezze inferiori a un numero fisso:

$$\mathfrak{L}(p) \leqslant L , \tag{1.3}$$

e facendo uso della metrica di M^*, in altre parole quando la distanza tra due punti sia data dalla (1.2).

La risposta a questa difficile questione non è attualmente conosciuta [2], nel seguito però daremo una risposta parziale, nel senso che se (1.3) è verificata assieme con qualche addizionale ipotesi, come nei teoremi II e III seguenti, allora $\Omega(p)$ risulta continua anche usando per distanza la (1.2).

2. – Generalità e notazioni. Sia B una regione piana con un sol contorno. Supporremo, per semplicità che B sia il cerchio unitario e Γ indicherà la circonferenza di contorno.

In ciò che segue $p_i(\theta)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, indicherà sempre una funzione definita in $(0, 2\pi)$, continua e a variazione limitata, mentre

$$x_i = p_i(\theta) , \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{2.1}$$

---

(2) Una risposta « in piccolo » è contenuta nella Nota L. C. YOUNG, *On the isoperimetric ratio for a harmonic surface*, Proceed. London Math. Soc. (2) **49**, 396-408 (1947).

rappresenterà una curva p continua e rettificabile oppure, come diremo spesso, un punto in uno spazio metrico M^*, dove la distanza sia data da (1.2), mentre $\mathcal{L}(p)$ indicherà la lunghezza di tale curva. Faremo la seguente ipotesi:

(A) *Tutte le curve p abbiano lunghezza uniformemente limitata*; in altre parole esiste una costante positiva L tale che

$$\mathcal{L}(p) \leqslant \mathrm{L} \quad (^3).$$

Sia H la superficie armonica di equazioni

$$x_i = x_i(u, v)\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

dove

$$u^2 + v^2 \leqslant 1\,,$$

e tale che, se poniamo

$$\mathrm{H}: \qquad x_i = x_i(r \cos \theta,\ r \operatorname{sen} \theta) = h_i(r, \theta)\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

allora le funzioni $h_i(r, \theta)$ si riducono alle date funzioni $p_i(\theta)$ per $r = 1$. Le funzioni $x_i(u, v)$ siano inoltre armoniche per $u^2 + v^2 < 1$ e, per un noto teorema di Poisson (⁴), si possono pertanto esprimere mediante la formola:

$$h_i(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_i(t)\, \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) - r^2}\, dt\,. \tag{2.3}$$

H dipende chiaramente da p, e pertanto sarà nel seguito indicato con $H(p)$.

Indicheremo nel seguito con:

$\{p\}$ un dato insieme di curve di equazioni (2.1),

$\{h_i(r, \theta)\}$ l'insieme delle corrispondenti funzioni armoniche date dalle (2.3),

$\{H(p)\}$ l'insieme delle superficie armoniche definite dalle $\{h_i(r, \theta)\}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$;

indicheremo, inoltre, con $\Omega_\varrho(p)$ l'area di quella parte di $H(p)$ quando r sia soggetto alla limitazione $0 \leqslant r \leqslant \varrho$, mentre $\Omega(p)$ indicherà l'area totale

---

(³) Dall'ipotesi (A) segue:

$$\int_0^{2\pi} |\, p_i'(\theta)\,|\, d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \{\, \sum_i p_i'^2(\theta)\, d\theta\, \}^{1/2} \leqslant \mathcal{L}(p) \leqslant L\,. \tag{A*}$$

(⁴) L. Tonelli, *Serie trigonometriche*. Zanichelli, Bologna 1928. Cfr. pp. 375-383.

di $H(p)$. Osserviamo qui che (5):

$$\Omega(p) = \lim_{\varrho \to 1} \Omega_\varrho(p) .$$

Con $\Omega_{1-\varrho}(p)$ si indicherà la differenza $\Omega(p) - \Omega_\varrho(p)$ (questa notazione non produce nessuna ambiguità nel seguito).

Sappiamo, per esempio, da un risultato del lavoro citato in (1), che quando ϱ è un numero fissato ma minore di 1, la $\Omega(p)$ risulta continua con p, anche se si usi solo della metrica di M^*, in altre parole:

ϱ e $\bar{p}$ essendo fissati, con $\varrho < 1$, per ogni ε positivo possiamo trovare un σ positivo in modo che, se p è tale che

$$\sum_i \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |\bar{p}_i(\theta) - p_i(\theta)| < \sigma ,$$

allora risulta (6):

$$|\Omega_\varrho(\bar{p}) - \Omega_\varrho(p)| < \varepsilon . \tag{2.4}$$

3. – Siano:

$$P = (r_1, \bar{\theta}) , \qquad Q = (r_2, \bar{\theta}) , \qquad (r_1 < r_2 < 1),$$

due punti distinti di B. Consideriamo l'arco $\widehat{PQ}$ tracciato su $H(p)$ e di equazioni

$$\widehat{PQ}: \qquad x_i = h_i(r, \bar{\theta}) , \qquad (i = 1, 2, ..., m),$$

dove r vari tra r_1 e r_2, mentre $\bar{\theta}$ sia fissato.

$L(r_1, r_2, \theta; p)$ indicherà la lunghezza di quest'arco è sarà data da:

$$L(r_1, r_2, \theta; p) = \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \sum_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial r} \right)^2 \right\}^{1/2} dr \leqslant \sum_i \int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{\partial h_i}{\partial r} \right| dr . \tag{3.1}$$

Dalla (2.3), derivando sotto il segno, si ottiene:

$$\frac{\partial h_i(r, \theta)}{\partial r} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_i(t) \frac{(1 + r^2) \cos(\theta - t) - 2r}{g^2(t, \theta, r)} dt , \tag{3.2}$$

---

(5) L. BIEBERBACH, *Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisformiger Bereiche.* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., pp., 181-188 (1924).

(6) Vedere pure: T. RADÓ, *On the problem of Plateau.* Ergebnisse der Matematik, Vol. 2, Leipzig 1933.

dove è stato posto, per semplificare le notazioni,

$$g(t, \theta, r) = 1 - 2 \cos(\theta - t) + r^2 .$$

Integrando per parti l'integrale che compare nella (3.2), si ottiene:

$$\frac{\partial h_i(r, \theta)}{\partial r} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(\theta - t)}{g(t, \theta, r)} \, \mathrm{d}p_i(t) , \tag{3.3}$$

e, conseguentemente:

$$\left| \frac{\partial h_i(r, \theta)}{\partial r} \right| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\operatorname{sen}(\theta - t)|}{g(t, \theta, r)} \, \mathrm{d}v_i(t) , \tag{3.3'}$$

dove con $v_i(t)$ si è indicato la funzione variazione di $p_i(t)$.
Usando quest'ultima relazione in (3.1) otteniamo:

$$L(r_1, r_2, \bar{\theta}; p) \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_i \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \frac{|\operatorname{sen}(\bar{\theta} - t)|}{g(t, \bar{\theta}, r)} \, \mathrm{d}v_i(t) .$$

Per un noto teorema di FUBINI possiamo cambiare l'ordine delle integrazioni nel secondo membro, ed otterremo:

$$L(r_1, r_2, \bar{\theta}; p) \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_i \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v_i(t) \int_{r_1}^{r_2} \frac{|\operatorname{sen}(\bar{\theta} - t)|}{1 - 2r\,|\cos(\bar{\theta} - t)| + r^2} \, \mathrm{d}r . \tag{3.3''}$$

L'ultimo integrale che compare nel secondo membro di quest'ultima relazione è notoriamente eguale a

$$\left\{ \operatorname{arctg} \left[\frac{r - \left| \cos \dfrac{\bar{\theta} - t}{2} \right|}{\operatorname{sen} \dfrac{\bar{\theta} - t}{2}} \right] \right\}_{r_1}^{r_2} ,$$

e in valore assoluto è quindi minore di 2π. Pertanto, fissato un qualunque ε positivo, possiamo determinare un σ positivo, tale che

$$\frac{1}{\pi} \int_{\bar{\theta}-\sigma}^{\bar{\theta}+\sigma} \mathrm{d}v_i(t) \int_{r_1}^{r_2} \frac{|\operatorname{sen}(\bar{\theta} - t)|}{1 - 2r\,|\cos(\bar{\theta} - t)| + r^2} \, \mathrm{d}r \leqslant 2 \sum_i \int_{\bar{\theta}-\sigma}^{\bar{\theta}+\sigma} \mathrm{d}v_i(t) \leqslant \frac{1}{2}\, \varepsilon , \tag{3.4}$$

e ciò uniformemente rispetto a $\bar{\theta}$, a causa della continuità degli integrali coinvolti. Inoltre, sempre in corrispondenza del σ fissato, possiamo determinare un η positivo, tale che se

$$|r_1 - r_2| \leqslant \eta\,, \qquad \sigma \leqslant \theta - t \leqslant 2\pi - \sigma\,,$$

è allora:

$$\left| \operatorname{arctg} \left[\frac{r_1 - \left|\cos \dfrac{\theta - t}{2}\right|}{\left|\operatorname{sen} \dfrac{\theta - t}{2}\right|} \right] - \operatorname{arctg} \left[\frac{r_2 - \left|\cos \dfrac{\theta - t}{2}\right|}{\left|\operatorname{sen} \dfrac{\theta - t}{2}\right|} \right] \right| < \frac{\varepsilon}{2mL}\,. \tag{3.5}$$

Spezzando allora l'integrale che compare al secondo membro della (3.3″) in tre integrali rispettivamente tra $\theta - \sigma$ e $\theta + \sigma$, tra 0 e $\theta - \sigma$, e tra $\theta + \sigma$ e 2π, si ottiene facilmente, facendo uso delle (3.4), (3.5), e della (A), la relazione seguente:

$$L(r_1, r_2, \theta; p) \leqslant \frac{1}{2}\,\varepsilon + \sum_i (\theta - \sigma)\,\frac{\varepsilon}{2m} + \sum_i (2\pi - \theta - \sigma)\,\frac{\varepsilon}{2m\pi} \leqslant \varepsilon\,,$$

e ciò uniformemente rispetto a θ, se è

$$|r_1 - r_2| \leqslant \eta\,.$$

Ammettiamo ora per l'insieme $\{p\}$ la seguente proprietà:

(B) *Preso un qualunque ε positivo, è possibile trovare un numero σ positivo, tale che:*

$$\sum_i \int_{\theta - \sigma}^{\theta + \sigma} dv_i \leqslant \varepsilon\,,$$

per ogni p di $\{p\}$, e, una volta fissato p (7), *per tutti i valori di θ riempienti un insieme $E(p)$, dipendente eventualmente da p, ovunque denso su $(0, 2\pi)$.*

---

(7) Se indichiamo con $L(\theta - \sigma, \theta + \sigma; p)$ la lunghezza dell'arco di curva:

$$x_i = p_i(t)\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\,, \qquad \theta - \sigma \leqslant t \leqslant \theta + \sigma\,,$$

e se

(B*) per un qualunque $\varepsilon > 0$, possiamo trovare un $\sigma > 0$, tale che

$$L(\theta - \sigma, \theta + \sigma; p) \leqslant \varepsilon\,, \quad \text{per un qualunque } p \text{ di } \{p\},$$

allora la proprietà (B) è verificata a causa d'una nota relazione tra lunghezza e variazione totale.

Si ottiene allora il seguente

Teorema I. *Se sono verificate le proprietà* (A) *e* (B), *allora per ogni* ε *positivo possiamo determinare un* σ *positivo tale che, se*

$$|r_1 - r_2| < \sigma$$

allora è

$$L(r_1, r_2, \bar{\theta}; p) \leqslant \varepsilon ,$$

per ogni p *dell'insieme* $\{p\}$, *e per ogni* $\bar{\theta}$ *appartenente all'insieme* $E(p)$.

4. – Necessiteremo nel seguente alcune generalizzazioni di ben note proprietà sulle funzioni armoniche.

Dalla (2.3) se $0 \leqslant r < 1$, otteniamo:

$$\frac{\partial h_i(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_i(t) \frac{(1 - r^2) 2r \operatorname{sen}(t - \theta)}{g^2(t, \theta, r)} \, dt . \tag{4.1}$$

Detto θ_0 un numero dell'intervallo $(0, 2\pi)$, se definiamo $p_i(t)$ periodicamente fuori dell'intervallo $(0, 2\pi)$, possiamo scrivere l'integrale al secondo membro della (4.1) con i limiti $\theta_0 - \pi$ e $\theta_0 + \pi$, anzicchè 0 e 2π. Poniamo poi

$$\frac{\partial h_i(1, \theta)}{\partial \theta} = p_i'(\theta) ,$$

dove l'eguaglianza ha senso solo quasi dappertutto.

Abbiamo, così, la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i(r, \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial h_i(1, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \left\{ [p_i(t) - p_i(\theta)] \operatorname{cotg} \frac{t - \theta}{2} - p_i'(\theta) \right\} \frac{1 - r^2}{g(t, \theta, r)} \, dt \, + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} [p_i(t) - p_i(\theta)] \left\{ \frac{2r \operatorname{sen}(t - \theta)}{g(t, \theta, r)} - \operatorname{cotg} \frac{t - \theta}{2} \right\} \frac{1 - r^2}{g(t, \theta, r)} \, dt \; (^8) . \end{aligned} \tag{4.2}$$

---

[8] Abbiamo fatto uso della seguente identità:

$$\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} p_i(\theta) \frac{2r \operatorname{sen}(t - \theta)(1 - r^2)}{g^2(t, \theta, r)} \, dt = 0 , \qquad 0 \leqslant r < 1 .$$

Osserviamo ora che

$$(4.3)\qquad [p_i(\theta)-p_i(t)]\operatorname{cotg}\frac{t-\theta}{2}-2\,\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}=$$

$$=\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}\left[\frac{\operatorname{sen}(t-\theta)}{t-\theta}\cdot\frac{(t-\theta)^2}{1-\cos(t-\theta)}-2\right].$$

Preso un qualunque ε_1 positivo, possiamo determinare un σ_1 pure positivo e tale che, se $|t-\theta|<\sigma_1$, sia

$$(4.3')\qquad \left|\frac{\operatorname{sen}(t-\theta)}{t-\theta}\,\frac{(t-\theta)^2}{1-\cos(t-\theta)}-2\right|<\varepsilon_1 .$$

Consideriamo ora il primo integrale al secondo membro di (4.2), e sia δ un numero positivo sufficientemente piccolo. Decomponiamo quest'integrale in tre parti, e precisamente il primo tra i limiti $\theta-\delta$ e $\theta+\delta$, il secondo con i limiti $\theta-\pi$ e $\theta-\delta$, e il terzo con i limiti $\theta+\delta$ e $\theta+\pi$. Il primo di questi tre integrali può essere riscritto nella maniera seguente:

$$(4.4)\qquad \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\left\{\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right\}\frac{1-r^2}{g(t,\theta,r)}\,dt+$$

$$+2\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\left\{\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right\}\left\{\frac{\operatorname{sen}(t-\theta)}{t-\theta}\cdot\frac{(t-\theta)^2}{1-\cos(t-\theta)}-2\right\}\frac{1-r^2}{g(t,\theta,r)}\,dt+$$

$$+2\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}p_i'(\theta)\left\{\frac{\operatorname{sen}(t-\theta)}{t-\theta}\cdot\frac{(t-\theta)^2}{1-\cos(t-\theta)}-2\right\}\frac{1-r^2}{g(t,\theta,r)}\,dt,$$

e ciò ogni qualvolta gli integrali coinvolti hanno senso. Le ipotesi che introdurremo nel seguito assicureranno questo fatto.

Se supponiamo $\delta<\sigma/2$, e a causa della (4.3'), il primo integrale nel quale abbiamo decomposto l'espressione (4.2) risulta maggiorata dalla quantità:

$$(4.5)\qquad (1+\varepsilon_1)\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|\frac{1-r^2}{g(t,\theta,r)}\,dt+2\pi\varepsilon_1|p_i'(\theta)|.$$

Consideriamo adesso il secondo e il terzo degli integrali nel quale abbiamo decomposto l'espressione (4.2). I due numeri ε e δ essendo stati fissati, possiamo determinare un numero positivo η_1, tale che, se:

$$1-r^2<\eta_1\,, \qquad t>\theta+\delta \quad \text{oppure} \quad t<\theta-\delta\,,$$

allora:

$$\frac{1-r^2}{g(t,\theta,r)}<\varepsilon\,,$$

uniformemente rispetto a θ in $(0, 2\pi)$, o in qualunque altro intervallo di lunghezza 2π. Pertanto la somma dei due integrali in considerazione è, in valore assoluto, maggiorata dall'espressione:

$$\varepsilon\int\limits_{\theta-\pi}^{\theta+\pi}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}\operatorname{cotg}\frac{t-\theta}{2}-p_i'(\theta)\right|dt\,,$$

e, facendo uso della relazione (4.3), questa può essere maggiorata nella maniera seguente:

$$\varepsilon\int\limits_{\theta-\pi}^{\theta+\pi}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|dt+\varepsilon\int\limits_{\theta-\pi}^{\theta+\pi}|p_i'(\theta)|\cdot\left|\frac{\operatorname{sen}(t-\theta)}{t-\theta}\cdot\frac{(t-\theta)^2}{1-\cos(t-\theta)}-1\right|dt+$$

$$+\,\varepsilon\int\limits_{\theta-\pi}^{\theta+\pi}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|\cdot\left|\frac{\operatorname{sen}(t-\theta)}{t-\theta}\cdot\frac{(t-\theta)^2}{1-\cos(t-\theta)}-1\right|dt\,.$$

Per un risultato affermato dalla (4.3′), questa quantità è maggiorata dall'espressione:

$$\text{(4.6)} \qquad \varepsilon(1+\varepsilon_1)\int\limits_{\theta-\pi}^{\theta+\pi}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|dt+2\pi\varepsilon\varepsilon_1|p_i'(\theta)|\,.$$

Dai risultati (4.5) e (4.6), si ottiene che il primo integrale che appare nel secondo membro di (4.2), è, in valore assoluto minore di:

$$\text{(4.7)} \qquad (1+\varepsilon_1)\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|dt+$$

$$+\,\varepsilon(1+\varepsilon_1)\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|dt+2\pi\varepsilon_1(1+\varepsilon)|p_i'(\theta)|\,,$$

e ciò se $1-r^2<\eta_1$ e $\delta<\sigma_1/2$.

Quanto al secondo integrale che compare al secondo membro della (4.2), consideriamo la relazione

$$\frac{2r \operatorname{sen}(t-\theta)}{g} - \operatorname{cotg}\frac{t-\theta}{2} = \frac{2r \operatorname{sen}(t-\theta) - \operatorname{sen}(t-\theta) - r^2 \operatorname{sen}(t-\theta)}{[1-\cos(t-\theta)]g} = \tag{4.8}$$

$$= -\frac{(1-r)^2}{g} \operatorname{cothg}\frac{t-\theta}{2},$$

mediante la quale esso si può scrivere:

$$-\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \left\{ [p_i(t) - p(\theta)] \operatorname{cotg}\frac{t-\theta}{2} \cdot \frac{1-r^2}{g} \right\} \frac{(1-r)^2}{g}\, dt,$$

oppure ancora:

$$-\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \left\{ [p_i(t) - p_i(\theta)] \operatorname{cotg}\frac{t-\theta}{2} - p_i'(\theta) \right\} \frac{1-r^2}{g} \cdot \frac{(1-r)^2}{g}\, dt -$$

$$- \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} p_i'(\theta)\, \frac{1-r^2}{g} \cdot \frac{(1-r)^2}{g} dt .$$

Osserviamo che $(1-r)^2 \leqslant g$, conseguentemente, la quantità precedente si può maggiorare, in valore assoluto, con la espressione

$$\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \left| [p_i(t) - p_i(\theta)] \operatorname{cotg}\frac{t-\theta}{2} - p_i'(\theta) \right| \frac{1-r^2}{g}\, dt + 2\pi |p_i'(\theta)| . \tag{4.9}$$

L'integrale che appare in questa espressione è lo stesso di quello che appare al primo posto nel secondo membro della (4.2). Possiamo, pertanto dire, facendo uso della (4.7), che

$$\left| \frac{\partial h_i(r,\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial h_i(1,\theta)}{\partial\theta} \right| \leqslant \frac{1+\varepsilon_1}{\pi} \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \left| \frac{p_i(t) - p_i(\theta)}{t-\theta} - p_i'(\theta) \right| \frac{1-r^2}{g}\, dt + \tag{4.10}$$

$$+ (1+\varepsilon)(1+2\varepsilon_1)|p_i'(\theta)| + \frac{2\varepsilon(1+\varepsilon_1)}{\pi} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \left| \frac{p_i(t) - p_i(\theta)}{t-\theta} - p_i'(\theta) \right| dt ,$$

dove $\varepsilon_1 > 0$ è un qualunque numero fissato, in corrispondenza del quale è possibile determinare un $\sigma_1 > 0$, come è stato detto in precedenza, δ è un qualunque numero positivo, ma minore di $\sigma_1/2$, fissato però una volta per tutte, ε è un numero positivo arbitrario, e $\eta_1 > 0$ è trovato in corrispondenza di δ e di ε, in modo tale che se $1 - r^2 < \eta_1$, allora la (4.10) è verificata, ogni qualvolta gli integrali coinvolti abbiano senso.

5. – Introduciamo ora, la seguente ipotesi:

(C) Esiste una funzione $q(\theta)$, definita in $(0\ 2\pi)$, tale che:

$$\left| \frac{p_i(t) - p_i(\theta)}{t - \theta} \right| \leqslant q(\theta)\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

per ogni θ e t dell'intervallo $(0, 2\pi)$, e per ogni p di $\{p\}$, e dove $q(\theta)$ è una funzione sommabile in $(0, 2\pi)$.

Questa ipotesi implica l'esistenza degli integrali di (4.10).

Siano ora $\theta_1 < \theta_2$, due valori appartenenti all'intervallo $(0, 2\pi)$; con $L(\theta_1, \theta_2, r)$ indichiamo la lunghezza dell'arco

$$x_i = h_i(r, \theta)\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

mentre θ varia nell'intervallo (θ_1, θ_2). Avremo così:

$$L(\theta_1, \theta_2, 1) - L(\theta_1, \theta_2, r) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left\{ \sum_i \left(\frac{\partial h_i(1, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \right]^{1/2} - \left\{ \sum_i \left(\frac{\partial h_i(r, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}^{1/2} d\theta\,, \tag{5.1}$$

e facendo uso di note disuguaglianze, si ha:

$$L(\theta_1, \theta_2, 1) - L(\theta_1, \theta_2, r) \leqslant \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \sum_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial \theta} - p_i'(\theta) \right]^2 \right\}^{1/2} d\theta \leqslant \sum_i \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left| \frac{\partial h_i(r, \theta)}{\partial \theta} - p_i'(\theta) \right| d\theta\,.$$

Possiamo adesso sostituire negli integrali dell'ultima somma la valutazione (4.10), ed otteniamo:

$$\begin{aligned} |L(\theta_1, \theta_2, 1) - L(\theta_1, \theta_2, r)| &\leqslant \frac{1 + \varepsilon_1}{\pi} \sum_i \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \left| \frac{p_i(t) - p_i(\theta)}{t - \theta} - p_i'(\theta) \right| \frac{1 - r^2}{g}\, dt + \\ &+ \frac{2\varepsilon(1 + \varepsilon_1)}{\pi} \sum_i \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \left| \frac{p_i(t) - p_i(\theta)}{t - \theta} - p_i'(\theta) \right| dt + (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon_1) \sum_i \int_{\theta_1}^{\theta_2} |p_i'(\theta)|\, d\theta\,; \end{aligned} \tag{5.2}$$

però, secondo la ipotesi (C), abbiamo:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi}\left\{\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}\right|+|p_i'(\theta)|\right\}dt \leqslant 2q(\theta)\,,$$

e, analogamente,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|\frac{1-r^2}{g}\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi}\left\{\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}\right|+|p_i'(\theta)|\right\}\frac{1-r^2}{g}\,dt \leqslant 2q(\theta)\,.$$

Così che, la (5.2) si riduce alla

$$(5.3)\qquad |L(\theta_1,\theta_2,r)-L(\theta_1,\theta_2,1)| \leqslant \left[\frac{2m}{\pi}-8m\varepsilon(1+\varepsilon_1)+m(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)\right]\int_{\theta_1}^{\theta_2} q(\theta)\,d\theta\,,$$

oppure ancora:

$$(5.4)\qquad L(\theta_1,\theta_2,r) \leqslant L(\theta_1,\theta_2,1)+M\int_{\theta_1}^{\theta_2} q(\theta)\,d\theta\,,$$

dove M è una conveniente costante, indipendente da p, r, θ_1, θ_2.

6. – Torniamo ora alla superficie armonica H. Il numero positivo ε essendo stato fissato, determiniamo η come detto nel teorema I, dopo di che se r_1 e r_2 sono tali che $|r_1-r_2|<\eta$, allora $L(\theta,\theta_1,\theta_2)\leqslant\varepsilon$, per ogni θ appartenente all'insieme $E(p)$, e per ogni p di $\{p\}$. Ricordiamo che $\Omega_{1-\varrho}(p)$ è l'area di quella parte della superficie H per cui $1-\varrho\leqslant r\leqslant 1$, e questa area è, per la sua stessa definizione di LEBESGUE, certamente non maggiore del minimo limite delle aree delle superficie poliedriche, appartenenti ad una stessa famiglia d'un tipo ben determinato, inscritte tutte nella superficie $H(r,\theta)$, $1-\varrho\leqslant r\leqslant 1$, quando il massimo diametro delle sue facce tende a zero. Le superficie poliedriche che sceglieremo saranno definite come segue.

Consideriamo le due famiglie di curve:

a) $$x_i = x_i(r,\theta), \qquad (i=1,2,\dots,m),$$

dove r è supposto fisso e θ varia tra 0 e 2π. Queste curve sono del tipo della circonferenza.

b) $$x_i = x_i(r,\theta)\,, \qquad i(=1,2,\dots,m),$$

dove, invece, θ è fissato e r varia tra $1-\varrho$ e 1. Queste curve sono del tipo dei raggi, e per quanto è stato detto prima, sono in lunghezza non maggiori di ε. Indichiamo con $\bar{\eta}$ un numero positivo minore di η_1 e di η_2

Dividiamo l'intervallo $(0, 2\pi)$ in n parti eguali, che indichiamo con (a_j, a_{j+1}), $(j=1, 2,..., n)$, e consideriamo le curve della famiglia b), passanti da questi punti di suddivisione, precisamente

$$x_i = x_i(r, a_j)\,, \qquad (i=1, 2,..., m)\,.$$

Suddividiamo pure l'intervallo $(1-\varrho, 1)$ in n parti eguali, che indicheremo con (b_k, b_{k+1}), $(k=1, 2,..., n)$, e consideriamo le curve della famiglia a), passanti per questi punti di suddivisione, precisamente

$$x_i = x_i(b_k, \theta)\,, \qquad (i=1, 2,..., m).$$

Immaginiamo di suddividere ulteriormente il reticolo così ottenuto mediante delle diagonali, nel modo consueto, onde ottenere una rete di triangoli curvilinei, i quali definiranno una superficie poliedrica Π.

Prendiamo in considerazione, di Π, solo quei triangoli che corrispondono alla medesima parte (a_j, a_{j+1}). Dalla (5.4) abbiamo:

$$L(a_j, a_{j+1}, r) \leqslant L(a_j, a_{j+1}, 1) + M\int_{a_j}^{a_{j+1}} q(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,,$$

se $1-r^2 < \bar{\eta}$.

Conseguentemente l'area complessiva d'una tale categoria di triangoli risulta non maggiore di

$$\varepsilon\cdot\left[L(a_j, a_{j+1}, 1) + M\int_{a_j}^{a_{j+1}} q(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right],$$

mentre l'area totale di Π è non maggiore di

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon\cdot\left[L(a_j, a_{j+1}, 1) + M\int_{a_j}^{a_{j+1}} q(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right] \leqslant \varepsilon\cdot\left[L + M\int_{0}^{2\pi} q(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right],$$

per un qualunque p di $\{p\}$. Otteniamo così il seguente:

Teorema II. *Se l'ipotesi* (C) *è soddisfatta, allora l'area* $\Omega(p)$ *è continua in* $\{p\}$, *facendo uso della metrica* (1.2) *in* M^*.

Infatti, l'ipotesi (C) implica (A) e (B*), (e, conseguentemente implica (B)) e, allora, a causa dei risultati (6.1) e (2.4) il teorema risulta dimostrato.

7. – Introduciamo ora delle nuove ipotesi:

(C_1) Esistono delle funzioni $q_i(\theta)$, misurabili, tali che:

$$\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}\right| \leqslant q_i(\theta)\,, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi;\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\,.$$

(C_2) Esiste un plurintervallo $\Delta(p)$, dipendente eventualmente da p, e tre numeri positivi ε_2, σ_2, β tali che:

a) se θ appartiene all'intervallo $(0, 2\pi)$ ma non appartiene a $\Delta(p)$,

b) se $|t-\theta|<\sigma_2$, allora risulta

1°) $$\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|<\varepsilon_2\,, \qquad \text{per un qualunque } p_i,$$

2°) $$\int\limits_{\Delta(p)} q_i(\theta)\,d\theta<\beta\,, \qquad \text{per un qualunque } q_i.$$

Osserviamo che $p_i(\theta)$ essendo continuo e $\bar{p}$ essendo un punto fissato di M^*, possiamo trovare un numero K, tale che:

$$|p_i(t)|<K\,, \qquad 0<t\leqslant 2\pi\,,$$

e per un qualunque p di un conveniente intorno di $\bar{p}$.

Se indichiamo con N il più grande dei due numeri: $2K/\sigma_2$ e ε_2, abbiamo:

$$\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|\leqslant N+|p_i'(\theta)|\,, \tag{7.1}$$

per un qualunque t di $(0, 2\pi)$ e un θ non appartenente a $\Delta(p)$. Inoltre, se $\delta<\sigma/2$, abbiamo:

$$\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|\frac{1-r^2}{g}\,dt\leqslant\varepsilon_2\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\frac{1-r^2}{g}\,dt\leqslant 2\pi\varepsilon_2\,, \tag{7.2}$$

per un qualunque θ non appartenente a $\Delta(p)$.

La relazione (5.2), mediante ovvie notazioni, può essere riscritta nella maniera seguente:

$$|L(\theta_1,\theta_2,1)-L(\theta_1,\theta_2,r)|\leqslant\frac{1+\varepsilon_1}{\eta}\sum_i\int\limits_{(\theta_1,\theta_2)-\Delta\cdot(\theta_1,\theta_2)}d\theta\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|\frac{1-r^2}{g}\,dt+$$

$$+\frac{1+\varepsilon_1}{\pi}\sum_i\int\limits_{\Delta\cdot(\theta_1,\theta_2)}d\theta\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|\frac{1-r^2}{g}\,dt+(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon)\sum_i\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}|p_i'(\theta)|\,d\theta+$$

$$+\frac{2\varepsilon(1+\varepsilon_1)}{\pi}\sum_i\int\limits_{(\theta_1,\theta_2)-\Delta\cdot(\theta_1,\theta_2)}d\theta\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|dt+$$

$$+\frac{2\varepsilon(1+\varepsilon_1)}{\pi}\sum_i\int\limits_{\Delta\cdot(\theta_1,\theta_2)}d\theta\int\limits_{\theta-\pi}^{\theta+\pi}\left|\frac{p_i(t)-p_i(\theta)}{t-\theta}-p_i'(\theta)\right|dt.$$

Facendo uso delle (C_1), $(C_2)_2$, (7.1), (7.2), otteniamo:

$$|L(\theta_1,\theta_2,1)-L(\theta_1,\theta_2,r)|\leqslant\frac{1+\varepsilon}{\pi}m\cdot 2\pi\varepsilon_2|\theta_1-\theta_2|+\frac{1+\varepsilon_1}{\pi}\sum_i\int\limits_{\Delta\cdot(\theta_1,\theta_2)}q_i(\theta)\,d\theta+$$

$$+\frac{1+\varepsilon_1}{\pi}\sum_i\int\limits_{\Delta\cdot(\theta_1,\theta_2)}|p_i'(\theta)|\,d\theta+(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)\sum_i\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}|p_i'(\theta)|\,d\theta+\frac{2(1+\varepsilon_1)\varepsilon}{\pi}\sum_i\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}|p_i'(\theta)|\,d\theta+$$

$$+\frac{2(1+\varepsilon_1)\varepsilon}{\pi}m\cdot N|\theta_1-\theta_2|+\frac{2\varepsilon(1+\varepsilon_1)}{\pi}\sum_i\int\limits_{\Delta\cdot(\theta_1,\theta_2)}q_i(\theta)\,d\theta+\frac{2\varepsilon(1+\varepsilon_1)}{\pi}\sum_i\int\limits_{\Delta\cdot(\theta_1,\theta_2)}|p_i(\theta)|\,d\theta,$$

oppure, dopo fatte le dovute riduzioni,

$$|L(\theta_1,\theta_2,1)-L(\theta_1,\theta_2,r)|\leqslant a|\theta_1-\theta_2|+b\sum_i\int\limits_{\Delta\cdot(\theta_1,\theta_2)}q_i(\theta)\,d\theta+c\sum_i\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}|p_i'(\theta)|\,d\theta,$$

dove a, b, c sono delle convenienti costanti positive. Otteniamo così il seguente

Teorema III. *Se le ipotesi* (A), (B), (C_1), (C_2) *sono verificate,* $\Omega(p)$ *è continuo in* M^*, *dove la metrica sia data da* (1.2).

Infatti, operando come al n. 6 avremo:

$$L(\bar a_j,\bar a_{j+1},r)\leqslant L(\bar a_j,\bar a_{j+1},1)+a(\bar a_{j+1}-\bar a_j)+b\sum_i\int\limits_{\Delta\cdot(\bar a_{j+1},\bar a_j)}q_i(\theta)\,d\theta+c\sum_i\int\limits_{\bar a_j}^{\bar a_{j+1}}|p_i'(\theta)|\,d\theta,$$

dove, invece degli intervalli (a_j, a_{j+1}) del n. 6, usiamo gli intervalli $(\bar{a}_j, \bar{a}_{j+1})$, con $\bar{a}_j$ un qualunque elemento di $E(p)$ appartenente ad (a_j, a_{j+1}). Come conseguenza della relazione precedente, abbiamo che l'area dei triangoli di Π corrispondenti alla stessa parte $(\bar{a}_j, \bar{a}_{j+1})$ è non maggiore di

$$\varepsilon\cdot\left[[L(\bar{a}_j, \bar{a}_{j+1}, 1) + a|\bar{a}_{j+1} - \bar{a}_j| + b\sum_i \int_{\Delta\cdot(\bar{a}_{j+1}, \bar{a}_j)} q_i(\theta)\, d\theta + c\sum_i \int_{\bar{a}_j}^{\bar{a}_{j+1}} |p_i'(\theta)|\, d\theta\right],$$

e l'area totale di Π è non maggiore di

$$\varepsilon\cdot\left\{L + 2\pi a + b\sum_i \int_{\Delta} q_i(\theta)\, d\theta + c\sum_i \int_0^{2\pi} |p_i'(\theta)|\, d\theta\right\},$$

e questa quantità, a causa della (A*) e di $(C_2)_2$, è minore di

$$\varepsilon\cdot\{L + 2\pi a + b\cdot m\cdot\beta + c\cdot m\cdot L\},$$

così la dimostrazione è completa.