GIORGIO SESTINI (*)

Criterio di stabilità in un problema di Meccanica non lineare.

1. – Introduzione.

I problemi della meccanica non lineare, in uno o più gradi di libertà, hanno in quest'ultimo decennio offerto un vasto campo di indagine. I risultati conseguiti dalle scuole italiana, francese, russa e americana circa la periodicità e la stabilità degli integrali delle equazioni differenziali in cui si traducono i problemi stessi, sono stati veramente notevoli.

Un problema tipico di meccanica non lineare ad un grado di libertà, e perciò dei primi ad essere studiato, è quello del moto rettilineo di un punto materiale, soggetto ad una forza elastica, ad una forza dissipativa funzione non lineare della velocità (ad es. una resistenza del mezzo in cui avviene il moto) oltre ad una eventuale forza disturbatrice, funzione del tempo.

Tra i numerosi studi relativi a questo problema ci limiteremo a ricordare quelli di G. SANSONE, W. E. MILNE, A. SIGNORINI, L. AMERIO, R. CACCIOPPOLI e A. GHIZZETTI, G. SESTINI [1].

È ben noto che lo studio di un tal moto, a partire da opportune prefissate condizioni iniziali di posizione e velocità (per $t = t_0$), si riconduce a quello degli integrali di una equazione differenziale non lineare del secondo ordine del tipo

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varphi(\dot{x}) = f(t) , \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt} , \tag{1}$$

ove $x = x(t)$ è l'ascissa del punto mobile all'istante generico t, ω una costante positiva, dipendente dalla costante di attrazione elastica oltre che dalla massa del punto mobile, $\varphi(\dot{x})$ una funzione continua, definita per tutti i valori reali di $\dot{x}$, soddisfacente alla condizione

$$\dot{x}\,\varphi(\dot{x}) \geqslant 0 , \tag{2}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

[1] Vedasi Nota bibliografica alla fine del lavoro.

ed $f(t)$ funzione limitata di t. Le due funzioni $\varphi(\dot{x})$ ed $f(t)$ dovranno soddisfare inoltre ad altre convenienti ipotesi, atte ad assicurare l'esistenza e la unicità in $(t_0, +\infty)$ degli integrali di (1).

Nell'ipotesi di una $f(t)$ limitata ed una $\varphi(\dot{x})$ soddisfacente anche alla condizione

$$|\varphi(\dot{x})| > 2k\,|\dot{x}| \qquad \text{per} \qquad |\dot{x}| > A\,,$$

con A e k costanti positive, CACCIOPPOLI e GHIZZETTI [2] hanno dimostrato la stabilità degli integrali di (1) per $t \to +\infty$.

Avendo gli stessi Autori dimostrato con un semplice esempio, che la sola crescenza della $\varphi(\dot{x})$ non basta ad assicurare la stabilità degli integrali di (1) e potendosi facilmente provare direttamente tale stabilità quando sia $\varphi(\dot{x}) = 2\varepsilon\dot{x}$, restava a domandarsi sotto quali condizioni potesse assicurarsi tale stabilità anche nel caso in cui, per $\dot{x}$ tendente all'infinito, la $\varphi(\dot{x})$ risulti, rispetto a $\dot{x}$ un infinito di ordine $\alpha < 1$, essendo dubbia in questo caso la validità del citato criterio.

Lo scopo di questo lavoro è appunto quello di assegnare un criterio di stabilità per gli integrali di (1), valido anche nel caso di un ordine di crescenza per $\varphi(\dot{x})$ minore di 1.

Un tale criterio si consegue, quando la (1) ammetta integrali definiti in $(t_0, +\infty)$ e valga la (2) con l'*ipotesi che la funzione $f(t)$ sia a variazione limitata in $(t_0, +\infty)$*.

Completa il lavoro l'esame diretto del caso lineare, nell'ipotesi che la *funzione $f(t)$ sia limitata.*

2. – Considerazioni preliminari sugli integrali di (1).

L'equazione (1), sotto la ipotesi (2) con $\lim\limits_{h\to\infty}\varphi(h) = \infty$ ed $f(t)$ limitata, ammetta integrali definiti in $(t_0, +\infty)$.

Con ragionamento analogo a quello fatto da CACCIOPPOLI e GHIZZETTI, nel citato lavoro, si prova subito che gli integrali di (1), qualora non risultino limitati, non possono diventare definitivamente monotoni.

Se infatti, ad es., fosse $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = +\infty$, con $x(t)$ monotona, a partire da un t_0 in poi, per $t > t_0$, sarebbe $\dot{x}(t) > 0$ e $x(t) > 0$ e quindi dalla (1), essendo $\varphi(\dot{x}) > 0$,

$$\ddot{x} < f(t) - \omega^2 x\,.$$

---

[2] Cfr. Nota bibliografica 2).

Da questa, non appena si prenda $t > \bar{t}_0 > t_0$ in modo che risulti $\omega^2 x > L > f(t)$, il che è possibile essendo $f(t)$ limitata e $x(t)$ divergente a $+\infty$ per $t \to +\infty$, si ha $\ddot{x} < 0$ e quindi $\lim\limits_{t\to\infty} \ddot{x} = -\infty$ con la conseguenza che sarebbe anche $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{x} = -\infty$, contrariamente a quanto abbiamo supposto. Con analogo ragionamento si prova che non può essere la $x(t)$ definitivamente decrescente e illimitata.

Queste considerazioni portano ad affermare che, se gli integrali di (1) non restano limitati per $t \to +\infty$, la $\dot{x}$ deve, per $t > \bar{t}_0$, cambiare infinite volte di segno e quindi, per la continuità, annullarsi infinite volte.

Vogliamo ora provare che, fisse rimanendo le ipotesi sulla $\varphi(\dot{x})$, *se la funzione $f(t)$ è tale da risultare convergenti i due integrali*

$$\int_{t_0}^{+\infty} f(\xi)\,\mathrm{sen}\,\omega\xi\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad \int_{t_0}^{+\infty} f(\xi)\cos\omega\xi\,\mathrm{d}\xi\,, \tag{3}$$

e se la $\dot{x}(t)$ si mantiene limitata, deve risultare limitata anche la $x(t)$.

Osserveremo che le condizioni (3) risultano certamente soddisfatte qualora la funzione $f(t)$ sia a *variazione limitata* in $(t_0, +\infty)$. Infatti, in questa ipotesi la $f(t)$ risulta differenza di due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ non negative, non decrescenti, limitate (3). Si ha allora, ad es. per il primo integrale (3),

$$\int_{t_0}^{+\infty} f(\xi)\,\mathrm{sen}\,\omega\xi\,\mathrm{d}\xi = \int_{t_0}^{+\infty} f_1(\xi)\,\mathrm{sen}\,\omega\xi\,\mathrm{d}\xi - \int_{t_0}^{+\infty} f_2(\xi)\,\mathrm{sen}\,\omega\xi\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Applicando a ciascuno degli integrali del secondo membro il 2° teorema della media (4), si vede che, in valore assoluto, ognuno di essi resta minore di $2M\omega^{-1}$, essendo M il più grande degli estremi superiori di $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ in $(t_0, +\infty)$.

Essendo sen ωt e cos ωt due integrali indipendenti dell'equazione $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$ l'integrale generale della (1) può mettersi sotto la forma (5)

$$\begin{aligned} x(t) &= A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \alpha) + \\ &+ \omega^{-1}\int_{t_0}^{t} f(\xi)\,\mathrm{sen}\,\omega(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi - \omega^{-1}\int_{t_0}^{t} \varphi[\dot{x}(\xi)]\,\mathrm{sen}\,\omega(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\,, \end{aligned} \tag{4}$$

con A ed α costanti determinabili in funzione dei valori assegnati a $x(t)$ ed $\dot{x}(t)$ per $t = t_0$.

---

(3) Cfr. Nota bibliografica 3), parte II, pag. 127.
(4) Cfr. Nota bibliografica 8), parte I, pag. 116.
(5) Cfr. Nota bibliografica 5), d), pp. 464-466.

Per derivazione rispetto a t, si ottiene dalla (4)

$$(5)\qquad \dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \alpha) + \int_{t_0}^{t} f(\xi) \cos\omega(t-\xi)\,d\xi - \int_{t_0}^{t} \varphi[\dot{x}(\xi)] \cos\omega(t-\xi)\,d\xi.$$

Essendo per ipotesi $\dot{x}(t)$ limitata, con che resta limitata anche $\varphi(\dot{x})$, ed essendo limitato per le (3) il secondo termine del secondo membro di (5), avendosi da questa

$$\left|\int_{t_0}^{t} \varphi[\dot{x}(\xi)] \cos\omega(t-\xi)\,d\xi\right| < |A|\,\omega + |\dot{x}| + \left|\int_{t_0}^{t} f(\xi) \cos\omega(t-\xi)\,d\xi\right|,$$

segue la limitatezza per qualunque t, di $\mathcal{J}(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi[\dot{x}(\xi)] \cos\omega(t-\xi)\,d\xi$.

Scritto adesso $t + \pi/2\omega$ al posto di t, avendosi

$$\mathcal{J}(t+\pi/2\omega) = \int_{t_0}^{t} \varphi[\dot{x}(\xi)]\cos\omega(t+\pi/2\omega-\xi)\,d\xi + \int_{t}^{t+\pi/2\omega} \varphi[\dot{x}(\xi)]\cos\omega(t+\pi/2\omega-\xi)\,d\xi =$$

$$= -\pi/2\omega \underset{(t,t+\pi/2\omega)}{\mathrm{Med}} \{\varphi(\dot{x}) \operatorname{sen}\omega(t-\xi)\} - \int_{t_0}^{t} \varphi(\dot{x}) \operatorname{sen}\omega(t-\xi)\,d\xi,$$

si ottiene

$$\int_{t_0}^{t} \varphi[\dot{x}(\xi)] \operatorname{sen}\omega(t-\xi)\,d\xi = -\mathcal{J}(t+\pi/2\omega) - \pi/2\omega \underset{(t,t+\pi/2\omega)}{\mathrm{Med}} \{\varphi(\dot{x}) \operatorname{sen}\omega(t-\xi)\}.$$

Risultando limitati in valore assoluto i due termini del secondo membro della precedente, segue che è pure limitato

$$(6)\qquad \left|\int_{t_0}^{t} \varphi[\dot{x}(\xi)] \operatorname{sen}\omega(t-\xi)\,d\xi\right|$$

e con esso, dalla (4) valide le (3), $x(t)$, come volevamo provare.

Dalle due proprietà ora dimostrate per gli integrali di (1) e cioè che se un integrale $x(t)$ di (1) non risulta limitato non può divenire definitivamente monotono, nè può rimanere limitata la sua derivata prima $\dot{x}(t)$, discende, come subito proveremo, che $x(t)$ deve annullarsi infinite volte.

Sia infatti $t' > t_0$ sufficientemente grande; non potendo essere $x(t)$ definitivamente monotona, dovrà possedere infiniti massimi ed infiniti minimi. Sia

$t'' > t'$ l'istante corrispondente ad uno di questi minimi; si avrà evidentemente $\dot{x}(t'') = 0$ ed $\ddot{x}(t'') > 0$. Sia adesso t''' l'istante corrispondente al massimo immediatamente successivo al minimo relativo all'istante t''. Nell'intervallo (t'', t''') è $\dot{x}(t) \geqslant 0$ e quindi $\varphi(\dot{x}) \geqslant 0$. Essendo t'' sufficientemente grande, esisterà in (t'', t''') un sottointervallo $(\bar{t}'', \bar{t}''')$, con $t'' < \bar{t}'' < \bar{t}''' < t'''$, tale che per ogni t appartenente a tale sottointervallo, sia

$$\varphi[\dot{x}(t)] > L > f(t) ,$$

raggiungendo la $\dot{x}(t)$ il suo valore massimo in un punto t^0 interno a $(\bar{t}'', \bar{t}''')$, ove si ha $\ddot{x}(t^0) = 0$.

Fino a quando la $\ddot{x}(t)$ non si annulla essa risulta positiva e quindi, per ogni t appartenente all'intervallo $(\bar{t}'', t^0)$, dalla (1) si ha

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) - \varphi(\dot{x}) < 0 ,$$

da cui, essendo $\ddot{x}(t) > 0$, segue $x(t) < 0$.

Con lo stesso ragionamento, partendo dall'istante di massimo t''' per $x(t)$, fino all'istante t'''', corrispondente al minimo di $x(t)$ immediatamente successivo, cioè fino a quando è $\dot{x}(t) \leqslant 0$, si ha $\varphi(\dot{x}) \leqslant 0$; in un intorno sinistro del punto t^{00}, interno a (t''', t''''), ove la $\dot{x}(t)$ assume il suo valore minimo (negativo), avremo

$$|\varphi[\dot{x}(t)]| > L > f(t)$$

e da (1)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) - \varphi(\dot{x}) = f(t) + |\varphi(\dot{x})| > 0 ,$$

ed essendo in tale intorno $\ddot{x}(t) < 0$, da questa segue $x(t) > 0$.

Cambiando quindi di segno la $x(t)$ in ogni intervallo compreso tra due suoi punti consecutivi o di minimo o di massimo, a partire da un conveniente istante in poi, segue quanto abbiamo asserito e cioè l'annullarsi infinite volte di $x(t)$.

3. - Teorema I.

Vogliamo adesso provare il seguente teorema:

Se l'equazione (1), *con* ω *costante positiva,* $\varphi(\dot{x})$ *funzione continua, definita per ogni valore reale di* $\dot{x}$, *soddisfacente alla condizione* $\dot{x}\varphi(\dot{x}) \geqslant 0$ *e tendente all'infinito col tendere all'infinito di* $\dot{x}$, *e* $f(t)$ *a variazione limitata in* $(t_0, +\infty)$, *possiede un integrale definito in* $(t_0, +\infty)$ *oscillante, esso è limitato.*

Conseguiremo il teorema facendo vedere che i massimi positivi dell'integrale $x(t)$ e i valori assoluti dei suoi minimi negativi formano due successioni i cui termini sono complessivamente limitati.

È evidente che se i minimi di $x(t)$ fossero positivi, la loro limitazione sarebbe immediata conseguenza di quella dei massimi.

Facciamo coincidere t_0 con l'istante corrispondente ad un massimo positivo di $x(t)$. Consideriamo l'intervallo (t_0, t_1), essendo t_1 l'istante corrispondente al minimo (negativo) di $x(t)$ immediatamente successivo.

Adotteremo per comodità di scrittura in tutta la dimostrazione le seguenti notazioni:

$$x_n = x(t_n)\,, \qquad \bar{f}_n = [\text{valor medio di } f(t) \text{ in } (t_{n-1}, t_n)]\,.$$

In (t_0, t_1) si ha manifestamente $\dot{x}(t) \leqslant 0$. Da (1), moltiplicando per $2\dot{x}(t)$ e integrando tra t_0 e t_1, si ha

$$\omega^2[x_1^2 - x_0^2] + 2\int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(\xi)\varphi[\dot{x}(\xi)]\,d\xi = 2\int_{t_0}^{t_1} f(\xi)\dot{x}(\xi)\,d\xi\,, \tag{6}$$

da cui, trascurando il termine $2\int_{t_0}^{t} \dot{x}(\xi)\varphi[\dot{x}(\xi)]\,d\xi$ positivo per le ipotesi fatte su $\varphi(\dot{x})$,

$$x_1^2 - x_0^2 < -\frac{2}{\omega^2}\bar{f}_1(x_0 - x_1)\,.$$

Dividendo per $x_0 - x_1 = x_0 + |x_1| > 0$, si ottiene

$$|x_1| - x_0 < -\frac{2}{\omega^2}\bar{f}_1\,,$$

da cui

$$|x_1| < x_0 - \frac{2}{\omega^2}\bar{f}_1\,. \tag{7}$$

Consideriamo ora il successivo intervallo (t_1, t_2), essendo t_2 l'istante corrispondente al massimo positivo di $x(t)$, immediatamente successivo al minimo negativo relativo all'istante t_1. In tale intervallo si ha ora $\dot{x}(t) \geqslant 0$ e quindi dalla (6)

$$x_2^2 - x_1^2 < \frac{2}{\omega^2}\bar{f}_2(x_2 - x_1)\,,$$

da cui, dividendo per $x_2 - x_1 = x_2 + |x_1| > 0$,

$$x_2 - |x_1| < \frac{2}{\omega^2}\bar{f}_2\,,$$

cioè

$$x_2 < |x_1| + \frac{2}{\omega^2}\bar{f}_1 ,$$

e, per la (7),

(8) $$x_2 < x_0 - \frac{2}{\omega^2}[\bar{f}_1 - \bar{f}_2] .$$

Osserveremo qui che se ad un massimo positivo seguisse un minimo pure positivo si avrebbe ancora, con lo stesso procedimento, la (8).

Infatti da $x_1^2 - x_0^2 < -\frac{2}{\omega^2}\bar{f}_1(x_0 - x_1)$, valida in ogni caso, dividendo per il fattore negativo $x_1 - x_0$, si ottiene

$$x_1 + x_0 > \frac{2}{\omega^2}\bar{f}_1 ,$$

da cui

$$x_1 > -x_0 + \frac{2}{\omega^2}\bar{f}_1 ,$$

od anche

(7′) $$-x_1 < x_0 - \frac{2}{\omega^2}\bar{f}_1 .$$

Da $x_2^2 - x_1^2 < \frac{2}{\omega^2}\bar{f}_2(x_2 - x_1)$, dividendo per il fattore positivo $x_2 - x_1$, si ha

$$x_2 + x_1 < \frac{2}{\omega^2}\bar{f}_2 ,$$

da cui

$$x_2 < -x_1 + \frac{2}{\omega^2}\bar{f}_2 ,$$

e per la (7′), la (8).

In generale, per ogni coppia di massimi consecutivi, si ottiene evidentemente

$$x_{2n} < x_{2n-2} - \frac{2}{\omega^2}[\bar{f}_{2n-1} - \bar{f}_{2n}] .$$

Facendo in questa $n = 1, 2, \ldots$ e sommando le disuguaglianze, si ottiene

$$x_{2n} < x_0 - \frac{2}{\omega^2}\sum_1^n [\bar{f}_{2i-1} - \bar{f}_{2i}] ,$$

da cui

$$x_{2n} < x_0 + \frac{2}{\omega^2} \sum_1^n |\bar{f}_{2i-1} - \bar{f}_{2i}| .$$

L'ipotesi che la funzione $f(t)$ sia a variazione limitata in $(t_0, +\infty)$, indicata con V la variazione totale di $f(t)$ in tale intervallo, dà senz'altro

$$x_{2n} < x_0 + \frac{2}{\omega^2} V, \tag{9}$$

cioè la limitatezza dei massimi positivi di $x(t)$.

Procedendo come in (t_0, t_1), nell'intervallo tra un massimo ed un minimo negativo consecutivi, si ottiene, analogamente alla (7),

$$|x_{2n+1}| < x_{2n} - \frac{2}{\omega^2} \bar{f}_{2n+1} .$$

Da questa, per la (9), risultando la $f(t)$ limitata in $(t_0, +\infty)$, indicato con L l'estremo superiore dei valori di $|f(t)|$ in $(t_0, +\infty)$,

$$|x_{2n+1}| < x_0 + \frac{2}{\omega^2} [V + L] , \tag{10}$$

che fornisce la ricercata limitazione per il valore assoluto dei minimi negativi di $x(t)$.

Il teorema enunciato resta pertanto dimostrato.

4. - Teorema II.

Dal teorema ora dimostrato discende, come corollario, il seguente teorema, che costituisce l'annunziato criterio di stabilità per gli integrali di (1) nelle ipotesi dichiarate.

Se l'equazione (1), *valendo per* $\varphi(\dot{x})$ *le ipotesi più volte dichiarate ed essendo la* $f(t)$ *a variazione limitata in* $(t_0, +\infty)$, *possiede integrali definiti in* $(t_0, +\infty)$ *essi sono stabili.*

Infatti abbiamo provato (n. 2) che, nelle ipotesi dichiarate, se la (1) ha integrali non limitati in $(t_0, +\infty)$, questi devono essere oscillanti. D'altra parte, per il teorema dimostrato nel precedente n. 3, ogni integrale di (1) oscillante è, nelle nostre ipotesi, limitato. Ne segue che, nelle ipotesi dichiarate la (1) ha i suoi integrali limitati.

È facile far vedere ora che dalla limitatezza di $x(t)$ discende quella di $\dot{x}(t)$ e quindi il teorema.

Infatti, dalla (1) con le solite notazioni si ottiene

$$(11)\qquad \dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(t_0) + \omega^2 x^2(t) - \omega^2 x^2(t_0) + 2\int_{t_0}^{t} \dot{x}(\xi)\varphi[\dot{x}(\xi)]\,\mathrm{d}\xi = 2\int_{t_0}^{t} \dot{x}(\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Se (t_0, t_1) è l'intervallo compreso tra due zeri consecutivi di $\dot{x}(t)$, nel quale manifestamente $\dot{x}(t)$ mantiene segno costante, si ha dalla (11), per ogni t interno a (t_0, t_1),

$$(12)\qquad \dot{x}^2 < \omega^2 x_0^2 + 2\bar{f}_1[x(t) - x_0]\,.$$

Essendo $f(t)$ e $x(t)$ funzioni limitate di t in $(t_0, +\infty)$, sia N il più grande degli estremi superiori di $|f(t)|$ e $|x(t)|$ in $(t_0, +\infty)$; dalla (12) si ha allora qualunque sia t,

$$\dot{x}^2 < (\omega^2 + 4)N^2\,,$$

da cui

$$|\dot{x}| < (\omega + 2)N\,,$$

come volevamo provare.

Rileveremo qui che questo criterio, non avendo fatto alcuna ipotesi sull'ordine di crescenza di $\varphi(\dot{x})$, quando $\dot{x}(t) \to \infty$, resta valido anche per un ordine di crescenza minore di uno a differenza del citato criterio di CACCIOPPOLI e GHIZZETTI [6].

5. - Prova diretta della stabilità del moto nel caso lineare.

Si abbia l'equazione

$$(13)\qquad \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = f(t)\,,$$

con ε ed ω costanti positive e $f(t)$ funzione limitata.

Siano $z_1(t)$ e $z_2(t)$ due integrali particolari indipendenti della equazione omogenea $\ddot{z} + 2\varepsilon\dot{z} + \omega^2 z = 0$, il cui Wronskiano, diverso da zero, indicheremo con $W(z_1, z_2)$.

Confrontiamo la (13) con $\ddot{z} + 2\varepsilon\dot{z} + \omega^2 z = 0$; si ottiene con evidenti trasformazioni

$$\ddot{x}z - x\ddot{z} + 2\varepsilon[\dot{x}z - \dot{z}x] = zf(t)\,,$$

[6] Cfr. Nota bibliografica 2).

che può scriversi

$$\frac{d}{dt}\{\dot{x}z - \dot{z}x\} + 2\varepsilon\{\dot{x}z - \dot{z}x\} = zf(t)\,,$$

da cui

$$\dot{x}z - \dot{z}x = e^{-2\varepsilon(t-t_0)}\left\{\int_{t_0}^{t} e^{2\varepsilon(\xi-t_0)}z(\xi)f(\xi)\,d\xi + c\right\},$$

con c costante arbitraria.

Sostituendo in questa $z(t)$ con $z_1(t)$ e $z_2(t)$, si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}z_1 - \dot{z}_1x &= e^{-2\varepsilon(t-t_0)}\left\{\int_{t_0}^{t} e^{2\varepsilon(\xi-t_0)}z_1(\xi)f(\xi)\,d\xi + c_1\right\},\\ \dot{x}z_2 - \dot{z}_2x &= e^{-2\varepsilon(t-t_0)}\left\{\int_{t_0}^{t} e^{2\varepsilon(\xi-t_0)}z_2(\xi)f(\xi)\,d\xi + c_2\right\}.\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Da queste per eliminazione o di $x(t)$ o di $\dot{x}(t)$, si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}W(z_1, z_2) &= e^{-2\varepsilon(t-t_0)}\left\{\int_{t_0}^{t} e^{2\varepsilon(\xi-t_0)}f(\xi)[z_1(\xi)\dot{z}_2(t) - z_2(\xi)\dot{z}_1(t)]\,d\xi +\right.\\ &\qquad\left. + c_1\dot{z}_2(t) - c_2\dot{z}_1(t)\right\},\\ xW(z_1, z_2) &= e^{-2\varepsilon(t-t_0)}\left\{\int_{t_0}^{t} e^{2\varepsilon(\xi-t_0)}f(\xi)[z_1(\xi)z_2(t) - z_2(\xi)z_1(t)]\,d\xi +\right.\\ &\qquad\left. + c_1z_2(t) - c_2z_1(t)\right\}.\end{aligned}\right. \tag{15}$$

È ben noto che i due integrali $z_1(t)$ e $z_2(t)$ assumono forme diverse a seconda che sia $\varepsilon < \omega$, $\varepsilon > \omega$, $\varepsilon = \omega$.

Per $\varepsilon < \omega$ si ha:

$$z_1 = e^{-\varepsilon t}\,\mathrm{sen}\,\mu t\,; \quad z_2 = e^{-\varepsilon t}\cos\mu t\,; \quad W(z_1, z_2) = -\mu e^{-2\varepsilon t}\,; \quad \mu = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}\,.$$

Sostituendo in (15), indicato con L l'estremo superiore dei valori di $|f(t)|$ con qualche maggiorazione e calcoli del tutto elementari, si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} |\dot{x}(t)| &\leqslant \frac{2L(\mu+\varepsilon)}{\varepsilon\mu} + \frac{\{|c_1| + |c_2|\}(\mu+\varepsilon)}{\mu}e^{\varepsilon t_0}e^{-\varepsilon(t-t_0)}\,,\\ |x(t)| &\leqslant \frac{2L}{\varepsilon\mu} + \frac{|c_1| + |c_2|}{\mu}e^{\varepsilon t_0}e^{-\varepsilon(t-t_0)}\,.\end{aligned}\right.$$

Per $\varepsilon > \omega$, nel qual caso si ha:

$$z_1 = e^{\beta_1 t} \; ; \quad z_2 = e^{\beta_2 t} \; ; \quad W(z_1, z_2) = - 2e^{-2\varepsilon t}\nu \; ; \quad \nu = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} \; ; \quad \begin{cases} \beta_1 = - \varepsilon + \nu \, , \\ \beta_2 = - \varepsilon - \nu \, ; \end{cases}$$

operando analogamente si ottiene:

$$\begin{cases} | \dot{x}(t) | \leqslant \dfrac{L(\nu + \varepsilon)}{\nu(\varepsilon - \nu)} + \dfrac{e^{2\varepsilon t_0}}{2\nu} \{ | c_1 \beta_1 | \, e^{\beta_2 t} + | c_2 \beta_2 | \, e^{\beta_1 t} \} \, , \\ | x(t) | \leqslant \dfrac{\nu(\varepsilon - \nu)}{L} + \dfrac{e^{2\varepsilon t_0}}{2\nu} \{ | c_1 | \, e^{\beta_2 t} + | c_2 | \, e^{\beta_1 t} \} \, . \end{cases}$$

Nel caso infine di $\varepsilon = \omega$, per cui si ha:

$$z_1 = e^{-\varepsilon t} \; ; \qquad z_2 = te^{-\varepsilon t} \; ; \qquad W(z_1, z_2) = e^{-2\varepsilon t} \, ,$$

si trova

$$\begin{cases} | \dot{x}(t) | \leqslant \dfrac{L}{\varepsilon} + \{ | c_1 | \, (1 + \varepsilon t) + \varepsilon \, | c_2 | \} \, e^{\varepsilon t_0} e^{-\varepsilon(t - t_0)}, \\ | x(t) | \leqslant \dfrac{L}{\varepsilon^2} + \{ | c_2 | + | c_1 | \, t \} \, e^{\varepsilon t_0} e^{-\varepsilon(t - t_0)} \, . \end{cases}$$

Si ha quindi, in ogni caso, la limitazione sia di $| x(t) |$ che di $| \dot{x}(t) |$.

Nota bibliografica.

1) L. Amerio: *Un preliminare teorema di analisi per lo studio dei moti con resistenza passiva,* Atti Accad. Italia Rend. Cl. Sci. Mat. Fis. Nat. (7) **3**, 415-426 (1942).

2) R. Caccioppoli - A. Ghizzetti: *Ricerche asintotiche per una particolare equazione differenziale non lineare,* Atti Accad. Italia, Rend. Cl. Sci. Mat. Fis. Nat. (7) **3**, 427-440 (1942).

3) W. E. Milne: *Damped vibrations,* Publ. Orengon Univ. **2**, 1-37 (1923).

4) M. Picone: *Complementi analitici e numerici ad una ricerca di Signorini sul moto di un sistema soggetto a resistenza idraulica e forza di richiamo,* Atti Ist. Veneto, Cl. Sc. Mat. Fis. **101**, 473-492 (1942).

5) G. Sansone: a) *Equazioni differenziali nel campo reale,* parte seconda, II ed., Bologna 1949, pp. 356-374.

b) *Sulla durata delle oscillazioni di un punto soggetto a resistenza e a forza di richiamo,* Atti Ist. Veneto, Cl. Sc. Mat. Fis. **102**, 53-72 (1943).

c) vedasi G. Vitali - G. Sansone.

d) *Lezioni di Analisi Matematica redatte per uso degli studenti,* vol. II, Padova 1936.

6) G. SESTINI: a) *Moto di un punto soggetto a resistenza e a forza di richiamo*, Ist. Lombardo Sc. Lett., Rend. Cl. Sci. **79**, 1-18 (1946).
— b) *Criteri di stabilità per il moto di un punto soggetto a forza elastica, a resistenza e ad una forza disturbatrice*, Atti 4º Congresso Un. Mat. It., Messina 1951.

7) A. SIGNORINI: *Moto di un punto soggetto a resistenza idraulica e a forza di richiamo*, Atti Ist. Veneto, Cl. Sci. Mat. Fis. **73**, 803-858 (1914).

8) G. VITALI - G. SANSONE: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, parte I e II, Bologna 1943-1945.