Amedeo Agostini (*)

Problemi di massimo e minimo nella corrispondenza di E. Torricelli. (**)

La corrispondenza di Evangelista Torricelli con Michelangelo Ricci e poi con Vincenzo Renieri contiene la risoluzione di vari problemi di ricerca di massimi e minimi, che in parte sono poi raccolti nella Memoria *De maximis et minimis* dei manoscritti torricelliani (¹). In gran parte i problemi sono proposti da matematici francesi e in particolare da Pietro Fermat, ma tanto Torricelli quanto Ricci estendono i problemi proposti, che risolvono per via geometrica e non per via analitica, anzi è da notare che, mentre Torricelli risolve alcuni problemi ricorrendo agli *Elementi di* Euclide, il Ricci invece instaura un suo metodo rincorredo alle tangenti.

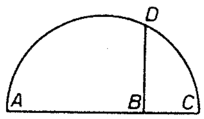

Fig. 1.

Ci proponiamo di esaminare la corrispondenza torricelliana per stabilire la data di risoluzione di ciascun problema e mostrare come tali risoluzioni non abbiano avuto alcuna influenza straniera e come Torricelli e Ricci abbiano risolto un numero di problemi assai maggiore di quelli risolti da Pietro Fermat.

Il primo problema venuto di Francia è: In un semicerchio ADC (fig. 1), trovare sul diametro AC un punto B tale che, condotta la corda DB perpendicolare al diametro, il rettangolo di lati AD, BD sia massimo.

Torricelli comunica tale problema al Ricci dicendo (²): « Mi mostrò il « P.re Mersenne un foglio con dimostrazione lunghissima, e per quanto mi « parve ell'era difficile. La pensai poi ed era una baia, e si scioglie con i primi

---

(*) Indirizzo: Accademia Navale, Livorno (Italia).
(**) Ricevuto il 10-XI-1950.
(¹) E. Torricelli, *Opere*, Faenza, 1919, vol. I, parte 2ª, pp. 81, 97.
(²) E. Torricelli, *Opere*, III, p. 242. Lettera di E. Torricelli a M. Ricci del 17 dicembre 1644.

« 6 libri d'Euclide... Il punto D cade nel mezzo di EC (3). La prova poi è facile « per certa dottrina del 6° libro ».

Torricelli però non comunica la dimostrazione che vedremo esposta più avanti in una lettera al P. M. Mersenne, ma il Ricci risponde subito dando una sua dimostrazione (4): si conduca alla semicirconferenza (fig. 2) una tangente tale che sia $BD = BE$ (5) e si descriva l'iperbole GBH che ha per asintoti AD e AE ed è tangente in B alla tangente DE alla semicirconferenza, allora il rettangolo AB è il massimo, perchè condotta una qualunque ordinata MG dell'iperbole il rettangolo AG è equivalente al rettangolo AB e, se I è il punto in cui MG incontra la semicirconferenza, è evidente che il rettangolo AI è minore di AB.

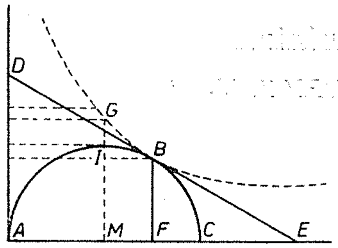

Fig. 2.

Una settimana dopo (6) il Ricci dà del problema una dimostrazione elementare: condotta la tangente EF, divisa per metà da B (fig. 3), costruito il rettangolo AL e condotta l'ordinata MH, il rettangolo AH risulta uguale al rettangolo EH; allora il rettangolo AI è uguale al gnomone $LEKHI$ e quindi minore del rettangolo EB, cioè del rettangolo AB, quindi il rettangolo AB è il massimo rettangolo che si possa costruire nel triangolo AEF.

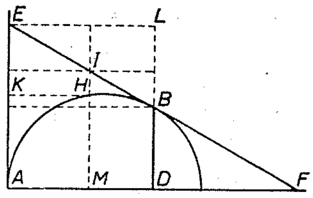

Fig. 3.

Un'altra settimana dopo il Ricci scrive a Torricelli (7): « L'altra mattina mi successe « di sciorre un altro problema portato con gran lungheria dall'autor fran-

(3) Considerato il cerchio di equazione $x^2 + y^2 - 2rx = 0$, equazione cui ci riferiremo anche in avvenire, la funzione $z = \sqrt{2rx - x^2}$ ha appunto un massimo per $x = \frac{3r}{2}$, cioè, come dice Torricelli, nel punto di mezzo del raggio EC. Il problema è risolto da Fermat (*Oeuvres*, I, p. 175) per via analitica.

(4) E. Torricelli, *Opere*, III, pp. 243-244. Lettera di Ricci a Torricelli del 24 dicembre 1644.

(5) La tangente alla circonferenza nel punto $\left(\frac{3}{2}r, \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$ è $y - \frac{r\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{3r}{2}\right)$, la quale interseca gli assi nei punti $(3r, 0)$, $(0, r\sqrt{3})$, punti che distano dal punto di tangenza $r\sqrt{3}$.

(6) E. Torricelli, *Opere*, III, p. 247. Lettera di Ricci a Torricelli del 31 dicembre 1644.

(7) E. Torricelli, *Opere*, III, p. 248. Lettera di Ricci a Torricelli del 7 gennaio 1645.

« zese ([8]) della medesima scrittura ». Il problema è: Determinare sulla semi-« circonferenza ABC (fig. 4) un punto B tale che $AD + DB$ sia massimo.

M. Ricci ne dà la seguente semplice soluzione: Preso ED tale che $\frac{\overline{EC}^2}{\overline{ED}^2} = 2$ e innalzata l'ordinata DB, si prenda $DG = DB$; condotto il raggio EB e prolungato GB fino in F, il triangolo AGF è isoscele come lo è il triangolo DGB, quindi risulta $AG = AD + DB$. Condotta una qualunque ordinata HI della semicirconferenza prolungata in K, si ha $AH + HK = AG$, quindi risulta $AH + HI < AG$. Dunque $AD + DB$ è il massimo.

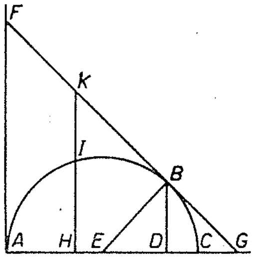

Fig. 4.

Ricci non riferisce come abbia trovato il rapporto $\frac{\overline{EC}^2}{\overline{ED}^2} = 2$ e come la BG sia tangente alla circonferenza, ciò che è di facile verifica analitica ([9]).

In una lettera successiva il Ricci scrive a Torricelli: ([10]) « ultimamente ad imitazione di V. S. che l'ha altamente nobilitata « con le sue graziose dimostrazioni, ripigliai la « considerazione e ne ho riportato il frutto dei « seguenti teoremi ». Certamente qui il Ricci si riferisce a lettere del Torricelli non pervenute a noi, in ogni modo egli dimostra le seguenti proprietà:

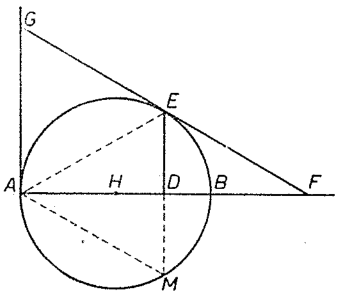

Fig. 5.

1) Prolungato il diametro AB di una semicirconferenza (fig. 5) o l'asse maggiore AB di una ellisse di un segmento $BF = HB$ e condotta la DE perpendicolare al diametro o all'asse nel punto di mezzo D del raggio o del semiasse HB, la retta FEG risulta tangente alla circonferenza o alla ellisse e il triangolo AFG è il minimo triangolo che si

---

([8]) L'« autor franzese » è Pietro Fermat, che risolve il problema (*Oeuvres*, I, p. 153) col suo metodo.

([9]) Infatti la funzione $z = x + \sqrt{2rx - x^2}$ ha un massimo per $x = r + \frac{r}{\sqrt{2}}$, quindi risulta $\overline{ED} = \frac{r}{\sqrt{2}}$, come pure $\overline{DB} = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Si ha quindi effettivamente $\frac{\overline{EC}^2}{\overline{ED}^2} = 2$, inoltre la tangente in B stacca sull'asse x un segmento lungo $\left(r + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) + \frac{r}{\sqrt{2}} = \overline{AD} + \overline{DB}$.

([10]) E. Torricelli, *Opere*, III, p. 258. Lettera di Ricci a Torricelli del 28 gennaio 1645.

possa formare con la AG, la AF è una tangente alla semicirconferenza o alla semiellisse ([11]) e che il doppio del triangolo AFG è il minimo triangolo isoscele circoscritto al cerchio.

2) Il triangolo isoscele AEM è il massimo triangolo isoscele inscrittibile nel cerchio o nella ellisse ([12]).

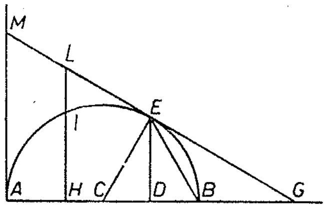

Fig. 6.

Parla poi con poca chiarezza del triangolo massimo circoscrittibile a un cerchio ed erroneamente afferma che il cono generato dal triangolo AGM ruotando intorno ad AB è il massimo cono iscritto in una sfera.

Dietro richiesta di P. MARINO MERSENNE ([13]), che in quell'epoca era a Roma, TORRICELLI gli comunica ([14]) le soluzioni *sine locis solidis*, cioè senza ricorrere a sezioni coniche, dei problemi di massimo e minimo da lui risolti e che riferiamo per esteso, facendo presente che dà anche le soluzioni dell'iscrizione in una sfera, in un ellissoide di rotazione e in un segmento di paraboloide ellittico di rotazione del cilindro circolare retto di massima superficie laterale.

Esto semicirculus vel semiellipsis cuius axis AB (fig. 6), *centrum vero C. Quaeritur maximum rectangulum sub segmento diametri AD, et sub perpendiculari DE.*

Secetur bifariam CB in D, et erecta DE, dico rectangulum ADE maximum esse omnium quae ad semicirculum sunt; ipsum vero ADE maximum eorum quae ad ellipsim.

Ponatur BG aequalis semidiametro BC, et producta GEM iungantur EC, EB,

---

([11]) Infatti, per il cerchio $x^2 + y^2 - 2rx = 0$ l'area del triangolo AGF formato da una tangente generica alla circonferenza e dagli assi coordinati è data da $\dfrac{-r^2x^2}{2(r-x)\sqrt{2rx - x^2}}$, la quale ha appunto un minimo per $x = \dfrac{3}{2}r$. Per l'ellisse $b^2(x-a)^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ l'area del triangolo AGF formato da una tangente generica all'ellisse degli assi coordinati è data da $\dfrac{abx^2}{(x-a)\sqrt{a^2-(x-a)^2}}$, che ha un minimo per $x = \dfrac{3a}{2}$.

([12]) Il triangolo isoscele massimo iscritto in un cerchio ha l'altezza $\dfrac{3r}{2}$, mentre quello iscritto in una ellisse ha l'altezza $\dfrac{3a}{2}$.

([13]) La lettera del MERSENNE in cui fa detta richiesta direttamente, o indirettamente attraverso il RICCI, non è pervenuta fino a noi.

([14]) E. TORRICELLI, *Opere*, III, p. 262. Lettera di TORRICELLI a M. MERSENNE di fine gennaio 1645.

eritque CEB triangulum aequilaterum; angulique BEG, BGE aequales in triangulo isoscele; ergo additis aequalibus erunt duo anguli CEB, BEG aequales duobus ECG, EGC, suntque omnes in uno eodemque triangulo, ergo CEG rectus est, et GE tangens. Jam: si rectangulum ADE non est maximum eorum quae ad semicirculum spectant, esto maximum AHO, productaque HO in I erit rectangulum ADE maius rectangulo AHI (per 27 sexti elementorum secundum Clavium) quandoquidem AD aequalis est ipsi DG. Sed rectangulum AHO maius ponitur ADE, ergo rectangulum AHO multo maius erit quam AHI, pars suo toto etc...

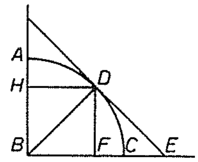

Fig. 7.

Dico etiam rectangulum ADE maximum esse omnium ad ellipsim spectant. Nam sumatur quodlibet aliud puta AHO. Rectangulum ADE ad AHO rationem habet compositam ex ratione DE ad HO, sive DE ad HI, et ex ratione DA ad AH. Ergo rectangulum ADE ad AHO est ut rectangulum ADE ad AHI, nempe maius. Quod etc..

Simile quoddam ad me scripserat (15) *Clar.^{mus} Dominus Du Verdus, nempe maximam superficiem cylindricam in sphaera descriptibilem repertam fuisse, cui ego addideram et in spheroide, et in Conoide, fusoque parabolico. Ponatur enim tantummodo circuli quadrans ABC* (fig. 7), *sectoque angulo ABC bifariam recta BD, fiat quadratum BHDF, et per D ducatur tangens ED. Certum est rectam BE bifariam secari in F, propterea per 27 sexti ostenditur ut in precedenti, quadratum HF maximum esse omnium rectangulorum etc.. Ergo etiam in quadruplis, patet quadratum in integro circulo descriptibile maximum esse omnium rectangulorum etc.. Sed superficies cylindrorum sunt ut eorundem rectangula per axem, ergo patet etc.* (16).

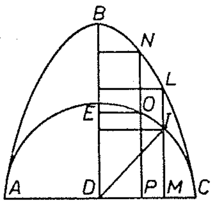

Fig. 8.

In sphaeroide vero sic agemus. Esto semiellipsis ABC (fig. 8) *cuius axis AC, centrum D. Fiat circa AC semicirculus AEC, sectoque angulo recto CDE bifariam recta DI erigatur perpendicularis MIL. Dico DL esse maximum rectangulum etc.. Nam sumpto quolibet alio DN, habebit rectangulum DL ad DN rationem ex ratione LM ad NP, sive IM ad OP, et ex ratione DM ad DP, ergo rectangulum*

---

(15) La lettera del Du Verdus cui si riferisce Torricelli non ci è giunta.

(16) Occorre intendere il cilindro di massima superficie laterale e infatti tale cilindro iscritto nella sfera si ha quando una sezione per l'asse è il quadrato iscritto nel cerchio. Si ha $\overline{BF} = \frac{r}{\sqrt{2}}$ e condotta in D la tangente si ha $\overline{BE} = 2\,\frac{r}{\sqrt{2}}$ e quindi è effettivamente $\overline{BF} = \overline{FE} = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Il problema fu proposto da Fermat al P. Mersenne il 10 novembre 1642 e si trova risolto nelle *Oeuvres* del Fermat, I, p. 157.

DL ad DN erit ut DI ad DO, nempe maius ex praecedenti. Apud nos vero idem est maximum rectangulum reperire in figura plana et maximam superficiem cylindricam in solido, ergo etc.. Neque refert circa quem axem convertatur ellipsis, nam quodcumque rectangulum circa quodvis latus convertatur aequales superficies cylindricas describit, intellige semper sine basibus (17).

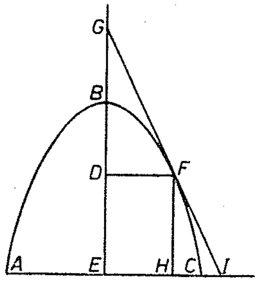

Fig. 9.

In solidis parabolicis sic. Esto parabola ABC (fig. 9) *cuius axis BE secetur ita ut ED ad DB sit dupla, tum applicata DF dico rectangulum EF maximum esse etc.. Agatur enim per F tangens GF et erunt aequales GB, BD, ideo aequales GD, DE, et aequales, GF, FI; aequalesque EH, HI. Ergo iterum ex* 27 *sexti patet rectangulum EF maximum esse etc.. Jam si parabola convertatur sive circa axem, sive circa basim, rectangulum EF describet maximam superficiem cylindricam quae describi possit, sive in conoide, sive in fuso etc.* (18).

Poco dopo il RICCI si accorgeva di avere commesso nella lettera precedente degli errori e allora scrive a TORRICELLI (19): « Se le sue occupazioni « gliel permettono, la prego a volere applicare un poco quel metodo, perchè « sarebbe altra cosa, che quello insegnato da Monsù Fermat nell'appendice de « maxima et minima (*sic*) ». Parla poi in modo poco preciso di un cono massimo iscritto in un altro cono e dice di inviare a TORRICELLI il trattato *De Sinereseos et Anastrophe* di FERMAT, ma pieno di errori di trascrizione.

TORRICELLI doveva aver comunicato al RICCI, in una lettera non perve-

(17) Il rettangolo di area massima iscritto nella ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si ha per $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ e $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Facendo ruotare il rettangolo intorno al semiasse maggiore o intorno al semiasse minore si ha il cilindro di area massima laterale iscritto nell'ellissoide di rotazione allungato o schiacciato e ambedue i cilindri hanno l'area laterale data da $2\pi ab$.

(18) Presa la parabola $y = a^2 - x^2$, il cilindro di superficie laterale massima inscritto nel segmento del paraboloide ottenuto facendo ruotare intorno all'asse y il segmento di parabola limitato dall'asse x si ha per $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ e $y = \frac{2a^2}{3}$ e si verifica facilmente che i segmenti della tangente alla parabola GF e FI sono uguali, come pure che $EH = HI = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Facendo rotare il segmento di parabola intorno all'asse x il cilindro di superficie laterale massima ha superficie laterale doppia del cilindro iscritto nel segmento di paraboloide ellittico di rotazione.

(19) E. TORRICELLI: *Opere*, III, p. 266. Lettera di RICCI a TORRICELLI del 4 febbraio 1645.

nutaci, i risultati comunicati al P. MERSENNE e ragionandovi sopra il RICCI afferma ([20]): « Dopo aver scritto quella faraggine di ciance intorno i massimi « e i minimi, arrivai al modo di tirar la tangente per avere li massimi e minimi « coni et cilindri circoscritti et iscritti. La cosa si scioglie col tirare una tan- « gente a similitudine dell'altra, ma segata, non per metà, ma in due sega- « menti, che l'uno sia doppio dell'altro, come a V. S. dimostrerò in tempo più « opportuno essendo la scrittura un poco lunghetta ». Non sappiamo a quali problemi di massimi e minimi il RICCI si riferisca, ma forse ai problemi che troveremo esposti in una lettera posteriore.

Intanto TORRICELLI, ricevuto il manoscritto del trattato di FERMAT, lo studia, ma poi finisce per affermare ([21]): « La maggior parte da me non era « intesa punto perchè suppone un certo metodo Ureteo (?) a me ignoto, e del « resto è difficile di spiegatura come mi riescono per lo più gli Oltramontani. « Però io trovai un altro metodo non Ureteo, ma evangelisteo col quale facil- « mente et in subito senza linee o difficoltà con pura geometria, e senza neanche « l'odor dell'algebra mostro la seguente proposta cioè:

« Se una retta linea sarà segata in due parti allora il prodotto che si farà « della moltiplicazione delle dignità di esse parti sarà il massimo quando le parti « saranno fra di loro nella medesima proporzione delle dignità, cioè:

« Allora la moltiplicazione del quadrato di una parte nel cubo dell'altra « sarà la massima quando le parti saranno come 2 a 3, et sic de singulis ».

Ecco risolto il problema di massimo condizionato: la funzione $z = x^n y^m$ è massima con la condizione $x + y = a$, quando a è diviso in parti proporzionali a n e a m, problema che giustamente porta il nome di TORRICELLI ([22]).

([20]) E. TORRICELLI, *Opere*, III, p. 286. Lettera di RICCI a TORRICELLI del 25 febbraio 1645.

([21]) E. TORRICELLI, *Opere*, III, p. 299. Lettera di TORRICELLI a RICCI del 11 marzo 1645.

([22]) Il problema era già stato risolto geometricamente in un caso particolare da GIROLAMO CARDANO nella sua opera *Opus novum de proportionibus numerorum* etc. (H. CARDANI, *Operum*, T. IV, Lugduni, 1663). Infatti nella *Propositio* 135 dell'opera dimostra: *Si linea in duas partes, quarum una sit alteri dupla, divisa erit, quod fit ex tertia parte in quadratum residui parallelepipedum maius omni parallelepipedo, quod ex divisione eiusdem lineae creari possit*, cioè il parallelepipedo che ha per base il quadrato avente per lato la parte del segmento doppia dell'altra e per l'altezza l'altra parte è il massimo parallelepipedo che si possa costruire col segmento assegnato diviso in parti. FERMAT (*Oeuvres*, I, pp. 134 e 140) risolve solo il caso in cui è massimo il rettangolo dei due segmenti e il problema analogo a quello di CARDANO.

Il problema è anche studiato, senza citare TORRICELLI, nell'opuscolo di MICHELANGELO RICCI, *Exercitatio geometrica de maximis et minimis* pubblicato a Londra nel 1668 nel volumetto *Logarithmo-Technia* etc., contenente anche l'opuscolo *Vera Quadratura Hyperbolae* et *Inventio Summae Logarithmorum* di NICOLÒ MERCATOR.

Nella lettera non è riferita la dimostrazione, che però troviamo esposta per casi particolari e per via geometrica nel *De maximis et minimis* (23).

Nella stessa lettera Torricelli prosegue: « Ho poi dimostrato questo. Se « sarà circolo, overo ellissi ABC (fig. 10) e che il prodotto della retta AD « nella BD sia il massimo, sarà AD a DC come 3 a 2, « ma se la retta AD nel quadrato BD farà il massimo « sarà AD a BC come 5 a 3 (24), et sic semper (25) ».

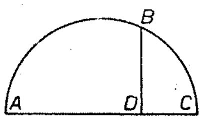

Fig. 10.

« Ma se la figura sarà parabola nel p^o caso detto la AD « alla BC sarà come 2 a 1, nel 2° come 3 a 2, nel 3° come « 4 a 3, et sic semper (26) ».

« Spero anco che farò la proposizione più universale « con pigliar anco del diametro AC qualunque dignità, e « forse propagare la specolazione a tutte le parabole ».

Di questa generalizzazione non abbiamo trovato traccia nelle opere torricelliane, però Torricelli prega il Ricci: « Se il P. Mersenne si trovasse in « Roma, supplico V. S. a dargli copia di questi massimi della parabola et ellissi « e circolo, ma non della linea segata », cioè di comunicargli gli enunciati senza i risultati.

Le dimostrazioni dei massimi relativi al cerchio, all'ellisse e alla parabola non sono riferite al Ricci (27), il quale cosí scriveva a Torricelli (28): « Devo « pregarla a voler dare un'occhiata con qualche attenzione ad una certa scrit- « tura che le son per mandare intorno i massimi e minimi solidi », però questa « certa scrittura » non accompagna la lettera e perciò non sappiamo che cosa

---

(23) E. Torricelli, *Opere*, I, parte 2ª, pp. 81-83, pp. 88-89, p. 90.

(24) Qui vi è un errore o è stato tralasciato il caso di AD per il cubo di BD. Non avendo avuto modo di vedere la lettera originale, non possiamo dire se l'errore è dovuto a trascrizione. Però è da notare che nel *De maximis et minimis* (*Opere*, I, 2ª, p. 90) Torricelli afferma giustamente: *Semper itaque rationes partium diametri erunt he, in primo casu, hoc est ducitur recta in rectam ut* 3/1, *dum ducitur recta in quadratum ut* 4/2, *dum ducitur recta in cubum ut* 5/3.

(25) La funzione $y = x(2rx - x^2)^{m/2}$ è massima per $x = \dfrac{2+m}{m+1}\,r$, punto che divide il diametro nel rapporto $\dfrac{m+2}{m}$.

(26) Considerata la parabola $y = ax - x^2$, la funzione $z = x(ax - x^2)^m$ ha il massimo per $x = \dfrac{m+1}{2m+1}\,a$, punto che divide la base a del segmento parabolico nel rapporto $m+1$.

(27) Le dimostrazioni si trovano, per casi particolari, nel *De maximis et minimis* (*Opere*, I, 2ª parte).

(28) E. Torricelli, *Opere*, III, p. 302. Lettera di Ricci a Torricelli del 12 marzo 1645.

contenesse, ma in lettere posteriori troviamo generalizzati i problemi risolti da TORRICELLI.

In una lettera ([29]) RICCI asserisce: « Quanto a quei massimi iscritti nel « cerchio, o ellisse, la cosa io la ridurrei alle tangenti, et il metodo s'adatta ai « prodotti non solo fatti dalle dignità infinite del« l'applicata in un segamento del diametro, ma « dalle infinite dignità diametrali ancora, cioè v.g. « pel solido massimo biserei una tangente in B, « sicchè EB sia doppio di FB, il che faremo col « prolungare DE uguale all'AD; poi tirando la tan« gente FBE, sarà segata come si desidera ([30]) », cui segue la dimostrazione geometrica del massimo.

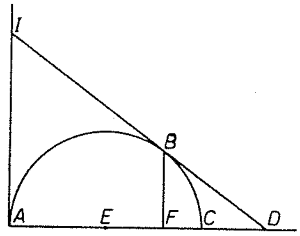

Fig. 11.

Successivamente ([31]) RICCI espone la risoluzione del problema generale che TORRICELLI, nella lettera precedentemente esaminata, aveva riferito al RICCI di voler cercare di risolvere. Ecco in breve e con termini moderni le soluzioni esposte dal RICCI, senza darne la dimostrazione:

1) Data una semicirconferenza o una semiellisse, il massimo del prodotto della potenza dell'ascissa $\overline{AF}^m$ (fig. 11) per la potenza $\overline{FB}^m$ dell'ordinata si ottiene conducendo una tangente in modo che $IB : BD = n : m$ e ciò si può ottenere facendo $EC : CD = n : m$ ([32]).

([29]) E. TORRICELLI, *Opere*, III, p. 306. Lettera di RICCI a TORRICELLI del 19 marzo 1645.

([30]) La funzione $y = x(2rx - x^2)$ ha un massimo per $x = \frac{4r}{3}$ cui corrisponde come ordinata del cerchio $y = \frac{2\sqrt{2}r}{3}$. Condotta la tangente alla circonferenza nel punto trovato, questa stacca sull'asse y un segmento lungo $r\sqrt{2}$ e sull'asse x un segmento lungo, come afferma il RICCI, $4r$. Calcolando poi le distanze dei punti di intersezione della tangente con gli assi, si ha appunto $EB = 2EF$.

([31]) E. TORRICELLI, *Opere*, III, p. 307. Lettera di RICCI a TORRICELLI del 26 marzo 1645.

([32]) La funzione $y = x^n(2rx - x^2)^m$ ha un massimo per $x = \frac{2n+m}{m+n} r$, cui corrisponde per la circonferenza l'ordinata $\frac{r}{m+n}\sqrt{m(2n+m)}$. Condotta la tangente alla circonferenza in tale punto, questa stacca sull'asse x il segmento $\frac{2n+m}{n} r$, quindi il segmento CD è lungo $\frac{2n+m}{n} r - 2r = \frac{m}{n} r$, quindi il raggio sta a CD nel rapporto $\frac{n}{m}$, come pure si può verificare che $IB : BD = n : m$, essendo $r\sqrt{\frac{2n+m}{m}}$ la distanza I dal punto di tangenza e $\frac{r}{n}\sqrt{m(2n+m)}$ la distanza di D dal punto di tangenza.

Risultati analoghi si hanno per la ellisse $b^2(x-a)^2 + ay^2 = a^2b^2$.

2) Nella parabola per avere il massimo del prodotto $\overline{AF}^n \cdot \overline{FB}^m$, basta dividere la base AC della parabola in modo che $AF : FC = (m + n) : m$ (33).

Un altro problema risolto dal Ricci (34) da un punto di vista meccanico è: « il filo ABC essendo attaccato da due capi, e che per esso scorra qualche peso, « detto peso incurverà il filo in angolo, facendo gli angoli ABE, CBD uguali « sopra la retta EBD tirata nel punto B parallela all'orizzonte ». Questo problema prelude il noto problema di minimo: la somma delle distanze di due punti di un piano da un punto di una retta dello stesso piano è minima quando le due distanze formano angoli uguali con la retta considerata.

Per oltre un anno nella corrispondenza torricelliana non si accenna più a problemi di massimo e minimo, fino a che Torricelli comunica al Ricci (35): « Non so come a questi giorni passati io sciolsi un Problema di Monsù Fermat. « Datis tribus punctis alium punctum reperire ex quo si ad tria data rectae « ducantur ipsae eductae sint minima quantitas » e afferma che gliene manderà la soluzione.

La soluzione è esposta in due lettere a Vincenzo Renieri (36) notando che le congiungenti il punto D richiesto coi tre punti dati ABC devono formare tra loro un angolo di 120°, e che se un angolo del triangolo ABC è uguale o maggiore di 120°, il vertice di tale angolo è il punto richiesto. Scrivendo al P. Mersenne (37) accenna pure di avere risolto il problema, *ut ego audivi*, proposto dal Fermat e di averne ben tre dimostrazioni e se il padre è desideroso di avere dette dimostrazioni di richiederle a Torricelli stesso o al Cavalieri o al Magiotti o al Renieri.

Non ci sono giunte, all'infuori di quelle del Renieri, le lettere con le quali Torricelli comunicava agli amici la nuova scoperta, nè le impressioni certamente favorevoli di questi. Non favorevoli sono le impressioni avute in Francia, dove le scoperte del Torricelli erano sempre o male apprezzate o sempre riguardanti scoperte già fatte, secondo loro, anteriormente dai matematici

---

(33) Presa la parabola $y = ax - x^2$, la funzione $z = x^n(ax - x^2)^m$ ha un massimo per $x = \frac{m+n}{n+2m}a$, quindi $FC = a - a\frac{m+n}{n+2m} = \frac{m}{n+2m}a$. Allora il rapporto tra AF e FC è uguale a $\frac{m+n}{m}$.

(34) E. Torricelli, *Opere*, III, p. 323. Lettera di Ricci a Torricelli del 18 giugno 1645.

(35) E. Torricelli, *Opere*, III, p. 420. Lettera di Torricelli a Ricci del 7 novembre 1646.

(36) E. Torricelli, *Opere*, III, p. 425, p. 428. Lettere di Torricelli a V. Renieri del 1° e dell'8 dicembre 1646.

(37) E. Torricelli, *Opere*, III, p. 435. Lettera di Torricelli al P. Mersenne del 1° febbraio 1647.

francesi; infatti il P. MERSENNE (38) gli scrive: « Quod attinet ad illa tria, « quae commemoras puncta, Robervallus ait, hoc non annumerandum inter « problemata nobilissima; et demonstrationem per solida, quum per plana fieri « potest, ignobilem esse, et propemodum errorem ».

Dunque il problema, che fu trattato e generalizzato da matematici posteriori (39), è da ROBERVAL ritenuto un problema da nulla e la dimostrazione è ignobile e forse errata; ma TORRICELLI alla fine del *De maximis et minimis* dà ben tre dimostrazioni del problema, una ricorrendo a una ellisse, due per via elementare, che per brevità non riferiamo. Quindi è pienamente giustificato il nome di *punto di Torricelli* che si dà, nella moderna *Geometria del triangolo*, al punto che risolve il problema in questione.

È terminato cosí l'esame della corrispondenza torricelliana per ciò che riguarda i problemi di massimi e minimi e ognuno riconoscerà che, pur essendo i problemi iniziali provenuti dalla Francia, tanto il TORRICELLI quanto il RICCI hanno saputo generalizzare alcuni di detti problemi e risolvere, non solo i problemi originali, ma anche quelli generalizzati.

---

(38) E. TORRICELLI, *Opere*, III, p. 437. Lettera del P. MERSENNE a TORRICELLI del 1° marzo 1647.

(39) Il problema è trattato da B. CAVALIERI, *Exercitationes geometricae sex*, Bologna, 1647, pp. 504-510; da V. VIVIANI, *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum conicorum Apollonii Pergaei*, Firenze, 1659, vol. II, pp. 143-150, il quale stabilisce anche che, dati in un piano più di tre punti, il punto del piano, la cui somma delle distanze dai punti dati è minima, è quello in cui le congiungenti coi punti dati formano consecutivamente angoli uguali; da TH. SIMPSON, *The doctrine and application of fluxions* Londra, 1750, I, p. 26; da P. FRISI, in Atti Acc. delle sc. di Siena, IV, 1771, p. 15; da J. STEINER, *Werke*, II, pp. 729-731 e da tanti altri con generalizzazioni che ci auguriamo di esporre in un prossimo articolo. Solo ricordiamo che G. TOSCHI DI FAGNANO (*Produzioni matematiche*, II, Pesaro, 1750; *Opera matematiche*, Milano, 1911, II, p. 152) dimostra che la somma dei quadrati delle distanze di tre punti da un punto dello stesso piano è minima quando il punto coincide col baricentro del triangolo formato dai tre punti; questa proprietà è poi studiata per n punti dello spazio da MATTEUCCI (Comm. Ist. Bon., IV, 1757, p. 90) e da LORGNA (*De quibusdam maximis et minimis*, Verona, 1766).