GIOVANNI RICCI (*)

La Scuola matematica pisana dal 1848 al 1948. (**)

Signore e Signori,

io mi accingo a tracciare dinanzi a Voi i lineamenti di una grande Scuola: lineamenti forti, distesi negli ultimi cento anni, ricchi di addentellati con tutta la Matematica italiana e straniera. Soltanto l'affetto che mi lega a questa Università e alla Scuola Normale, alimentato dai cari ricordi della vita di studio, soltanto questo affetto, dico, può sorreggermi nell'esporre una prospettiva tanto complessa e chiedo alla Vostra benevolenza di essere giustificato se troppe zone ne resteranno necessariamente in ombra o mal delineate.

1. – Nell'anno 1840 il geometra GAETANO GIORGINI, rettore della Università di Pisa, otteneva dal governo granducale la chiamata, in questa sede, di OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI, quale professore di Fisica matematica, Meccanica celeste e Geodesia.

La scelta fatta dal GIORGINI fu veramente felice. Il MOSSOTTI era un astronomo venuto in chiara fama; aveva avuti contatti con astronomi e matematici inglesi durante il suo esilio a Londra, era stato professore a Buenos Ayres e giungeva a Pisa, proveniente da Corfù dove aveva insegnato Fisica matematica svolgendo un corso che venne pubblicato in due volumi negli anni '43 e '45. Era la prima pubblicazione in Italia che raccoglieva e coordinava tante teorie e, in essa, il MOSSOTTI aveva inquadrate molte delle sue idee originali. Con questa opera di alto valore didattico e con le ricerche sulla genesi delle forze molecolari, sulla capillarità, sulla dispersione della luce, e sull'analisi

(*) Professore o. della Università di Milano e professore incaricato della Università di Parma. Indirizzo: Via G. Falloppio, 5; Milano (Italia).

(**) Questa Conferenza venne letta a Pisa, in occasione del III Congresso dell'Unione Matematica Italiana (Pisa, 23-26 settembre 1948), nell'Aula magna dell'Università, il giorno 23 settembre 1948 [ved. Boll. Un. Mat. Ital. (3) 3 (1948), cfr. p. 190 e p. 290].

del Poisson per l'induzione magnetica applicata ai dielettrici, il Mossotti iniziò l'insegnamento e la ricerca scientifica a Pisa.

Nel 1848, egli, cinquantasettenne, comandò il battaglione universitario che combatté a Curtatone e Montanara.

Questa che ho delineata è la figura della Scuola matematica pisana con la quale si inizia il secolo che dobbiamo illustrare. Enrico Betti di lui dice: « Aveva vasta e profonda cognizione dell'Analisi pura, che applicava con l'eleganza che ammirasi nelle opere di Lagrange;... . Prima di Abel e di Jacobi, Egli aveva avuto l'idea di considerare la funzione inversa degli integrali ellittici di prima specie; ma, occupato nei problemi di fisica molecolare e di meccanica celeste non aveva dato seguito a questo suo pensiero che lo avrebbe condotto alle scoperte analitiche che sono state tra le più belle e feconde di questo secolo ».

2. – Enrico Betti venne a Pisa nel '57, trentaquattrenne. Egli prese a studiare le opere di Abel e di Galois. Il concetto di gruppo stava prendendo il suo dominio nell'Analisi: le opere dei Lagrange, Ruffini, Abel e quella incompiuta ed oscura del Galois, stavano mostrando che in questa nozione è la chiave per la risoluzione delle equazioni algebriche. Il Betti, anche incoraggiato dal Mossotti, ricostruisce, completa e padroneggia la teoria del Galois: tra l'altro quasi arriva (1853) alla risoluzione delle equazioni generali di quinto grado mediante la trasformazione del 5° ordine delle funzioni ellittiche: e più tardi (1858), su questo indirizzo, Hermite, Kronecker e Brioschi giungono simultaneamente alla risoluzione dell'equazione generale.

In una seconda fase l'interesse del Betti è rivolto alla teoria delle funzioni analitiche. In una monografia, che riproduce un corso del '59-'60, egli tratta delle funzioni intere e poi delle funzioni fratte e tutto questo gli permette di presentare, con impianto nuovo, le funzioni ellittiche, le funzioni circolari e altre trascendenti. Il suo spirito algebrico lo guida alla scomposizione, analoga a quella dei polinomî, di una funzione intera nel prodotto degli infiniti fattori primarî: proprio quella scomposizione che, ben quindici anni dopo, il Weierstrass pubblicava nella sua celebre Memoria. Troppe idee si affollavano alla operosità del Betti e la monografia rimase incompleta; essa tuttavia sta a documentare che egli aveva già introdotti nell'insegnamento i metodi che, soltanto più tardi, con la scuola del Weierstrass e quella del Poincaré si mostrarono tanto fecondi. Nella scomposizione del Betti si può ravvisare, in germe, quell'indirizzo dello studio della singolarità essenziale, in base alla configurazione dei gruppi di livello nell'intorno di questa: che è la sostanza del teorema di Picard.

È del '63 il pregevole *Trattato di Algebra superiore* di Giovanni Novi, ispirato dal Betti (purtroppo incompiuto e limitato alla prima parte: Analisi algebrica).

L'opera del Betti nel campo della Fisica matematica è la più importante e ne parleremo fra un momento: adesso è bene aprire una parentesi.

3. – Nel '63 morì il Mossotti ed Eugenio Beltrami venne a Pisa professore di Geodesia e vi rimase quattro anni. In quello stesso anno '63, Bernardo Riemann, venuto in Italia per trovare un ristoro alla sua malferma salute, si tratteneva a Pisa stringendo amicizia coi due giovani Betti e Beltrami.

Un altro fatto dobbiamo segnalare: Il governo granducale aveva ripristinata fino dal '47 la Scuola Normale superiore di Pisa, già istituita da Napoleone nel 1812 e poi soppressa con la restaurazione. Col sorgere del Regno d'Italia, la Scuola Normale, nel '62, per merito del Matteucci, veniva chiamata a svolgere la sua funzione vivificatrice nell'ambito nazionale. Dopo un triennio di direzione dello storico Pasquale Villari, nel '65 venne chiamato a reggerne le sorti Enrico Betti che, quasi senza interruzione, ne rimase direttore fino al '92, anno della sua morte.

Nel '64 si laureò il normalista Ulisse Dini.

Ho voluto ricordare questi fatti perché essi, nel breve volgere di tre anni, dal '63 al '65, segnano l'inizio di un periodo in cui la Scuola matematica pisana brillò di massimo splendore.

Il nome di Ulisse Dini è quello di un maestro incomparabile, ed è anche il primo di una serie di nomi che costituiscono l'albo d'oro della Scuola Normale. Scorrendo l'elenco dei normalisti vediamo venirci incontro una folla di insigni matematici che hanno onorato e onorano il nostro Paese: il loro pensiero ha le radici qui, in questa grande Scuola matematica pisana (1).

---

(1) Furono normalisti G. Battista Donati, Luigi Bombicci, Orazio Silvestri, Ulisse Dini, Dante Pantanelli, Ernesto Padova, Giacomo Antonini, Giulio Ascoli, Eugenio Bertini, Ferdinando Aschieri, Luigi Pinto, Cesare Arzelà, Francesco d'Arcais, Dino Padelletti, Antonio Roiti, Luigi Donati, Alberto Tonelli, Giuseppe Poloni, Adolfo Bartoli, Giovanni Pennacchietti, Salvatore Pincherle, Gregorio Ricci Curbastro, Luigi Bianchi, Adolfo Venturi, Carlo Somigliana, Vito Volterra, G. Battista Antonelli, Mario Pieri, Edgardo Ciani, Adolfo Campetti, Francesco Piola, Federigo Enriques, Orazio Tedone, Giuseppe Lauricella, Onorato Nicoletti, Gaetano Scorza, Azeglio Bemporad, Carlo Rosati, Guido Fubini, Arturo Maroni, Giuseppe Vitali, Raffaele Occhialini, Eugenio Elia Levi, Ruggero Torelli, Francesco Cecioni, Mauro Picone, Mario Tenani, Antonio Signorini, Eligio Perucca, Enrico Pistolesi, Giovanni Sansone, Pietro Tortorici, Giacomo Albanese, Rita Brunetti, Giovanni Polvani, Giuseppe Gherardelli, Pacifico Mazzoni, Enea Bortolotti, Gabriele Mammana, Luigi Lordi, Maria Pastori, Vasco Ronchi, Nello Carrara, Luigi Fantappiè, Enrico Fermi, Giovanni Ricci, Mario Tognetti, Gilberto Bernardini, Giovanni Gentile jr., Amedeo Giacomini, Silvio Cinquini, Basilio Manià, Giovanni Dantoni, Lamberto Cesari, Nestore B. Cacciapuoti, Guido Zappa, Sandro Faedo, Landolino Giuliano.

E, in questo discorso, ci è consentito soltanto di accennare in breve agli impulsi iniziali dell'attività di coloro che, qui educati, portarono seco in altre sedi i germi atti a formare nuove scuole rigogliose.

4. – Dopo questa parentesi, necessaria per illustrare l'ambiente, conviene riprendere a parlare dell'opera del BETTI che si potrebbe dire appartenente a un terzo indirizzo.

Egli successe al MOSSOTTI nell'insegnamento della Fisica matematica (1863) e per primo in Italia, trattò coi metodi moderni di GREEN, GAUSS e JACOBI la teoria del potenziale; ma l'idea che informò l'opera del BETTI fu quella di trasportare alle teorie dell'elasticità e del calore quei metodi analitici che egli ormai padroneggiava, sostenuto da una viva intuizione: ricordiamo il suo « teorema di reciprocità » sull'equilibrio elastico che è un classico e potente strumento di ricerca.

Occorre ancora ricordare la *Teorica delle forze newtoniane e sue applicazioni all'elettrostatica e al magnetismo* del '79, un'opera organicamente concepita, che teneva anche conto dei più recenti studî dei grandi fisici matematici del tempo; e anche ricordiamo una Memoria del '71 sugli spazî a più dimensioni, dove sono affrontati problemi topologici: essa rimase per lungo tempo senza seguito finché, trenta anni più tardi, per opera del POINCARÉ veniva messa in luce la fecondità dei concetti ivi esposti: i cosiddetti « numeri di BETTI » della topologia si trovano lì.

Il fascino della personalità e la concretezza dei problemi di Fisica matematica da lui trattati esercitarono una viva suggestione su una numerosa schiera di giovani matematici che seguirono il BETTI nelle sue teorie. Tra questi ricordiamo ERNESTO PADOVA che, laureatosi nel '67 e rimasto professore a Pisa fino all' '82, studiò il moto dell'ellissoide fluido; ma più specialmente SALVATORE PINCHERLE, CARLO SOMIGLIANA e VITO VOLTERRA.

Il PINCHERLE si volse allo studio degli enti analitici e fu uno dei fondatori dell'Analisi funzionale in questo campo: avremo occasione di ritornare in seguito sulla sua opera.

Il SOMIGLIANA, laureatosi nell' '81, succedette nel '92 al BELTRAMI nell'Università di Pavia: egli esordì, nella sua lunga e feconda attività scientifica, con gli studî sull'elasticità che divennero classici; diede le formule, dette appunto « del SOMIGLIANA », attinenti alla rappresentazione diretta della deformazione nel caso dell'isotropia, che costituiscono un vero sistema di integrali delle equazioni elastiche e diede le soluzioni anche in un caso notevole di anisotropia.

Il VOLTERRA si laureò nell' '82 e dall'anno successivo, per un decennio, rimase a Pisa professore di Meccanica razionale. Questo scienziato, che si rese ben presto noto nel campo internazionale, esordì nell'indirizzo del DINI, come in seguito accenneremo, ma venne attratto dalla Fisica matematica e nel periodo della sua attività a Pisa fece oggetto di studio il potenziale, l'idrodinamica, l'equilibrio e la deformazione delle superficie flessibili e inestendibili: ma più delle altre notevole è la grande Memoria sulle vibrazioni luminose dei mezzi birifrangenti con la quale dà la soluzione rigorosa del difficile problema. A quell'epoca risalgono anche l'introduzione del concetto di «funzione di linea» e i fondamenti della sua teoria dei «funzionali». Nel periodo successivo gli orizzonti dell'attività del Volterra si ampliarono sempre più; e le sue teorie delle equazioni integrali, delle distorsioni elastiche, dell'elasticità ereditaria, della biologia matematica costituiscono un insieme imponente e organico che ha rinnovato interi capitoli della Meccanica e dell'Analisi.

Anche Orazio Tedone e Giuseppe Lauricella, della stessa scuola, raggiunsero risultati notevoli nel campo della teoria dell'elasticità: il primo elaborando un suo metodo di integrazione delle equazioni dell'equilibrio col quale esse vengono ricondotte a quella di Laplace, e il secondo coi suoi studî sull'esistenza degli integrali.

5. – Veniamo a parlare di Ulisse Dini. Egli seguì gli insegnamenti del Mossotti e del Betti, si laureò nel '64 appena diciannovenne, seguì un anno di perfezionamento a Parigi presso il Bertrand, e dal '66 iniziò il suo mirabile insegnamento a Pisa che si svolse senza interruzione per cinquantadue anni.

La lunga serie dei suoi lavori si iniziò con ricerche di Geometria differenziale, ma il suo gusto matematico si andava orientando verso quell'indirizzo che prendeva le mosse dai fondamenti del campo reale per studiare l'Analisi delle funzioni assegnate con legge arbitraria. Nel '78 comparvero i suoi *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale* e il corso litografato delle sue *Lezioni di Analisi infinitesimale*, frutto dell'appassionato fervore che da oltre un decennio egli prodigava tanto nella ricerca personale quanto, con spirito innovatore, nell'insegnamento.

Coi *Fondamenti* del Dini, che rimasero per varî decenni l'unica opera del genere, nasceva la Teoria delle funzioni di variabile reale come corpo di dottrina. Il sorgere di questa teoria era storicamente una necessità: lo suggerivano le teorie degli sviluppi in serie, lo imponeva la Fisica matematica quando, nei suoi problemi, chiedeva la generalità per la configurazione iniziale o per i dati al contorno e lo imponeva anche la Teoria delle funzioni analitiche: infatti, nella concezione del Riemann e del Weierstrass, l'ente analitico è definito dal comportamento nell'intorno della frontiera del suo campo d'esistenza, e la descrizione di questo comportamento non può fare a meno dei concetti e del linguaggio della Teoria delle funzioni di variabile reale. Questi, ai quali accenno, sono moventi tipicamente costruttivi: fu quindi naturale l'aspetto costruttivo che, superata la prima fase di critica, questa teoria assunse immediatamente.

Il consenso e il plauso del Betti per l'indirizzo degli studî del Dini, fino dal primo momento, furono pieni: egli, che possedeva i metodi del Gauss e del Green nella Fisica matematica, testimone degli sforzi del Mossotti sulle teorie molecolari e sul discontinuo, preveggente nella Teoria delle funzioni analitiche, sentiva l'interesse per gli studî del suo giovane collega.

Degli studî del Dini, svolti durante la sua lunga vita scientifica, ci limiteremo a segnalarne alcuni nelle quattro direzioni: fondamenti, sviluppi in serie, equazioni a derivate parziali ed equazioni differenziali ordinarie.

Il Weierstrass e il Du Bois Reymond avevano dato esempî di funzioni continue prive di derivata in ogni punto: il Dini ne costruisce vaste classi ed è condotto a introdurre i «numeri derivati» (gli estremi oscillatorî del rapporto incrementale): nei *Fondamenti* è svolto uno studio approfondito delle proprietà di questi numeri derivati e della somma delle serie di funzioni continue. Fin dal '73 egli cominciò ad occuparsi degli sviluppi in serie di funzioni sferiche iniziando lo studio dei cosiddetti «insiemi di univocità», recentemente approfondito dallo Zygmund, il suo trattato *Sulle serie di* Fourier *e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale* e il successivo *Sugli sviluppi in serie* confermano il suo acume costruttivo e il suo spirito veramente moderno: ivi sono presentati per la prima volta in forma organica tutti gli studi relativi non solo alle serie di Fourier ma anche alle serie trigonometriche che, anzichè procedere per i multipli interi dell'argomento, procedono in relazione alle radici di certe trascendenti, alle serie di funzioni di Bessel, alle serie di funzioni sferiche, ecc., e, ancora più in generale nel secondo volume, sono studiate la possibilità e l'unicità degli sviluppi in serie di integrali di equazioni differenziali lineari del secondo ordine (i cosiddetti «sviluppi di Sturm-Liouville»). Lo spirito che informa tutto questo inquadramento è singolare per la novità: per la prima volta gli sviluppi in serie di funzioni di Sturm-Liouville rientravano in una trattazione organica in parallelo con quelli classici di Fourier. Risalgono al 1880 due fondamentali criterî di convergenza per le serie di Fourier e per le serie più generali, altri sulla integrazione e sulla derivazione termine a termine, tutti più generali di quelli fino allora noti. Vi si trova studiato l'integrale di Fourier e, per la prima volta, vi si trovano indicate tre ampie condizioni nel complesso sufficienti a garantire la validità della classica formula di Fourier. Importante per la novità del carattere lo studio degli sviluppi che oggi si chiamano «di Dini-Bessel» procedenti per argomenti multipli secondo le successive radici della funzione di Bessel.

Il Dini diede la soluzione del problema di Dirichlet per la corona circolare e la corona fra ellissi omofocali, e diede, per questi campi, anche la soluzione del problema più generale di quello del NEUMANN, oggi detto « problema del DINI ».

Un altro gruppo di Memorie si riferisce alle equazioni differenziali lineari: nella prima di queste egli espone un metodo per la risoluzione di tali equazioni (« metodo del DINI ») a raggiungere la quale egli riconduce l'equazione differenziale a un'equazione integrale del tipo di VOLTERRA (e delle equazioni integrali costruisce per suo conto la teoria); nelle Memorie successive vengono studiati gli integrali nel loro comportamento asintotico e nel loro andamento nell'intorno di certi punti di tipo singolare. Gli studî di questo indirizzo hanno preso posto stabile nella letteratura matematica sopra le equazioni differenziali ordinarie.

Dopo avere lumeggiate le parti più importanti dell'opera del DINI, accenniamo ai giovani che si appassionarono alle sue ricerche e lo ebbero maestro. GIULIO ASCOLI nel '79 poneva il concetto di « eguale continuità » di un sistema di funzioni e poco dopo dimostrava l'esistenza, sotto questa ipotesi, di una funzione di accumulazione: concetti che sono alla base dell'Analisi funzionale.

CESARE ARZELÀ dava risposta definitiva al problema della continuità della somma di una serie di funzioni continue introducendo la « continuità uniforme a tratti » e scopriva criterî d'integrabilità per serie venuti in uso frequentissimo.

VITO VOLTERRA risolveva il problema della primitiva pel numero derivato limitato e studiava, secondo le vedute moderne, le equazioni differenziali ordinarie in condizioni che non rientravano in quelle del LIPSCHITZ.

ONORATO NICOLETTI studiava il metodo di RIEMANN per le equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico, la dipendenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie dai valori iniziali e anche un problema che di recente è stato oggetto di numerose ricerche: il cosiddetto « problema di NICOLETTI » per le equazioni differenziali, nel quale si individua un integrale mediante condizioni iniziali relative a punti diversi.

I giovani GUIDO FUBINI e GIUSEPPE VITALI che, provenendo dalla Scuola del DINI, sentirono l'importanza dei nuovi concetti che il BOREL e il LEBESGUE stavano introducendo, come ad aprire nuovi panorami nel campo reale, e si volsero a questi e lasciarono il loro nome legato a tante proposizioni fondamentali nell'indirizzo nuovo di queste teorie.

EUGENIO ELIA LEVI applicava con successo la Teoria delle equazioni integrali alla risoluzione delle equazioni a derivate parziali, giungendo alla soluzione in ipotesi più generali di quelle di HOLMGREN e HADAMARD.

MAURO PICONE, con la felice unione della teoria delle funzioni intere, delle equazioni integrali, delle funzioni di variabile reale, studiava i teoremi generali di confronto e di oscillazione nel senso di STURM e determinava per approssimazioni successive gli autovalori. Egli poi prolungava la sua feconda attività nella sua scuola.

GABRIELE MAMMANA svolgeva studî sulle equazioni differenziali ordinarie.

E tutti questi matematici, dei quali ho citato qualche lato della attività iniziale, anche in quella successiva agirono secondo il gusto formatosi in loro alla Scuola pisana.

Anche GUIDO ASCOLI (che fu più tardi professore qui per un biennio, dal '32 al '34) e GIOVANNI SANSONE. Se l'ASCOLI, coi suoi studî riguardanti l'unicità nel problema del DIRICHLET e l'equazione di LAPLACE nello spazio iperbolico si può considerare legato al FUBINI, il SANSONE, nella seconda fase della sua operosità volta alle equazioni differenziali e agli sviluppi in serie, viene direttamente dal DINI: e due esempî egregi di moderna trattatistica, il primo dovuto a VITALI e SANSONE sulla *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale* (con la parte destinata agli aggregati, all'analisi delle funzioni, all'integrazione, alla derivazione opera del VITALI e la parte destinata agli sviluppi in serie di funzioni ortogonali opera del SANSONE) e il secondo ancora dovuto al SANSONE sulle *Equazioni differenziali nel campo reale*, sono due esempî che si trovano su un piano di prospettiva internazionale e tuttavia in linea perfetta con lo sviluppo naturale delle concezioni del DINI.

E che cosa dire dell'influenza esercitata da questo grande maestro nella vita scientifica anche fuori d'Italia? Fino alla fine dell' '800 i lavori che rientravano nell'orbita delle sue teorie non potevano non portare qualche segno della sua impronta: è del 1892 l'edizione in lingua tedesca dei « Fondamenti » che ebbe la massima diffusione.

6. – Ma adesso volgiamoci a illustrare l'aspetto geometrico della Scuola pisana (²).

EUGENIO BERTINI iniziò gli studî a Bologna dove insegnava il giovane LUIGI CREMONA, fondatore della Scuola geometrica italiana, e subì il fascino delle lezioni di quel maestro: si laureò a Pisa nel '67 dopo aver partecipato alla campagna garibaldina. Nel '75 gli venne affidato, qui in Pisa, l'insegnamento della Geometria superiore. Era un innesto della Geometria, nel già vigoroso tronco della Matematica pisana.

Fra i lavori con cui il BERTINI esordì figura la nuova dimostrazione, semplice ed elegante, dell'invarianza del genere della curva per corrispondenze birazionali, ma segnarono durevole orma nello sviluppo della scienza un gruppo di ricerche che egli compì durante il suo primo quinquennio pisano con le quali egli giunse alla determinazione dei tipi birazionalmente distinti di involuzioni piane del secondo ordine, cioè delle trasformazioni cremoniane involutorie.

(²) Per la materia di questo n. 6 ci siamo valsi principalmente del bellissimo articolo di FABIO CONFORTO, *Geometria algebrica* in « Un secolo di progresso scientifico italiano: 1839-1939 », vol. I, pp. 125-153, Roma 1939.

L'idea e l'atteggiamento del ricercatore erano nuovi e originali, nei confronti della scuola del Cremona. Per vederli oggi nella loro giusta luce conviene inquadrarli nel « Programma di Erlangen ». Il concetto di gruppo aveva imbevuto l'Algebra e la Geometria e nel 1872 Felice Klein esponeva, nel suo celebre « Programma di Erlangen », le sue geniali vedute che costituiscono insieme una sintesi e un orientamento: con esse, ad ogni gruppo di trasformazioni si associa una geometria, nella quale si considerano come non distinte quelle figure geometriche che si ottengono l'una dall'altra per mezzo di trasformazioni del gruppo e le proprietà della figura sono quelle invarianti per le trasformazioni del gruppo stesso. Le trasformazioni cremoniane costituiscono appunto un gruppo e ad esso può essere applicato quel principio generale: questa era la posizione del Bertini, che, abbandonando il gruppo proiettivo e studiando il problema della determinazione dei tipi distinti rispetto al gruppo delle trasformazioni cremoniane, portava la Geometria su un piano più elevato e superava l'atteggiamento mentale del Cremona, esempio mirabile del come deve essere intesa la continuazione dell'opera del maestro. Era una felice ventura per la Scuola pisana che l'innesto della Geometria, non appena operato, desse frutti così rigogliosi.

Non si deve credere che l'idea del Bertini venisse apprezzata subito e nel suo giusto valore; ma essa fu la guida per le ricerche geometriche ulteriori.

L'opera scientifica del Bertini, strettamente connessa col suo insegnamento, restò sempre nell'ambito della Geometria algebrica e lo rese notissimo nel mondo matematico: sono classici e di uso continuo i suoi due teoremi sui sistemi lineari, l'uno riguardante i punti multipli variabili e l'altro riguardante le forme spezzate. Dall' '88 egli inizia gli studî di « Geometria sopra la curva algebrica » dando assetto rigoroso e definitivo alla teoria del Noether sulla scomposizione delle singolarità di una curva algebrica, una precisazione essenziale del teorema di Voss e Noether sulla rappresentabilità di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre; ed è del '94 la sua Memoria sulla *Geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico di* Brill *e* Noether, Memoria che, insieme a una contemporanea di Corrado Segre, legata al metodo iperspaziale, preparò mirabilmente l'ambiente geometrico italiano a studiare la Geometria sulla curva algebrica.

Era naturale che il suo interesse si volgesse anche alla Geometria iperspaziale: su questo argomento lasciò l'opera di sintesi *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazj*; va ricordato anche l'elegante corso di *Complementi di Geometria projettiva.*

La Scuola geometrica italiana, quale si affermò successivamente in pieno splendore con l'opera di tanti geometri insigni fra cui primeggiano le figure di Guido Castelnuovo, Federigo Enriques e Francesco Severi, e da quest'ultimo arricchita anche dei metodi trascendenti, proviene dal Cremona, ma apparisce storicamente essenziale la funzione svolta dal Bertini e da Corrado Segre che costituiscono gli anelli di congiunzione fra il Cremona e i geometri della generazione successiva.

Fra i discepoli del Bertini troviamo Carlo Rosati, Gaetano Scorza, Arturo Maroni, Piero Benedetti, Ruggero Torelli, Giacomo Albanese e Giuseppe Gherardelli. Anche Francesco Severi fu a Pisa per un anno, giovanissimo, dopo aver seguito l'insegnamento di Corrado Segre a Torino.

Ricordiamo che nel 1880 venne professore a Pisa, da Pavia, Riccardo De Paolis: egli scambiò la sede col Bertini, e qui svolse il suo insegnamento, fino alla immatura morte, per dodici anni. Il De Paolis fu allievo diretto del Cremona: legato al classico indirizzo del maestro, studiò dal punto di vista proiettivo le trasformazioni (1, 2) piane e spaziali e le configurazioni gometriche legate alla superficie cubica. Seguirono il suo insegnamento Mario Pieri, Edgardo Ciani e Federigo Enriques. Il Ciani venne attratto nella scuola del Bertini, il Pieri lasciò forti impronte nei « Fondamenti della Geometria », mentre l'Enriques si affiancò al Castelnuovo nello svolgimento di un grande piano per lo sviluppo della « Geometria sulla superficie ». L'opera dell'Enriques, vivace maestro di una fiorente scuola, si svolse fuori dell'ambiente di Pisa: la sua figura, eminente nel quadro della Geometria algebrica e della Filosofia della Scienza, ebbe qui la sua prima formazione.

Mentre l'attività e l'insegnamento dello Scorza si svolsero fuori della scuola pisana (sono fondamentali i suoi studî sulle matrici di Riemann e sulla Teoria delle algebre, che in tali matrici trova una delle più belle applicazioni: come un ponte fra gli enti algebrici e quelli trascendenti classici ad essi collegati), Carlo Rosati, nel '22, successe al Bertini nell'insegnamento e vi rimase fino alla immatura morte, avvenuta nel '29. Il suo nome è legato agli studî sulle matrici di Riemann e a quelli sulle corrispondenze algebriche dove ha raggiunto risultati interessanti e riposti, talvolta anche connessi a questioni di aritmetica. Egli ebbe come scolaro Luigi Campedelli che, successivamente, fu discepolo dell'Enriques.

Per breve periodo anche Luigi Brusotti, della Scuola lombarda, fu professore in questa sede. Di lui sono importanti gli studî delle curve algebriche dal punto di vista reale.

Giacomo Albanese fu professore a Pisa dal 1929 per nove anni: pur essendo scolaro del Bertini, si formò sull'opera del Severi; il genere aritmetico delle varietà algebriche, lo scioglimento delle singolarità delle superficie, il teorema fondamentale della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica per via algebrico-topologica, le corrispondenze fra superficie algebriche sono tutti argomenti elevati e di attualità che il suo ingegno acuto trattò con eleganza.

Salvatore Cherubino, professore a Pisa dal 1933, fu discepolo dello

SCORZA; è noto pei suoi studî sulla Teoria delle matrici: in particolare delle matrici di RIEMANN, che lo portano a manifestare il suo singolare gusto per l'algoritmo matriciale.

I giovani GIOVANNI DANTONI e GUIDO ZAPPA furono allievi qui dell'ALBANESE e del CHERUBINO; e dopo una prima formazione, vennero attratti dalla Scuola di FRANCESCO SEVERI.

7. – Ma anche, e specialmente nel campo della Geometria differenziale, la Scuola matematica pisana fu splendida; e ora veniamo a tratteggiarne questo aspetto.

La Geometria differenziale aveva preso corpo con l'opera del GAUSS che aveva costruita la teoria delle superficie associando ad esse le forme quadratiche differenziali, con un impianto consono allo spirito algebrico. Quando il BELTRAMI venne a Pisa, il BETTI già possedeva le teorie del GAUSS: lo dimostra il suo lavoro del '60 nel quale definisce e studia i sistemi di ellissi e di iperbole geodetiche. Riflettiamo su quanto abbiamo già detto relativamente ai colloqui del BETTI col RIEMANN, sull'affinità dei due giovani matematici e si comprenderà che l'intesa doveva essere sempre piena, vivace e fruttuosa anche su quei principî che guidarono il RIEMANN alle sue concezioni riguardanti lo «spazio»; il giovane BELTRAMI e il giovanissimo DINI ebbero la fortuna di vivere nell'atmosfera di quei colloqui.

Il BELTRAMI, durante il suo quadriennio pisano, iniziò una serie di studî con ampiezza di respiro e originalità di vedute: sono di quell'epoca la rappresentazione geodetica delle superficie sul piano e di poco posteriori il concetto di «variabile complessa su una superficie» e il classico *Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea* (1868) nel quale egli costruisce per primo modelli concreti aderenti alle idee del GAUSS e del LOBATCHEWSKJ. Successivamente la vita scientifica del BELTRAMI si svolse a Pavia: essa lasciò orme profonde nella Geometria differenziale e nella Fisica matematica: in quest'ultimo campo specialmente; tanto che il BETTI e il BELTRAMI sono da considerarsi i fondatori della Fisica matematica italiana.

Il DINI, come abbiamo già detto, esordì con lavori di Geometria differenziale: le elicoidi pseudosferiche, il problema della rappresentazione geodetica delle coppie di superficie e le condizioni relative alla rappresentazione sferica delle asintotiche portano tutte il suo nome.

Nel '76 si laurea GREGORIO RICCI CURBASTRO e nell'anno successivo si laurea LUIGI BIANCHI; a questo stesso anno risale uno studio del BETTI sui sistemi tripli ortogonali di superficie nell'indirizzo del LAMÉ.

8. – Il RICCI CURBASTRO, come abbiamo già detto, fu scolaro del BETTI e nell' '80 andò professore di Fisica matematica a Padova: fin da allora, notate, fin dal 1880, manifestò l'aspirazione di esprimere in modo unitario le leggi della Fisica e, con spirito fisico, si volse all'Analisi e alla Geometria differenziale; e principalmente all'opera del Christoffel e del Beltrami: la sua educazione a Pisa era movente essenziale per questo orientamento. Si propose di creare, modificando i procedimenti di calcolo differenziale, lo strumento adatto affinchè le formule e i risultati sussistano sempre sotto una stessa forma, qualunque sia il sistema di variabili di cui si fa uso: dopo un quindicennio di lavoro, solitario e sorretto dalla fede nel problema propostosi, giunse a costruire quel « Calcolo differenziale assoluto » che oggi porta il suo nome. L'uso che ne fece l'Einstein per la Teoria della relatività, rese d'un tratto celebre il Ricci Curbastro e il Calcolo assoluto è divenuto strumento importantissimo per la Fisica matematica. Anche questa è una gloria che, in un certo senso, ha le origini nella Scuola matematica pisana.

9. – Abbiamo detto che nel '77 si laurea il Bianchi: due anni dopo egli presenta la sua Tesi di abilitazione *Sulle superficie applicabili* nella quale si si trovano i germi di buona parte dell'opera scientifica sua e della sua Scuola.

Da pochi anni, come abbiamo avuto occasione di ricordare qualche momento fa, il Klein aveva esposte le sue vedute nel « Programma di Erlangen » (1872): tali vedute si estendevano fino ai gruppi continui di « trasformazioni puntuali » e a quelli di « trasformazioni di contatto », sui quali ferveva l'opera di Sophus Lie. La Scuola francese era attratta verso lo studio delle equazioni a derivate parziali sulle quali le idee di Lie erano chiamate a gettare luce e orientamento. Nel 1880 il Bianchi si trovava a Monaco in perfezionamento presso il Klein, e nell' '81 egli rientrava a Pisa come professore interno nella Scuola Normale Superiore; a partire dall' '86 fu professore di Geometria analitica, pur rimanendo alla Normale, della quale fu direttore, dopo la morte del Dini, dal '18 al '28.

L'opera svolta dal Bianchi, durante la sua lunga e fervida vita scientifica a Pisa, è talmente vasta e piena di risonanze nelle generazioni che l'accostarono che è impossibile tratteggiarla convenientemente nei limiti che le circostanze ci impongono.

Nella sua Tesi di abilitazione egli assegna una semplice costruzione geometrica che consente di passare da una superficie pseudosferica (cioè a curvatura costante negativa) a una semplice infinità di altre tali superficie: questo passaggio è la cosiddetta « trasformazione complementare », che, iterata, consente di dedurre da una superficie infinite altre, dipendenti da un numero arbitrariamente grande di parametri arbitrarî: era, sostanzialmente, un procedimento ricorrente di integrazione dell'equazione a derivate parziali delle superficie pseudosferiche, la cui soluzione non era nota. Questo fatto attrasse subito sull'opera del Bianchi l'attenzione di illustri geometri come il Bäcklund e SOPHUS LIE: la trasformazione del BIANCHI non era né puntuale né di contatto e usciva dal quadro delle trasformazioni allora note.

Il BIANCHI stesso ampliò ed estese le classi di enti geometrici a cui si adattavano questa e altre più generali trasformazioni; ne studiò, coi teoremi di permutabilità, l'andamento analitico dell'iterazione; in questo modo la concezione più naturale della Geometria differenziale, che associa alla illustrazione degli enti geometrici la visione analitica della soluzione delle equazioni a derivate parziali, riceveva un impulso che usciva dal quadro di SOPHUS LIE, e penetrava con spirito innovatore in molti capitoli della Geometria differenziale.

Molte delle ricerche posteriori del BIANCHI furono volte ai sistemi tripli ortogonali e alle « famiglie di LAMÉ » che si trovano presenti, attraverso un sistema ciclico, già nella sua Tesi di abilitazione. Le superficie applicabili sulle quadriche, la generazione per rotolamento delle superficie isotermiche, la Geometria differenziale non-euclidea, gli spazî riemanniani a più dimensioni nei quali egli è stato un potente pioniere, furono tutti argomenti da lui studiati a fondo, presentati attraverso molteplici prospettive e vivificati col suo stile brillante e camunicativo.

E accanto a queste, di Geometria differenziale, le ricerche di carattere analitico e quelle di carattere aritmetico-algebrico: fra queste ultime, uno splendido studio giovanile sui fattori irriducibili dell'equazione risolvente di LAGRANGE, il cui andamento, con riferimento all'epoca in cui fu concepito, dimostra la potenza del ricercatore nell'ambito dei gruppi astratti; e ancora gli studî giovanili sul gruppo modulare e suoi sottogruppi aritmetici, nell'indirizzo del KLEIN.

Così, questo massiccio giovanotto, si piantava nei fondamenti gruppali e aritmetici del « Programma di Erlangen » e nello stesso tempo oltrepassava quel vasto « Programma » con le sue trasformazioni che non vi risultavano inquadrate

Poi, più tardi, si ebbero i suoi studî sui gruppi continui e lo studio sistematico degli spazî secondo la concezione del RIEMANN (ricordiamo, per esempio, le « identità di BIANCHI » riguardanti il tensore derivato del tensore di curvatura). Tutta la sua vita scientifica e ancora più la sua mirabile opera di trattatista, con la quale coordinava l'oggetto dei suoi studî in forma chiara, avvincente e volta a cogliere l'essenziale, dimostrano come egli abbia vissuto intensamente e con pienezza quel « Programma » anche nei suoi fondamenti aritmetico-algebrici: I gruppi di sostituzioni e le equazioni algebriche secondo GALOIS, le funzioni di variabile complessa e le funzioni ellittiche (queste illuminate anche aritmeticamente), le forme quadratiche aritmetiche, i gruppi continui (di LIE), i numeri algebrici, le equazioni differenziali nel campo analitico (coordinate alle funzioni modulari), le equazioni integrali: ma soprattutto il suo trattato di Geometria differenziale studiato da generazioni di geometri, tutti questi costituiscono il patrimonio di trattati che egli ci lasciò. Quanti hanno sentito l'influenza di questo maestro! Primo e suo più grande discepolo GUIDO FUBINI che ha trasportato, con fecondità, nel campo proiettivo i fondamenti metrico-differenziali del GAUSS, basandosi anche lui sulle forme quadratiche e cubiche differenziali: altro esempio della ideale continuazione dell'opera del maestro da parte di un discepolo. Anche ONORATO NICOLETTI, MAURO PICONE e ANTONIO SIGNORINI soggiacquero al fascino del BIANCHI, come lo dimostrano i loro studî iniziali di Geometria differenziale; e GIOVANNI SANSONE che, oltre a problemi di applicabilità, trattò anche questioni aritmetico-gruppali. E così PIETRO TORTORICI, ALBERTO BEDARIDA ed ENEA BORTOLOTTI, questo giovane valoroso così presto rapito alla Scienza, la cui attività si orientò poi verso la Geometria differenziale degli «spazî a connessione» alla quale l'opera del BIANCHI e del RICCI CURBASTRO costituiscono le premesse indispensabili; e LUIGI FANTAPPIÈ con lo studio aritmetico sugli «ideali» e con quelli successivi nel campo dell'Analisi.

E che cosa dire della sua influenza fuori dell'ambito pisano? L'opera di WILHELM BLASCHKE e quella di ENRICO BOMPIANI hanno riflessi vivi dell'opera del BIANCHI; PASQUALE CALAPSO (con le sue ricerche sulle trasformazioni delle deformate delle quadriche, sugli invarianti differenziali conformi e sulla «deformazione conforme»), GUSTAVO SANNIA, BERTRAND GAMBIER, SERGE FINIKOFF e tanti altri sono ad essa ancora più e molto aderenti. È un quadro mirabile che, purtroppo, non ci è dato di osservare che di sfuggita. Anche chi vi parla fu in Pisa allievo e poi collaboratore alla Normale dal '28 al '36: e quando talvolta si sorprende a ricercare le origini della trama di suoi pensieri e immagini matematiche, egli le trova qui, fitte come radici, nell'illuminato magistero del BIANCHI e degli altri maestri, che qui conobbe.

10. – Nel '95 GIAN ANTONIO MAGGI venne a Pisa a occupare il posto lasciato libero dal VOLTERRA, e vi rimase per un trentennio. Proveniva dalla Scuola lombarda e per un anno fu a Berlino presso il KIRCHHOFF, il cui indirizzo scientifico ebbe su di lui, poi, tanta influenza. La sua opera si svolse sempre acuta e perfetta, con stile personale nella forma, in varî campi: le «equazioni del MAGGI» nella dinamica dei sistemi anolonomi sono classiche e l'ottica fisica, l'elasticità e la teoria del potenziale sono fra i capitoli sui quali la sua mente acuta ha lasciato contributi essenziali.

Ma è nella costruzione della Meccanica razionale come sistema logico-deduttivo che il MAGGI lascia un'orma di grande interesse: nella sua *Teoria matematica del movimento dei corpi*, pubblicata nel suo primo triennio pisano, e poi nella serie di cinque volumi che la seguirono egli, seguendo le vedute del MACH e del CLIFFORD, elimina la finzione del «punto materiale» sostituendovi il concetto macroscopico di « figura materiale » con i relativi « attributi »; distingue la « dinamica fisica », i cui postulati sono dati dall'esperienza, dalla « dinamica dei sistemi », intesa a calcolare le singole categorie dei moti concreti, ed evita al nozione di « forza » con l'introduzione dell'« accelerazione dipendente dalle condizioni fisiche ».

Lo ebbero maestro ANTONIO SIGNORINI e MARIA PASTORI. La sua viva attività si prolungò anche all'Università di Milano dove anche BRUNO FINZI lo ebbe maestro.

La figura del MAGGI ci fornisce l'occasione per una breve parentesi che vuol sottolineare una delle sue qualità.

È bensì vero che la Matematica ha sempre un movente tecnico: il movente è tecnico quando essa è concepita come strumento e il suo contenuto è proiettato sulle applicazioni, ed è ancora tecnico quando il contenuto è pensato astrattamente, all'interno della Matematica stessa. Ma è anche vero che il Matematico giunge a percepire le nuove « verità », o a ripensare le verità a lui note, con una « emozione » che egli « esprime » tanto nella ricerca originale quanto nella costruzione di un'opera organica, come può essere un corso di lezioni o un trattato. Ora, accade sempre che l'attenzione dello scienziato, istintiva ma più o meno vigilata, porti l'« espressione » aderente a una propria disciplina o a un ritmo interiore i quali tendono a dare forma e, diciamo così, a « coagulare » quella emozione. Talvolta può accadere che l'espressione vi aderisca in pieno, tanto da far sentire in chi la riguardi, dopo l'avvicinamento e la comprensione anche se faticosi, una completa e immediata fusione fra quella disciplina e quel ritmo e il soggetto trattato; una completa fusione che conduce a una calma contemplativa.

Qui non intendiamo parlare della natura del soggetto, cioè del contenuto e della sua importanza come verità matematica, ma vogliamo alludere alla « forma », al modo di rappresentare, allo « stile », cioè a quegli elementi pei quali la Matematica è effettivamente un'Arte.

E se volgiamo lo sguardo all'orizzonte matematico italiano del periodo che ci interessa, per individuare, a prescindere dal soggetto trattato e dal suo valore, quei matematici che meglio fanno sentire la forma e la rappresentazione come espressione di stile, potremo scorgerne molti; ma, secondo il nostro modesto avviso, ve ne sono quattro che eccellono. Essi sono: ERNESTO CESÀRO, GIUSEPPE PEANO, GIAN ANTONIO MAGGI e GAETANO SCORZA.

Il CESÀRO dell'*Analisi algebrica*, del *Calcolo infinitesimale* e della *Teoria matematica dell'Elasticità*; il PEANO dell'*Analisi infinitesimale*, delle *Applicazioni geometriche* e del *Formulario*; il MAGGI della *Geometria del movimento*, della *Dinamica fisica*, della *Dinamica dei sistemi*; lo SCORZA dei *Corpi numerici e algebre* e degli *Elementi di Geometria analitica*, e tutti e quattro, anche nelle rimanenti opere e nelle loro ricerche originali, sono i più raffinati rappresentanti di questa concezione.

Ebbene, il Maggi, dopo la sua permanenza a Pavia, in dimestichezza col Casorati, venne a Pisa, e qui portò l'espressione del suo gusto e del suo stile; mentre lo Scorza, educato qui dal Bianchi al gusto aritmetico e gruppale, in questo trovò i moventi allo stile proprio, nel quale sembrano apparire influenze del Cesàro.

Quando il Maggi, nel '24, si portò all'Università di Milano, qui a Pisa gli succedette Pietro Ermenegildo Daniele, anche lui proveniente dalla Scuola lombarda; il suo nome è legato agli studî sull'equilibrio delle reti, sulle equazioni integrali e sull'attritto. E alla Scuola pisana venne anche Orazio Lazzarino le cui succose ricerche sui moti giroscopici e in tanti capitoli della Meccanica razionale si esprimono sempre nella condensata e impeccabile trattazione vettoriale.

11. – Un ricordo speciale va indirizzato alla memoria di Paolo Pizzetti, uno della prima generazione dei geodeti insigni che ebbe il nostro Paese. Egli fu dal '900 al '918, anno della sua morte, professore di Geodesia qui a Pisa. Le sue ricerche sulla « Teoria degli errori », sulla rifrazione atmosferica e più ancora il suo volumetto sui *Principj della teoria meccanica della figura dei pianeti*, dimostrano la sua penetrazione matematica. Il suo trattato di *Geodesia teoretica*, primo inquadramento sintetico delle teorie geodetiche, è quello su cui hanno studiato e studiano i giovani geodeti italiani.

Veniamo a delineare la figura notevole di Onorato Nicoletti: egli ebbe a maestri il Dini e il Bianchi e, dal '900, per un trentennio, fino alla sua immatura morte, fu maestro anch'egli in questa Scuola pisana. Già ho accennato alla sua attività nel campo delle equazioni differenziali; il suo ingegno acuto e penetrante e la sua prontezza nell'orientarsi anche nei campi della Matematica lontani da quelli da lui coltivati lo ponevano su un piano di parità coi suoi maestri: la luce di questo ingegno e la raffinatezza del suo gusto di algebrista traspariscono dai suoi studî sulle matrici e sui procedimenti di iterazione, e, più ancora, dal suo studio sulla equiscomponibilità dei poliedri dove il problema, con felice astrazione, è ricondotto al calcolo di « moduli di grandezze » e fino a risultati estremamente riposti. Molti normalisti seguirono il suo vivace insegnamento e Francesco Cecioni lo ebbe maestro e gli si affiancò nell'insegnamento venticinque anni fa. Il Cecioni lascia il suo nome legato a un nuovo e inatteso tipo di « algebre primitive non commutative nei corpi numerici infiniti », e più ancora ai problemi e ai risultati relativi alla « rappresentazione conforme » nell'indirizzo dello Schottky, i quali si riattaccano a concezioni di geometria algebrica e alle questioni sui « moduli » delle curve algebriche.

Anche la Scuola di Ingegneria di questa sede è illuminata dalla fervida attività scientifica di Enrico Pistolesi: un matematico normalista che si è rivolto alla Meccanica applicata. Dopo un breve periodo passato alla Scuola di Torino, egli iniziò qui, venticinque anni fa, il suo insegnamento: le sue ricerche di Aerodinamica e principalmente quelle fondamentali sulla teoria delle eliche sono sostenute dalla padronanza dello strumento analitico che la vita di studio pisana gli diede.

12. – Il nostro compito volge al termine; dobbiamo adesso tratteggiare l'ultima grande figura scomparsa della Scuola matematica pisana: LEONIDA TONELLI, che fu rapito alla famiglia e alla Scienza poco più di due anni fa.

Quando nel '930, dopo la morte del BIANCHI, egli venne a Pisa accettando l'invito della Facoltà e di GIOVANNI GENTILE, direttore della Scuola Normale, la sua posizione scientifica era già eminente nel campo internazionale: egli venne a profondere il frutto delle sue doti in questa Facoltà e nel Seminario matematico della Scuola Normale. Era stato scolaro del PINCHERLE e dell'ARZELÀ, ma scientificamente più legato a quest'ultimo. Per comprendere come nell'ARZELÀ si ravvisi un legame ideale fra l'opera del DINI e quella del TONELLI, occorre rifarsi un po' indietro.

Tra il 1880 e il 1890, per merito di alcuni giovani, tutti della Scuola del BETTI e del DINI, nasceva un nuovo ramo dell'Analisi: intendo dire l'« Analisi funzionale ». I giovani a cui alludo erano SALVATORE PINCHERLE, VITO VOLTERRA, GIULIO ASCOLI e CESARE ARZELÀ. Essi concepirono le basi di una nuova teoria ciascuno secondo il proprio temperamento matematico e diedero luogo al più singolare fenomeno di quel periodo.

Il PINCHERLE concepì l'Analisi funzionale come corrispondenza tra funzione e funzione, nel campo delle funzioni analitiche e il suo interesse si volse allo studio di questa corrispondenza sia dal punto di vista qualitativo che da quello formale. L'opera del PINCHERLE si svolse a Bologna e fu vasta e precorritrice (si pensi, per esempio, alla degenerazione delle omografie da lui considerata nel '97 e che venne ritrovata più tardi, nel 1910, dal HELLINGER e TOEPLITZ). Il VOLTERRA, pel suo orientamento verso la Fisica matematica, fu condotto a istituire le « funzioni di linea », cioè quelle che più tardi furono dette « i funzionali », come risultato di una corrispondenza tra funzioni e numeri: nell'impianto egli è guidato dal principio del « passaggio dal discontinuo al continuo » e perviene allo sviluppo del TAYLOR i cui termini sono integrali di molteplicità via via crescente: questo indirizzo è stato ripreso, in Italia, dal FANTAPPIÈ che l'ha trasportato nel campo analitico, avvicinandosi così all'indirizzo del PINCHERLE. Accanto a questi due indirizzi ne sorgeva un altro per opera di GIULIO ASCOLI e CESARE ARZELÀ. L'ASCOLI pose il concetto di « eguale continuità » e di « funzione di accumulazione », e l'ARZELÀ studiò le funzioni di linee da un punto di vista generale che, in germe, è risultato quello in cui, secondo E. H. MOORE, M. FRÉCHET, P. LÉVY e altri, ha trovato il suo assetto l'« Analisi generale » fondata sulla nozione degli « spazî astratti ».

Dei tre punti di vista segnalati, questo ultimo è quello che più si accosta allo spirito del DINI. È questo il legame ideale a cui poco fa accennavo e che congiunge il TONELLI col DINI attraverso la generazione intermedia; e, naturalmente, lo congiunge anche attraverso i concetti e le teorie del BOREL e del LEBESGUE, sopraggiunte ad ampliare e approfondire il patrimonio dell'Analisi e così a continuare idealmente l'opera del WEIERSTRASS, del DU BOIS REYMOND e del DINI. Infatti il TONELLI, partendo dalle concezioni del VOLTERRA e dell'ARZELÀ riuscì mirabilmente a inserire il Calcolo delle Variazioni nell'Analisi funzionale.

13. – L'attività scientifica del TONELLI ebbe inizio nel '907 e si svolse sempre fervida e congiunta all'insegnamento per quasi un quarantennio: fu troncata repentinamente, nel marzo del '46, dalla sua morte, quando già una sua Scuola fiorente di giovani studiosi ricercatori si era formata qui a Pisa dal '930 in poi. I contatti ideali scientifici che la sua fama internazionale e la freschezza della sua opera gli avevano permesso di annodare con analoghe scuole straniere, erano, e sono tuttora, intensi e molteplici: qui, la presenza di numerosi giovani, vissuti a lui vicino, ci fa sentire ancora la sua presenza come maestro.

L'opera sua è vasta, penetrante e piena di suggestione: non ci sarà consentito che di tratteggiarla appena. La teoria delle funzioni di variabile reale, gli sviluppi in serie, le equazioni differenziali ordinarie, le equazioni integrali, le funzioni analitiche e anche e soprattutto il Calcolo delle variazioni, furono i campi coltivati dal TONELLI con mirabile successo.

Nella teoria delle funzioni di variabile reale, il rinnovamento dell'Analisi imponeva di ritornare sui due problemi classici: la rettificazione delle curve e la quadratura delle superficie; gli è che quei due problemi, dal nuovo punto di vista, assumevano una sostanza tutta diversa da quella classica, sulla quale non ci è dato dilungarci: ebbene, il TONELLI, in alcuni lavori giovanili risolve il problema della rettificazione delle curve assegnate in « forma ordinaria » e in « forma parametrica » e, più tardi, risolve il problema della quadratura delle superficie assegnate in forma ordinaria. Per quest'ultimo problema egli introduce due appropriati concetti: « funzioni di due variabili a variazione limitata » e « funzioni di due variabili assolutamente continue » che sono la chiave di volta del problema; questi concetti furono da lui e da altri applicati alle serie trigonometriche, al Calcolo delle Variazioni e ad altre questioni. Ricorderò qui che LAMBERTO CESARI, suo allievo, ha dato recentemente risposta compiuta e definitiva nell'analogo e più difficile problema della quadratura delle superficie assegnata in forma parametrica, problema che si era andato maturando.

Il TONELLI diede anche una trattazione nuova e brillante dell'integrale di LEBESGUE, estesa poi anche alle funzioni di più variabili, che lo riannoda in modo naturale a quello classico di MENGOLI-CAUCHY-RIEMANN senza bisogno di sviluppare la teoria della misura e segnalandovi la «legge di scelta» da richiedere per evitare l'applicazione del postulato delle infinite scelte arbitrarie (o postulato di ZERMELO).

I polinomi di approssimazione del TCHEBYCHEFF, i polinomi di STIELTJES, gli sviluppi in serie di FOURIER, tutti per le funzioni di due variabili reali sono argomenti sui quali lascia risultati fondamentali. È del 1928 il trattato sulle *Serie trigonometriche*, dall'andamento limpido e ricco di nuovi risultati, che ha dato tanti orientamenti per le ricerche in questo argomento.

Ma veniamo al Calcolo delle variazioni. Nel '97 l'ARZELÀ tentò di risolvere con «metodo diretto» il «problema di DIRICHLET»; il tentativo non riuscì, ma l'idea appropriata permise allo HILBERT, tre anni dopo, di risolvere il problema stesso; altri studî seguirono in questo ordine di idee. Nel 1911 il TONELLI pose in luce che la cosiddetta «semicontinuità» è una proprietà che appartiene a tutti gli integrali di una vasta classe, la quale contiene, come casi particolari, tutti quelli che si presentano nel Calcolo delle variazioni e tutti quelli «regolari» secondo HILBERT. Nel 1914, dopo essersi accorto che la ragione del successo nello studio del problema del DIRICHLET secondo le vedute dell'ARZELÀ, stava nel concetto di semicontinuità, il TONELLI dimostra un principio generale collegato con questo concetto, inserendo così il Calcolo delle variazioni nell'Analisi funzionale intesa in senso moderno.

Egli concepisce allora un vasto piano: costruire tutto il Calcolo delle variazioni col metodo diretto; e in breve tempo lo realizza con ampie e profonde vedute nel suo trattato sui *Fondamenti di Calcolo delle variazioni* del 1922. La novità dello spirito informatore di questo trattato ha esercitato una forte suggestione sui giovani della sua Scuola e su ricercatori stranieri. L'attività del TONELLI e quella dell'insieme degli scolari raccoglie, in breve volgere di anni, copiosi risultati intorno a fondamentali problemi e si connette con quella di matematici stranieri, anche nel campo degli spazî astratti. BASILIO MANIÀ, SILVIO CINQUINI, LAMBERTO CESARI, LUIGI AMERIO, SANDRO FAEDO, ADOLFO DEL CHIARO, LANDOLINO GIULIANO, EMILIO BAIADA e altri hanno collaborato nel piano da lui concepito.

Anche ANTONIO MAMBRIANI della Scuola di Bologna ha studiato col TONELLI nel periodo che precedette il trasferimento a Pisa del maestro.

14. – Adesso, e ormai da un biennio, la vita del Seminario matematico della Scuola Normale è affidata a GIOVANNI SANSONE. Egli ama questa Scuola alla quale si formò: la sua attività di ricercatore sembra volere raccogliere molte delle varie correnti della tradizione pisana e specialmente quelle del

Bianchi e del Dini: la Geometria differenziale metrica con le ricerche sull'applicabilità, la Teoria dei numeri con gli studî sopra la «risoluzione apiristica» delle congruenze di terzo e di quarto grado e i punti razionali delle cubiche, la Teoria dei gruppi con le memorie sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri e sul gruppo modulare, la Teoria delle funzioni di variabile reale con le ricerche sugli sviluppi in serie nel campo reale, le Equazioni differenziali nel campo reale e i relativi problemi ai limiti, e, ancora, con la sua moderna trattatistica che tanto e meritato successo ha riportato, richiamando l'attenzione degli studiosi, anche stranieri, sulla letteratura matematica italiana: alludiamo alle due opere sugli sviluppi in serie e sulle equazioni differenziali che abbiamo ricordato nella prima parte di questa esposizione e alle sue recenti *Lezioni sulla Teoria delle funzioni di una variabile complessa* (1948).

I frutti del suo personale impulso già si raccolgono e si vedono promettenti; essi ci dicono della vitalità del suo insegnamento e del fervore col quale i giovani lo seguono: la sua sensibilità che dispone delle esperienze in tanti campi, scientificamente vissute come ricercatore, è pronta ad alimentare anche i lieviti spontanei che possono sorgere nel gruppo dei giovani a lui affidati.

E adesso mi rivolgo ai cari giovani matematici pisani: voi che avete conosciuto l'ultimo grande scomparso, che custodite nella vostra mente il ricordo di quella figura e di quel nobile volto e che, nel seguirmi in questo discorso, avete veduto sorgere tante altre figure che si armonizzano con quella, ritornate, ancora una volta, nel Camposanto Vecchio: una chiesa che sembra un giardino; e, davanti alle lapidi, semplici e fredde, che ricoprono le spoglie dei Mossotti, Betti, Dini, Bianchi, Tonelli, il vostro spirito si ritemprerà e gli occhi del vostro intelletto vedranno, sotto quelle lapidi, il volto di questi e degli altri maestri: non il volto che rimane immoto nella fissità del ricordo, ma quello che vive con la loro opera e che si prolunga, attraverso le emozioni matematiche che essi vi hanno espresso, nelle emozioni vostre che costituiscono il patrimonio della vostra vita scientifica.