GIACOMO VIGLINO (*)

Sul teorema di WEIERSTRASS per la rappresentazione delle funzioni continue mediante serie di polinomi. (**)

1. – Il problema della « rappresentazione delle funzioni continue mediante serie di polinomi » ha, notoriamente, grande importanza nell'Analisi matematica. Su tale rappresentazione è fondamentale il seguente teorema: *Ogni funzione* $f(x)$, *continua in un intervallo* $a \leqslant x \leqslant b$, *ammette una espressione analitica mediante una serie di polinomi, uniformemente convergente.* Questa proposizione, nota oggi sotto il nome di *teorema di* WEIERSTRASS, venne dimostrata per la prima volta da tale Autore (1) nel 1885, in modo però alquanto laborioso. Seguirono numerosissime altre dimostrazioni e venne esteso il teorema stesso alle funzioni di più variabili (2). Alcune di queste dimostrazioni hanno,

---

(*) Indirizzo: Viale Aldini, 9''; Bologna (Italia).

(**) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico « S. PINCHERLE » della Università di Bologna, e collegato alla Tesi di Laurea dell'Autore. Ricevuto per la stampa il 15-II-1950.

(1) K. WEIERSTRASS, *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen*, Berlin Ber. 633-640, 789-806 (1885); *Werke*, Bd. 3, Berlin 1903, (cfr. pp. 6-7, 18).

(2) Per l'amplissima bibliografia sull'argomento, si veda anche: D. JACKSON, *The theory of approximation*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 11, 1930, (cfr. pp. 1-32); E. FELDHEIM, *Théorie de la convergence des procédés d'interpolation et de quadrature mécanique*, Mémorial des Sc. Math., fasc. 95, Paris 1939, (cfr. Cap. I e II); G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, Zanichelli, Bologna 1946, (cfr. Parte II, Cap. V, pp. 335-412).

Dimostrazioni di carattere elementare (per funzioni di una variabile): C. RUNGE, *Über die Darstellung willkürlicher Functionen*, Acta Math. **7**, 387-392 (1886); H. LEBESGUE, *Sur l'approximation des fonctions*, Bull. Sc. Math. (2) **22**, 278-287 (1898), riportata in É. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, Gauthier-Villars, Paris 1924 (quatrième éd.), (cfr. T. I, pp. 498-500); G. MITTAG-LEFFLER, *Sur la représentation analytique des fonctions d'une variable réelle*, (Extrait d'une lettre à M. É. PICARD), Rend. Circ. Mat. Palermo **14**, 217-224 (1900); G. FABER, *Über stets konvergente Interpolationsformeln*, Jber. Deutsch. Math. Verein. **19**, 142-146 (1910).

Dimostrazioni facenti uso di integrali singolari: E. LANDAU, *Über die approximation* per così dire, carattere elementare in quanto sfruttano solo le nozioni di continuità e di limite, altre si appoggiano alla teoria degli integrali singolari, oppure alla teoria delle serie trigonometriche od alle serie di polinomi di LEGENDRE.

Nel presente lavoro indico una dimostrazione semplice e generale che non mi risulta nota: in essa si approssima la data funzione continua mediante semplici funzioni razionali fratte che, successivamente, vengono sostituite con polinomi. Dimostro precisamente il teorema seguente:

Ogni funzione continua

$$f(X)\,, \qquad X \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \in I\,, \tag{1}$$

essendo I un insieme limitato e chiuso dello spazio euclideo E_ν (a ν dimensioni), è la somma di una serie di polinomi, uniformemente convergente in I.

Indico poi (n. 5) una *estensione di questo teorema al caso in cui la funzione è continua in un campo illimitato.*

2. – Indichiamo con $\|X, X'\|$ la distanza euclidea di due punti X, X' di E_ν, con D il diametro di I e con M il massimo di $|f(X)|$ per $X \in I$.

Poichè la funzione (1) è continua e il suo campo I di definizione è limitato e chiuso, la (1) è anche uniformemente continua: pertanto, fissato un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario, esisterà in corrispondenza un $\delta > 0$, *che sceglie-*

---

einer stetigen Function durch eine ganze rationale Function, Rend. Circ. Mat. Palermo **25**, 337-345 (1908); H. LEBESGUE, *Sur la représentation approchée des fonctions*, (Extrait d'une lettre adressée à M. E. LANDAU), Rend. Circ. Mat. Palermo **26**, 325-328 (1908); CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs derivées par des polynomes et des suites limitées de* FOURIER, Bull. Acad. Roy. Belgique (Cl. Sci.) 193-254 (1908); F. SIBIRANI, *Sulla rappresentazione approssimata delle funzioni di più variabili reali e delle loro derivate per polinomi trigonometrici*, Atti Accad. Sc. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **44**, 659-683 (1909); F. SIBIRANI, *Sulla rappresentazione approssimata delle funzioni*, Ann. Mat. Pura Appl. (3) **16**, 203-221 (1909); L. TONELLI, *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali*, Rend. Circ. Mat. Palermo **29**, 1-36 (1910); D. HILBERT und R. COURANT, *Methoden der Mathematischen Physik*, Bd. I, 1924, (cfr. p. 72).

Dimostrazioni facenti uso di serie trigonometriche: É. PICARD, *Traité d'Analyse*, Gauthier-Villars, Paris, (cfr. première édit. 1891, p. 258; deuxième édit. 1901, pp. 275-287); M. LERCH, *Bemerkungen zur Interpolationstheorie*, Rozpravy ceské Akad. **1**, Mem. n. 33 (1892), **2**, Mem. n. 9 (1893); V. VOLTERRA, *Sul principio di* DIRICHLET, Rend. Circ. Mat. Palermo **11**, 83-86 (1897).

Dimostrazioni facenti uso di serie di polinomi di LEGENDRE: L. FEJÉR, Math. és termész. ért. **26**, 323-373 (1908); W. STEKLOFF, *Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales dependant d'un nombre quelconque de variables*, Mém. Acad. Sci. St. Pétersbourg (8) **30**, n. 4, pp. 1-82 (1911); P. FUNK, Math. Ann. **77**, 146-148 (1915-16).

remo $< D$, tale che sia

$$|f(X')-f(X'')|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

per ogni coppia di punti $X'\in I$ e $X''\in I$ con $\|X', X''\|\leqslant\delta$. In legame con tale δ considero il numero naturale m così definito:

$$m=\left(\text{minimo numero naturale tale che }\frac{1}{2^m}\leqslant\frac{\delta}{2\nu}\right). \tag{2}$$

Fissato m, suddivido lo spazio E_ν in tante *celle* mediante gli iperpiani

$$x_h=\frac{k}{2^m},\qquad (h=1,2,\dots,\nu;\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots).$$

Considero poi le celle che contengono, nel loro interno o su la loro frontiera, qualche punto appartenente ad I: poichè I è limitato, queste celle sono certamente in numero finito. In ciascuna di tali celle fisso un punto appartenente ad I, ed i punti fissati siano

$$X_1,\quad X_2,\quad \dots,\quad X_r,\quad \dots,\quad X_\mu; \tag{3}$$

restando stabilito che se uno di questi punti appartiene a più celle (in quanto appartiene alla frontiera comune di tali celle) venga scelto una sola volta e serva per ciascuna di simili celle: in tale guisa i punti (3) saranno tutti *distinti*.

Indi, formo le funzioni

$$\varphi_r(X)=\frac{\delta^2-\|X, X_r\|^2}{D^2},\quad X\in I,\qquad (r=1,2,\dots,\mu).$$

Ciascuna di esse è manifestamente una funzione razionale intera di secondo grado nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_\nu$; ed essendo

$$0\leqslant\|X, X_r\|\leqslant D,\qquad X\in I,\qquad (r=1,2,\dots,\mu),$$

risulta

$$-1<\frac{\delta^2-D^2}{D^2}\leqslant\varphi_r(X)\leqslant\frac{\delta^2}{D^2}<1,\quad X\in I,\qquad (r=1,2,\dots,\mu).$$

Essendo sempre ε il numero fissato precedentemente, posto

$$n=\left(\text{minimo numero naturale tale che }\frac{4M\mu}{[1+\delta^2/(2D^2)]^n}\leqslant\varepsilon\right), \tag{4}$$

consideriamo la funzione

$$\Phi(X)=\frac{\sum_1^{\mu}{}_r[1+\varphi_r(X)]^n f(X_r)}{\sum_1^{\mu}{}_r[1+\varphi_r(X)]^n},\qquad X\in I, \tag{5}$$

che è razionale fratta nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ in quanto i termini del rapporto sono polinomi di grado $2n$ in tali variabili. Formata ora la differenza

$$f(X) - \Phi(X) = \frac{\sum_1^\mu {}_r [1 + \varphi_r(X)]^n \{ f(X) - f(X_r) \}}{\sum_1^\mu {}_r [1 + \varphi_r(X)]^n}, \qquad X \in I,$$

dimostriamo che è

$$(6) \qquad | f(X) - \Phi(X) | < \varepsilon \qquad X \in I .$$

A tale scopo, *fissato in I un punto X qualsiasi*, suddivido i punti (3) in due categorie: la prima categoria contenga i punti X_r pei quali $\|X, X_r\| \leqslant \delta$, la seconda categoria contenga i punti X_r rimanenti. Spezzo poi la differenza precedente in due parti:

$$f(X) - \Phi(X) = \frac{\sum'_r [1 + \varphi_r(X)]^n \{ f(X) - f(X_r) \}}{\sum_1^\mu {}_r [1 + \varphi_r(X)]^n} + \frac{\sum''_r [1 + \varphi_r(X)]^n \{ f(X) - f(X_r) \}}{\sum_1^\mu {}_r [1 + \varphi_r(X)]^n},$$

dove $\sum'_r$ indica la sommazione estesa agli r dei punti X_r della prima categoria e $\sum''_r$ indica la sommazione estesa agli r dei punti X_r della seconda categoria. Chiamiamo, brevemente e rispettivamente, con U' e U'' tali due parti dello spezzamento fatto.

1°) Poichè in U' risulta $| f(X) - f(X_r) | \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, segue subito

$$|U'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

2°) Circa U'' notiamo che è

$$| f(X) - f(X_r) | \leqslant | f(X) | + | f(X_r) | \leqslant 2M$$

e inoltre, essendo $\delta < \|X, X_r\| \leqslant D$, risulta

$$-1 < \varphi_r(X) < 0, \qquad 0 < 1 + \varphi_r(X) < 1,$$
$$0 < [1 + \varphi_r(X)]^n < 1, \qquad 0 < \sum''_r [1 + \varphi_r(X)]^n < \mu .$$

Poichè il punto X fissato in I appartiene anche ad una delle celle precedenti sia X_{r_0} il punto (3) appartenente alla stessa cella nella quale sta il punto X considerato. Abbiamo

$$\|X, X_{r_0}\| \leqslant \frac{\sqrt{\nu}}{2^m} = \text{(diametro di una cella)},$$

ed essendo, in virtù di (2), $\sqrt{\nu}/2^m < \delta/\sqrt{2\nu}$, segue

$$\|X, X_{r_0}\| < \frac{\delta}{\sqrt{2\nu}} \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta\,,$$

cioè X_{r_0} è un punto della prima categoria dei punti (3), ed è

$$1 + \varphi_{r_0}(X) = 1 + \frac{\delta^2 - \|X, X_{r_0}\|^2}{D^2} \geqslant 1 + \frac{\delta^2 - \frac{\delta^2}{2}}{D^2} = 1 + \frac{\delta^2}{2D^2}\,.$$

Pertanto

$$|\,U''\,| \leqslant \frac{\sum_r'' [1 + \varphi_r(X)]^n \cdot 2M}{\sum_{1}^{\mu}{}_r\, [1 + \varphi_r(X)]^n} < \frac{2M\mu}{[1 + \varphi_{r_0}(X)]^n} \leqslant \frac{2M\mu}{[1 + \delta^2/(2D^2)]^n}\,.$$

ossia, tenendo presente (4),

$$|\,U''\,| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Riunendo ora i due risultati finali ottenuti a 1°) e a 2°) abbiamo

$$|\,f(X) - \Phi(X)\,| \leqslant |\,U'\,| + |\,U''\,| < \varepsilon\,,$$

cioè, in quanto X è un punto qualsiasi di I, proprio la (6).

3. – Riprendendo l'espressione della funzione razionale fratta (5), indichiamo brevemente con $R(X)$ il suo denominatore e con $S(X)$ il suo numeratore.

Il polinomio

$$R(X)\,, \qquad X \in I\,,$$

è sempre maggiore di zero [come segue ricordando che è $-1 < \varphi_r(X) < 1$], ha un minimo $\lambda > 0$ e un massimo che chiamerò Λ. Detto L un numero qualunque maggiore di Λ, abbiamo

$$\Phi(X) = \frac{S(X)}{R(X)} = \frac{S(X)}{L - \{L - R(X)\}} = \frac{S(X)}{L}\,\frac{1}{1 - \{L - R(X)\}/L}\,.$$

Essendo

$$0 < \frac{L - R(X)}{L} \leqslant \frac{L - \lambda}{L} < 1\,, \qquad X \in I\,,$$

la serie

$$\sum_{0}^{\infty}{}_r \left[\frac{L - R(X)}{L}\right]^r$$

è uniformemente convergente in I, e quindi è

$$\Phi(X) = \sum_0^\infty{}_r \frac{S(X)}{L^{r+1}} \{ L - R(X) \}^r , \qquad X \in I ,$$

dove anche la serie del secondo membro è uniformemente convergente in I. Esiste quindi in questa ultima serie una somma parziale, che chiamerò $P(X)$ e che è manifestamente un polinomio nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, tale che sia

$$| \Phi(X) - P(X) | < \varepsilon \qquad \text{per ogni } X \in I ,$$

essendo sempre ε il numero fissato arbitrariamente al principio del n. 2.

Associando questo risultato a quello (6), e tenendo presente che è

$$| f(X) - P(X) | = | \{ f(X) - \Phi(X) \} + \{ \Phi(X) - P(X) \} | \leqslant$$
$$\leqslant | f(X) - \Phi(X) | + | \Phi(X) - P(X) | ,$$

si giunge alla conclusione:

Fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esiste in corrispondenza un polinomio $P(X)$ (quello sopra determinato) tale che sia

$$(7) \qquad | f(X) - P(X) | < 2\varepsilon \qquad \textit{per ogni} \quad X \in I .$$

4. – Il risultato ultimo ottenuto ci permette di affermare:

Per ogni prefissato numero naturale $N = 1, 2, 3, \ldots$ esiste un polinomio $P_N(X)$ tale che sia

$$(7') \qquad | f(X) - P_N(X) | < \frac{1}{N} \qquad \text{per ogni} \quad X \in I .$$

Ora ciò esprime proprio che *la serie di polinomi*

$$P_1(X) + \{ P_2(X) - P_1(X) \} + \ldots + \{ P_N(X) - P_{N-1}(X) \} + \ldots$$

è uniformemente convergente in I ed ha per somma la data funzione continua (1).

Invero, preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$, sia N_0 il più piccolo numero naturale tale che sia $\varepsilon \geqslant 1/N_0$. Risulta allora

$$| f(X) - P_{N_0}(X) | < \varepsilon \qquad \text{per ogni} \quad X \in I$$

ed anche, manifestamente,

$$| f(X) - P_N(X) | < \varepsilon \qquad \text{per ogni} \quad N \geqslant N_0 ,$$
$$\text{e per ogni} \quad X \in I .$$

Il teorema enunciato alla fine del n. 1 è così pienamente dimostrato.

5. – Diamo ora l'estensione accennata alla fine del n. 1, precisamente dimostriamo il teorema seguente:

Ogni funzione continua

$$f(X)\,, \qquad X=(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \in \mathcal{J}\,, \tag{8}$$

essendo $\mathcal{J}$ un insieme (dello spazio euclideo E_ν) illimitato e contenente ogni suo punto d'accumulazione al finito, è la somma di una serie di polinomi uniformemente convergente in ogni insieme I limitato e chiuso di $\mathcal{J}$.

Invero, per ogni numero naturale $N=1, 2, 3, \ldots$ diciamo Σ_N la sfera di centro l'origine O, di E_ν, e raggio N, precisamente l'insieme dei punti X tali che sia $\|X, O\| \leqslant N$: allora, l'insieme $\mathcal{J}_N$ dei punti di $\mathcal{J}$ appartenenti a Σ_N è limitato e chiuso. Relativamente a ciascun insieme $\mathcal{J}_N$ esiste, per ciò che precede (n. 4), un polinomio $P_N(X)$ tale che sia

$$|\, f(X) - P_N(X)\,| < \frac{1}{N} \qquad \text{per ogni} \quad X \in \mathcal{J}_N\,.$$

Con i polinomi

$$P_1(X), \quad P_2(X), \quad \ldots, \quad P_N(X), \quad \ldots,$$

così ottenuti, formiamo la serie di polinomi

$$P_1(X) + \{\, P_2(X) - P_1(X)\,\} + \ldots + \{\, P_N(X) - P_{N-1}(X)\,\} + \ldots\,.$$

Dico che questa serie ha per somma la funzione (8) e che converge uniformemente in ogni insieme I limitato e chiuso di $\mathcal{J}$. Infatti, considerato un tale insieme I e fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, diciamo $\overline{N}$ il più piccolo numero naturale tale che sia $\varepsilon \geqslant 1/\overline{N}$ e inoltre tale che $\mathcal{J}_{\overline{N}}$ contenga l'insieme I. Risulta allora

$$|\, f(X) - P_{\overline{N}}(X)\,| < \varepsilon \qquad \text{per ogni} \quad X \in I$$

ed anche, manifestamente,

$$|\, f(X) - P_N(X)\,| < \varepsilon \qquad \text{per ogni} \quad N \geqq \overline{N} \quad \text{e per ogni} \quad X \in I\,.$$

Il teorema è così dimostrato.